

## PSC 보의 고유진동수에 미치는 긴장력의 영향

### Effects of Prestressing Force on the Natural Frequency of a PSC Beam

구민세\*  
Koo, Min-Se

이호경\*\*  
Lee, Ho-Kyung

이주범\*\*\*  
Lee, Ju-Beom

---

#### ABSTRACT

Existing results of some related experiments report that variation in the magnitude of prestressing force may leads to a change of dynamic properties of a PSC girder system. Since a usual dynamic equilibrium equation doesn't explain these phenomena, a modified dynamic equilibrium equation is derived in this paper by considering prestressing force as an internal energy of the system. The derived equation is applied to a modified beam element model is proposed. The proposed model validated by comparing the natural frequencies computed by the model with those from an existing experiment result.

---

#### 1. 서론

철도교량의 동적안정성(dynamic stability)의 확보를 위하여 프랑스의 경우는 20 ~ 150Hz 대역의 진동주파수가 교량의 주부재 및 부부재에서 발생하지 않도록 동적설계를 하고 있다.<sup>18)</sup> 또한 철도교량의 주부재 및 부부재에서 절대 발생하지 않도록 하는 대역은 40 ~ 60Hz로 설정하여 준수하고 있다. 교량을 구성하는 각 부재의 경우 상기한 회피대역의 10 ~ 20% 미만의 값을 갖도록 설계에 주의를 기울이고 있는 것에서 알 수 있듯이 고유진동수는 교량의 동적안정성에 있어서 중요인자임을 알 수 있다. 따라서 포물선 배치된 PSC교량에 대한 고유진동수의 변화의 고려가 필요할 것이다.

일반적으로 알려진 긴장력을 고려한 고유진동수에 대한 식은 편심이 없고 도심에 작용하는 축력만을 고려한 고유진동수 예측식이다.<sup>14)</sup> 하지만 대부분의 PSC교량은 긴장계를 포물선 형식으로 배치하고 있으므로 고유진동수에 있어서 프리스트레스에 의한 영향을 정확히 예측할 수 없다. 이 논문에서는 정적 평형에 가까운 상태에서 발생하는 미소변위모델을 이용하여 긴장력에 의해 발생하는 보의 응력과 변형률, 시스템의 동적 응답을 계산하는 A. Dall'Asta의 제안식을 이용하였다. Modal Analysis와 유한요소법을 이용하여 고유진동수를 계산하였고 긴장재의 지간 중앙에서의 편심거리와 긴장력의 크기가 고유진동수의 변화에 미치는 영향을 분석하였다.

#### 2. 긴장력을 고려한 PSC보의 모드해석

##### 2.1 보-케이블 시스템

---

\* 정희원, 인하대학교 토목공학과 교수

\*\* 인하대학교 토목공학과 박사과정

\*\*\* 인하대학교 토목공학과 박사과정

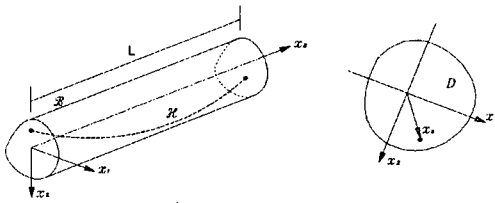


그림 1 보-케이블 시스템

그림 1과 같은 보에서 보는 축 방향으로 일정한 단면을 가지고 내부의 케이블은 보의 양단에서 고정되어 있다. 변형 전 상태에서 기준 좌표  $\{0; x_1, x_2, x_3\}$  는 서로 수직이다. 보 단면상의 임의의 점  $p$ 는 다음과 같이 벡터를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$p(x, x_3) = \mathbf{x} + x_3 \mathbf{e}_3 = x_\gamma \mathbf{e}_\gamma + x_3 \mathbf{e}_3, \quad (x, x_3) \in D \times [0, L] = V \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, \quad \gamma = 1, 2 \quad (1)$$

$D = \mathbb{R}^2$ 은 보 단면을 나타내고,  $\{\mathbf{e}_i; i=1, 2, 3\}$ 은 기저벡터를 나타낸다. Dall'Asta는 보의 단면에서 케이블 위치 벡터를 정의하여 케이블의 변형률을 구하였다.<sup>5)</sup> Dall'Asta는 케이블 단면은 전체 보 단면에 비하여 매우 작다고 가정하였다. 기준 형상에서  $\mathbf{H}$ 는  $x_3$ 에 따른 벡터로서 케이블의 위치를 나타낸다.

$$\mathbf{H}(x_3) = \mathbf{x}_c(x_3) + x_3 \mathbf{e}_3 = x_{c\gamma}(x_3) \mathbf{e}_\gamma + x_3 \mathbf{e}_3, \quad x_3 \in [0, L] \quad (2)$$

$\mathbf{x}_c$ 는 보의 길이방향  $x_3$ 에 따른 함수로서 원점에서  $x_3$ 만큼 떨어진 보의 단면에서 케이블 단면의 점을 나타낸다. 길이 방향  $x_3$ 에 대한 전 미분을 prime(')'이라고 표기하면 케이블 경로에 대한 탄젠트 단위벡터  $\mathbf{G}$ 는 다음의 식으로 표현될 수 있고,

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} = \frac{x_{c\gamma}' \mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_3}{\sqrt{x_{c\gamma}' x_{c\gamma}' + 1}} \quad (3)$$

케이블의 초기 길이  $\Lambda$ 는 다음과 같다.

$$\Lambda = \int_0^L \sqrt{\mathbf{H}' \cdot \mathbf{H}'} d\xi = \int_0^L |\mathbf{H}'| d\xi = \int_0^L \sqrt{x_{c\gamma}' x_{c\gamma}' + 1} d\xi \quad (4)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 을 기준형상에서 보의 임의의 위치  $\mathbf{x}$ 의 변위라고 하면 보의 변형후의 위치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, x_3; t) = \mathbf{u}_0(x_3; t) + \varphi(x_3; t) \times \mathbf{x}, \quad (\mathbf{x}, x_3; t) \in V \times [t_0, \infty) \quad (5)$$

$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_i$ 와  $\varphi = \varphi_i \mathbf{e}_i$ 는 각각 변위와 회전 벡터이다. 단순화 하기위해 2개의 미지의 벡터를 하나의 벡터  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}_0, \varphi]$ 로 나타내기로 한다. 보의 변형에 관한 함수는  $C = \{\mathbf{v}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}$ 인 공간상에 정의된다. 미소 요소의 선형 변형은  $\nabla \mathbf{u}$ 와 선형 변형률 텐서  $\mathbf{E} = (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T)/2$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{U} = \nabla \mathbf{u} \quad (6a)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, x_3; t) = [u_0' - \varphi \times \mathbf{e}_3 + \varphi' \times \mathbf{x}] \otimes \mathbf{e}_3 \quad (6b)$$

$$\mathbf{U}''(\mathbf{x}, x_3; t) = [u_0'' - \varphi \times \mathbf{e}_3 + \varphi' \times \mathbf{x}_c] \otimes \mathbf{e}_3 \quad (6c)$$

케이블은 보의 거동을 따른다. 그러므로 변형 후의 케이블의 위치 벡터  $\mathbf{h}$ 는

$$\mathbf{h}(x_3; t) = \mathbf{H} + \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}_c, \quad \mathbf{h}'(x_3; t) = \mathbf{H}' + \mathbf{u}_0' + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}_c' \quad (7)$$

변형 후 케이블의 길이  $\lambda$ 는

$$\lambda(t) = \int_0^L |\mathbf{H}' + \mathbf{u}_0' + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}_c'| dx_3 \quad (8)$$

이 연구의 주된 관심은 케이블 미소구역의 최종길이와 초기길이 사이의 비율로부터 케이블 변형률을 계산하는 것이다. 케이블의 질량을 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정 하면, 접선경로에 따른 평형식의 결과에 따라 케이블 응력은 일정하다. 균질한 케이블의 경우 변형률(strain)  $a$ 는 케이블 전체에서 일정하며 변형 후 형상에서의 전체 케이블길이  $\lambda(t)$ 와 초기 전체 길이  $\Lambda$  사이의 비율로서 계산된다.

여기서는 외력에 대한 영향이 없고 마찰력이 없는 균질한 케이블에 대하여 고려하고 있다. 그러므로 케이블의 내적 응력은 케이블의 각 점에서 같다. 케이블의 변형이 발생할 때의 길이를  $\lambda$ 라 하고 초기의 길이를  $\Lambda$ 라 하면, 케이블의 순수 변형률은 다음과 같다.

$$a(t) = \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L |\mathbf{h}'| dx_3 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L |\mathbf{H}' + \mathbf{u}_0' + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}_c'| dx_3 \quad (9)$$

$\Lambda = \int_0^L |\mathbf{H}'| dx_3$  이므로

$$a(t) = 1 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^L |\mathbf{u}_0' + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}_c'| dx_3 \cong 1 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}'' \mathbf{H}' dx_3 = 1 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{D}_N dx_3 \quad (10)$$

여기서  $\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}' \\ \mathbf{u}_0' - \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$  이고  $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_M \\ \boldsymbol{\theta}_N \end{bmatrix}$  으로 각 성분은  $\boldsymbol{\theta}_M(x_3) = \frac{\mathbf{H}' \otimes \mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\theta}_N(x_3) = \mathbf{x}_c \times \boldsymbol{\theta}_N$  이다.

## 2.2 제안 운동방정식

긴장재가 균질한 등방성 재료라고 가정하면 긴장재는 전 구간에서 동일한 긴장력을 받는다고 가정할 수 있다. 보의 단면에 발생하는 응력은 보의 변형에 의한 응력과 케이블의 긴장력에 의해 추가되는 응력으로 나눌 수 있다. PSC 보 시스템에 대하여 가상일의 원리가 적용되면 다음과 같은 식이 성립된다.<sup>5)</sup>

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{E}} dV + \int_V \mathbf{T}_c \cdot \hat{\mathbf{E}} dV + \tau(a) \hat{a} \Lambda = \int_V \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \quad (11)$$

$\mathbf{T}$ : Cauchy tensor,  $\rho_0$ : 보의 단위 질량,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{f}$ : 보 body force와 traction force,  $\tau$ : 케이블 응력

$\mathbf{T}_c$ : 케이블 긴장력에 의해 보에 발생하는 응력

$\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{a}$  는 보와 케이블의 가상변위와 변형률을 나타낸다. 첫 번째 항은 일반적인 보에서의 내적 가상일에 해당하는 항으로서 다음 식과 같이 표현된다.

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_0^L [(\hat{\mathbf{u}}_0' - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{e}_3) \cdot \int_S \mathbf{T} \mathbf{e}_3 dS + \hat{\boldsymbol{\varphi}}' \cdot \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{T} \mathbf{e}_3 dS] dx_3 = \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 = \int_0^L \mathbf{D} D\mathbf{v} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (12)$$

$\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{Q}$ 는 보의 단면에서 발생하는 단면 합응력(Stress resultant)을 의미하는 것으로서 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{T} \mathbf{e}_3 dS \quad \mathbf{Q} = \int_S \mathbf{T} \mathbf{e}_3 dS \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \mathbf{D} D\mathbf{v}, \quad D\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}' \\ \mathbf{u}_0' - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \quad D\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varphi}}' \\ \hat{\mathbf{u}}_0' - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\mathbf{T}$ : Stress Tensor,  $\mathbf{M}$ : 내력에 의한 모멘트 응력 벡터,  $\mathbf{Q}$ : 단면 응력 벡터,  $\mathbf{D}$ : 강성행렬

두 번째 항은 긴장재에 의해 보에 추가 되는 응력에 대한 항이다. 긴장재의 거동은 보의 거동을 따른다. 보에 임의의 점에서 케이블 응력에 의한 내적 가상일은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_V \mathbf{T}_c \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_0^L [(\hat{\mathbf{u}}_0' - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{Q}_c + \hat{\boldsymbol{\varphi}}' \cdot \mathbf{M}_c] dx_3 = \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{M}_c \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (15)$$

단면에서 긴장력은 그 점에서의 접선 방향으로 작용한다. 따라서 긴장재에 의한 단면 합응력  $\mathbf{Q}_c$ 와  $\mathbf{M}_c$ 는 다음과 같다. 여기서  $t_0$  긴장재 긴장응력을 나타낸다.

$$\mathbf{Q}_c = t_0 \frac{\mathbf{h}'}{|\mathbf{H}'|} = \frac{t_0}{|\mathbf{H}'|} \mathbf{U}^H \mathbf{H}' = t_0 \frac{H_3'}{|\mathbf{H}'|} [\mathbf{u}_0' - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c] = t_0 \frac{H_3'}{|\mathbf{H}'|} (\mathbf{u}_0' - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_3) + t_0 \frac{H_3'}{|\mathbf{H}'|} (\mathbf{W}_c) \boldsymbol{\varphi}' \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{X}_c \times t_0 \frac{\mathbf{h}'}{|\mathbf{H}'|} = \mathbf{X}_c \times t_0 \frac{\mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} \mathbf{U}^H \mathbf{H}' = \mathbf{W}_c t_0 \frac{H_3'}{|\mathbf{H}'|} [\mathbf{u}_0' - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c] = t_0 \frac{H_3'}{|\mathbf{H}'|} [\mathbf{W}_c - \mathbf{W}_c^2] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0' - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\varphi}' \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\mathbf{W}_c$ 는 긴장재의 위치에 따른 계수 행렬이다. 따라서 긴장재에 의한 추가의 응력을 긴장재의 기하학적 형상에 종속적인 행렬  $\mathbf{D}_c$ 를 도입하여 표현하면 다음의 식과 같다.

$$\int_V \mathbf{T}_c \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_0^L \mathbf{D}_c D\mathbf{v} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3, \quad \mathbf{D}_c = t_0 \frac{H_3'}{|\mathbf{H}'|} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{W}_c \\ \mathbf{W}_c & \mathbf{W}_c^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

다음은 긴장재의 강성과 관련된 식 (11)의 세 번째 항을 살펴보도록 한다. 긴장재를 균질한 등방성의 선형 탄성 재료라고 가정하면 긴장재의 응력은  $\tau = \alpha e$ 이다.  $c$ 는 긴장재 강성을 나타내며  $e = a - 1$ 은 긴장재 변형률을 나타낸다.

$$\tau(a) \hat{a} A = \frac{c}{A} \int_0^L \boldsymbol{\theta} \cdot D\mathbf{v} dx_3 \int_0^L \boldsymbol{\theta} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (19)$$

그러므로 전체 내적 가상일에 해당하는 좌변 항은 다음과 같다.

$$\int_0^L \mathbf{D} D\mathbf{v} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 + \int_0^L \mathbf{D}_c D\mathbf{v} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 + \frac{c}{A} \int_0^L \boldsymbol{\theta} \cdot D\mathbf{v} dx_3 \int_0^L \boldsymbol{\theta} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (20)$$

식 (11)의 오른쪽 항들은 외력과 질량분포에 관련된 항들이다.

$$\int_V \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS = \int_0^L (\mathbf{q} - L\ddot{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (21)$$

$$\mathbf{L}(x_3) = \begin{bmatrix} L_{u_0 u_0} & L_{u_0 \varphi} \\ L_{u_0 \varphi} & L_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \quad (22)$$

매트릭스  $\mathbf{L}$ 은 질량 행렬을 나타낸다. 대각선의 항들은 선 가속도와 각 가속도에 의한 내력을 만들어 내는 질량을 나타낸다. 식의 간편화를 위해 고유진동수와는 관련이 없는 접촉력은 없다고 가정한다. 결과들을 정리하면 식 (11)은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\int_0^L D D\mathbf{v} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 + \int_0^L D_c D\mathbf{v} \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 + \frac{c}{A} \int_0^L \Theta \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 \int_0^L \Theta \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 = \int_0^L (\mathbf{q} - L\ddot{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (23)$$

### 2.3 Modal analysis 와 유한요소 모델의 정식화

식 (23)에서 외력이 작용하지 않는 자유진동상태인 경우에 변위  $\mathbf{v}(x_3, t) = e^{i\omega t} \phi(x_3)$ 과 같이 가정하면 해를 구할 수 있다.  $\omega$ 는 진동 모드  $\phi(x_3)$ 의 진동수이다. 식 (23)에 대입하여 정리하면

$$\int_0^L D D\phi \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 + \int_0^L D_c D\phi \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 + \frac{c}{A} \int_0^L \Theta \cdot D\phi dx_3 \int_0^L \Theta \cdot D\hat{\mathbf{v}} dx_3 = \omega^2 \int_0^L \mathbf{L}\phi \cdot \hat{\mathbf{v}} dx_3 \quad (24)$$

요소의 변위  $u_0$ 와 회전  $\varphi$ 는 형상함수를 이용하여 변위-변형률 관계를 나타낼 수 있다( $u_0 = w, \varphi = \theta$ ). 변형률 행렬  $\mathbf{B}$ 를 이용하여, 식 (24)의  $D\mathbf{v}$ 와  $D\hat{\mathbf{v}}$ 는  $D\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{d}$ ,  $D\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}}$ 로 나타낼 수 있다. 정리하면,

$$\int_0^L \mathbf{B}\mathbf{d} \cdot \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}} dx_3 + \int_0^L D_c \mathbf{B}\mathbf{d} \cdot \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}} dx_3 + \frac{c}{A} \int_0^L \Theta \cdot \mathbf{B}\mathbf{d} dx_3 \int_0^L \Theta \cdot \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}} dx_3 = \omega^2 \int_0^L \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{d} \cdot \mathbf{N}\hat{\mathbf{d}} dx_3 \quad (25)$$

$$\left[ \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dx_3 + \int_0^L \mathbf{B}^T D_c \mathbf{B} dx_3 + \frac{c}{A} \int_0^L \mathbf{B}^T \Theta dx_3 \left( \int_0^L \mathbf{B}^T \Theta dx_3 \right)^T - \omega^2 \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{L}\mathbf{N} dx_3 \right] (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{d}}) = 0 \quad (26)$$

$\forall \hat{\mathbf{d}} \neq 0$ 이 아니므로

$$(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{d} = 0 \quad (27)$$

여기서  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{M}$ 은 식 (36), 식 (37)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{A} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dx_3 + \int_0^L \mathbf{B}^T D_c \mathbf{B} dx_3 + \frac{c}{A} \int_0^L \mathbf{B}^T \Theta dx_3 \left( \int_0^L \mathbf{B}^T \Theta dx_3 \right)^T \quad (28)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{L}\mathbf{N} dx_3 \quad (29)$$

식 (29)은 Mode Shape에 따른 진동수를 구할 수 있는 식을 유한 요소 해석의 형태로 제공한다.

### 3. 긴장력과 긴장재 배치 형상에 따른 고유진동수의 변화

지간 길이 20m의 직사각형 단면의 보에 대하여 고유진동수를 구하였다. 포물선 배치된 긴장재의 보의 도심에서 긴장재까지의 거리를  $e_c$ , 긴장력의 크기는 최대값을  $6.72 \times 10^8 \text{Pa}$ 로 하여 크기에 따른 비율로 나타내었다.

### 3.1 긴장재 배치 형상에 따른 고유진동수의 변화

$e_c$ (m)	1차 모드 (rad/sec)	비율 (%)	2차 모드 (rad/sec)	비율 (%)
0	22.4680	0.00	89.8140	0.00
0.1	22.7650	1.32	90.2360	0.47
0.2	22.9110	1.97	90.5300	0.80
0.3	23.1420	3.00	92.1170	2.56
0.4	23.5140	4.66	92.3130	2.78

표 1 지간 중심에서의 긴장재 편심거리에 따른 고유진동수

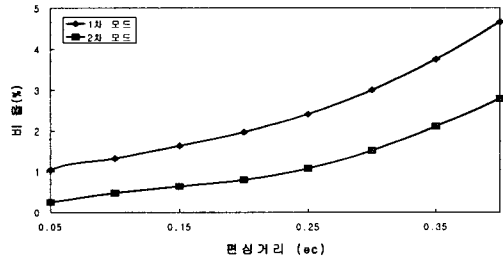


그림 3 긴장재 편심거리에 따른 고유진동수 변화

긴장재의 편심거리에 따라 구조물의 고유진동수가 포물선의 형태로 증가하고 있음을 보이고 있다. 이는 긴장재에 의한 추가의 강성을 긴장재의 기하학적 형상에 종속적인 행렬  $D_c$ 를 도입하여 정의하는 과정에서  $D_c = t_0 \frac{H_3'}{|H|} \begin{pmatrix} I & W_c \\ W_c & -W_c^2 \end{pmatrix}$ 에 포함된  $W_c^2$ 항에 기인한다.

### 3.2 긴장력 크기에 따른 고유진동수의 변화

긴장력비	1차 모드 (rad/sec)	비율 (%)	2차 모드 (rad/sec)	비율 (%)
0	22.6505	0.00	89.8201	0.00
0.1	22.7826	0.58	90.2027	0.43
0.2	22.9138	1.16	90.5821	0.85
0.3	23.0440	1.74	90.9585	1.27
0.4	23.1733	2.31	91.3318	1.68
0.5	23.3016	2.87	91.7022	2.10
0.6	23.4291	3.44	92.0695	2.50
0.7	23.5558	4.00	92.4339	2.91
0.8	23.6816	4.55	92.7954	3.31
0.9	23.8065	5.10	93.1539	3.71
1.0	23.9306	5.65	93.5096	4.11

표 2 긴장력에 따른 고유진동수의 변화

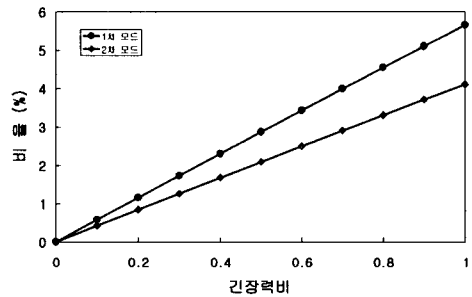


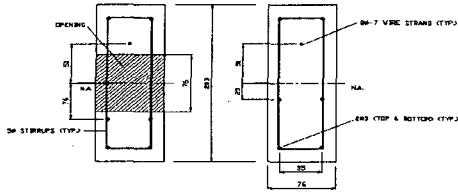
그림 4 긴장력비에 따른 고유진동수 변화 비율

긴장력의 증가에 따라 구조물의 고유진동수가 선형적으로 증가하고 있음을 보이고 있다. 이는 편심모멘트에 의한 추가의 강성을 도입하는 과정이 선형함수관계를 가지고 있기 때문이며 이러한 결과는 기존의 실험적인 연구의 결과들과도 유사한 경향을 보이고 있다.

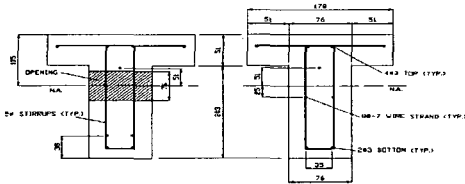
## 4. 기존 연구결과와의 비교

이 논문의 주된 관심인 프리스트레스에 의한 고유진동수의 변화에 관한 연구들 중 1996년 Nabil에 의해 수행된 실험적 연구결과와 이 논문에서 제안된 모델을 해석한 결과를 비교하여 보았다. Nabil의 실험은 보의 복부에 부분적으로 중공이 포함된 구조에 관한 것으로 실험에 사용된 단면은 그림 6과 같다. 이 시험체는 단면 형상에 관계없이 복부에 길이방향 0.4m, 높이 0.076m의 중공이 지간 중앙에 위치하였으며 긴장재는 직선으로

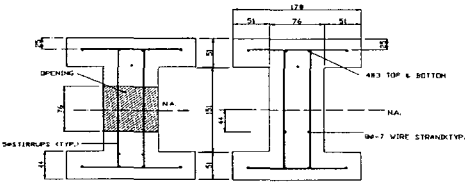
로 배치되어 있다.



(a) 구형 단면



(b) T형 단면



(c) I형 단면

그림 6 Nabil실험에 사용된 시험체 단면

실험에 사용된 시험체는 복부의 중공의 영향으로 강성에 비해 질량이 적은 구조이다. 긴장력의 증가에 따른 1차 모드 고유진동수의 증가율은 실험결과와 해석결과 간에 상당한 유사성을 보이고 있다. T형 단면은 구형 단면에 비하여 강성이 크고 질량은 작으므로 1, 2차 고유진동수가 실험과 해석결과 모두 증가 하였다. 구형 단면과 T형 단면에 비하여 I형 단면의 고유진동수가 증가가 크다. 실험결과와 해석결과가 비슷한 기울기를 가지며 증가하는 것을 3가지 단면의 해석결과 확인 할 수 있다.

#### 4. 결론

PSC 보의 긴장력이 보의 고유진동수에 미치는 영향을 고려하기 위하여 가상일의 원리를 이용하여 새로운 동적 평형방정식을 유도하였다. 유도된 식을 이용하여 유한요소 모델을 구성하였고 해석을 위한 프로그램을 작성하여 매개변수해석에 이용하였다. 이 논문에서는 앞서 언급하였듯이 축력에 대한 영향은 고려하지 않았다. 따라서 모든 경우에 고유진동수가 증가하였다. 임의의 20m 직사각형 단면 PSC 보에 대하여 매개변수 분석을 실시하였다. 사용된 모든 단면의 긴장재 배치는 포물선 배치이다. 매개변수 분석을 통하여 다음과 같은 결과가 도출되었다.

i) 일반적으로 긴장재의 긴장력이 커질수록 보의 고유진동수는 증가하게 된다.

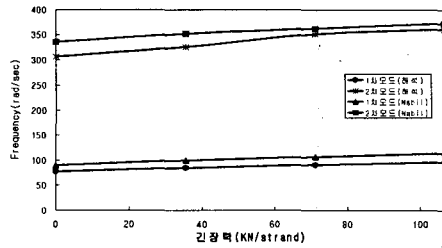


그림 9 Nabil의 실험결과와 해석결과의 비교(구형 단면)

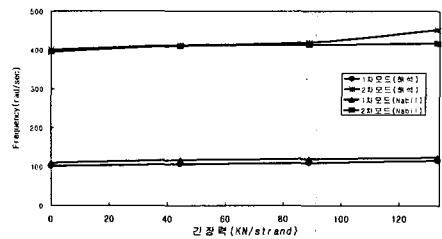


그림 8 Nabil의 실험결과와 해석결과의 비교(T형 단면)

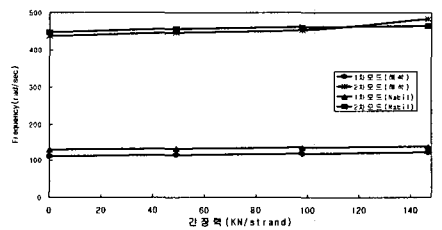


그림 9 Nabil의 실험결과와 해석결과의 비교(I형 단면)

ii) 포물선 배치된 긴장재의 시간 증앙에서의 편심이 증가할수록 보의 고유진동수는 증가한다.

이 논문에서 제안하고 있는 새로운 유한요소 모델은 기존의 실험적 연구결과와 비교하여 고유진동수 증가율 측면에서는 상당한 유사성을 보이고 있음을 확인하였다.

동적 하중에 민감한 철도 교량의 특성상 철도 교량의 고유진동수는 매우 중요하다. 설계기준에는 프리스트레스에 의한 고유진동수의 변화가 진동가속도에 미치는 영향에 대한 고려가 전혀 언급되지 않고 있다. 이 논문에 제안된 모델에 실제 차량하중을 재하시켜 시간이력해석을 수행한다면 외부 충격에 의해 구조물에 발생하는 실질적인 진동가속도를 정량화하여 평가하는 것이 가능할 것이다.

#### 참 고 문 헌

1. Dall'Asta, A., "On the coupling between three-dimensional bodies and slipping cables", Int. J. Solids Structures, Vol.33, No.24, 1996, pp.3587~3600
2. Dall'Asta, A., "Dynamics of elastic bodies prestressed by internal slipping cables", Int. J. Solids and Structures, Vol.37, 1997, pp.3421~3438
3. Dall'Asta, A. and Leoni, G., "Numerical analysis of thin walled beams with internal unbonded cables by the Ritz method" Int. J. Solids and Structures, Vol.35, 1997, pp.51~67
4. Dall'Asta, A. and Leoni, G., "Thin walled beams with internal unbonded cables: Balance conditions and stability" Int. J. Solids Structures, Vol.34, 1997, pp.4479~4498
5. Dall'Asta, A. and Leoni, G., "Vibrations of beams prestressed by internal frictionless cables" Journal of Sound and Vibration, 1999, pp.1~18
6. Dall'Asta, A., "Dynamics of elastic bodies prestressed by internal slipping cables" Int. J. Solids Structures, Vol.37, 2000, pp.3421~3438
7. Fabrizio Davi, "Dynamics of linear anisotropic rods." Int. J. Solids Structures, Vol.33, No.7, 1996, pp.917~929.
8. Nabil F. Grace and Brian Ross, "Dynamic characteristics of post-tensioned girders with web openings" Journal of structural engineering, Vol.122, 1996, pp.643~650.
9. Saiidi, M. and Douglas, B., "Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges" Journal of Structural Engineering, Vol.120, NO.7, 1994, pp.2233~2241.
10. T. Hop, "The effect of degree of prestressing and age of concrete beams on frequency and damping of their free vibration." Journal of the Materials and Structures, 1991, pp.210~220.
11. D. Hjelmstad, Keit, Fundamentals of structural mechanics, Prentice Hall, Singapore, 1997, p420
12. D. R. J. Owen, E Hinton, Finite Element Programming, Academic Press, London, 1997, p305
13. E. Malvern, Lawrence, Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice Hall. New Jersey, 1969, p713
14. K. Chopra, Anil, Dynamics of structures, Prentice Hall, New Jersey, 2000, p844
15. Karl F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications, New York, 1975, p649
16. Klaus-Jurgen Bathe, Finite element procedures, Prentice Hall, New Jersey, 1996, p1037
17. 신현목, 프리스트레스트 콘크리트, 동명사, 서울, 2004, p497.
18. 정재운, "주행열차 질량을 고려한 철도교량의 동적응답 해석기법 개발", 공학박사 학위논문, 인하대학교, 2004, p138.