

지반재료의 비등방경화 구성모델에 대한 응력적분 알고리즘

Stress Integration Algorithm for an Anisotropic Hardening Constitutive Model of Geomaterials

오 세 봉*
Oh, Seboong

이 진 구**
Lee, Jin-Gu

김 태 경***
Kim, Tae-Gyeong

ABSTRACT

A constitutive model was implemented in ABAQUS code. The constitutive equation can model the behavior for overall range of strain level from small to large deformation, which is based on anisotropic hardening rule and total stress concept. The formulation includes (1) finite strain formulation on the basis of Jaumann rate, (2) implicit stress integration and (3) consistent tangent moduli. Therefore the mathematical background was established in order that large deformation analysis can be performed accurately and efficiently with the anisotropic constitutive model. In the large deformation analyses, geometric nonlinearity was considered and the result of analyses with the proposed model was compared with that of Mises model for the overall strain range behavior.

1. 서 론

지반재료의 거동을 관찰하면, 미소변형률 영역에서 대변형률 영역의 거동이 모두 비선형적일뿐만 아니라 영향인자가 복잡하게 작용한다. 이러한 거동은 실제 지반공학문제에 반영되어 전체변형률 영역의 거동중 주요한 영향을 끼치는 부분이 대상문제에 따라 구분된다. 실험적인 자료 획득에 있어서는 미소변형률 영역의 거동을 측정하는 것이 까다로운 반면, 해석적인 측면에서는 대변형률 영역의 해석에 어려움을 겪는 실정이다. 본 연구는 전체변형률 영역의 거동을 획득하고 모델하는 분야에서 대변형률 해석과 관련된 부분에 속한다(오세봉 2002).

대변형도(finite strain) 연속체 역학의 관점에서 탄소성 구성관계는 응력속도에 따른 정식화를 하는 것이 편리하다. 본 연구에서는 가장 널리 사용되는 Jaumann 속도를 이용한 정식화를 수행한다.(Hughes, 1984, Lush et al., 1989) 그리고 응력속도에 근거한 구성관계를 수학적 정확도를 유지하도록 정식화하는 과정에서 내재적인 응력적분 알고리즘을 적용하였다. 반복적인 해풀이 과정에서 필요한 해의 수렴도를 확보하기 위하여 일관된 접선계수를 정식화하였다(Simo and Taylor, 1985).

이러한 수학적 정식화를 토대로 ABAQUS 코드(Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. 2001)의 사용자 서브루틴 UMAT에 이미 제안된 GUX 모델을 구현할 수 있었다 (오세봉, 2002). 그리고 이를 이용하여 연약지반 시험성토시 거동에 대한 대변형 해석을 수행하였다.

* 정희원 · 영남대학교 건설환경공학부 부교수

** (주) 특수건설

*** 영남대학교 건설환경공학부 석사과정

2. 대변형도 조건에 대한 탄소성 구성방정식

변형속도 텐서는 통상적으로 탄성량과 소성량으로 구분한다. (즉 $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$), 객관성(objectivity)을 만족하는 탄소성 응력-변형률 관계는 Jaumann 응력속도를 이용하여 다음식과 같이 나타난다.(Simo and Hughes 1998)

$$\overset{\vee}{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (1)$$

이 때 대변형도(finite strain) 조건에서 필요한 통상적인 부호규약에 대하여 다음과 같이 정리한다.

$\overset{\vee}{\mathbf{T}} \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$	Cauchy 응력 \mathbf{T} 에 대한 jaumann속도
$\dot{\mathbf{T}}$	Cauchy 응력 \mathbf{T} 의 물질도함수(material time derivative)
$\mathbf{L} \equiv \text{grad } \mathbf{v}$	속도 \mathbf{V} 의 공간구배(spatial gradient)
$\mathbf{D} \equiv \text{sym}(\mathbf{L})$	변형속도(deformation rate)텐서
$\mathbf{W} \equiv \text{skew}(\mathbf{L})$	스핀(spin)텐서

그리고 소성항 \mathbf{D}^p 는 미소변형 소성론에 근거한 유동규칙(flow rule)에 의하여 정의된다고 가정한다. 따라서 다음과 같이 Cauchy 응력에 의하여 정의할 수 있다.

$$\mathbf{D}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{T}} \quad (2)$$

한편 내부변수는 다음 식과 같은 형태로 일반화할 수 있다.

$$\dot{r} = h(r) \dot{\hat{\epsilon}}^p \quad (3)$$

여기서 $\dot{\hat{\epsilon}}^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \|\text{dev}(\mathbf{D}^p)\|$ 로서 삼축조건시 $\hat{\epsilon} = \frac{2}{3}(\epsilon_a - \epsilon_r)$ 이다. 축차응력 불변수(invariant) $q = \sigma_a - \sigma_r$ 에 상응하는 변형도 불변수이다.

비대칭 스핀 텐서 $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ 에 대하여 다음 식을 만족하는 회전 $\mathbf{Q}(t)$ 를 $[t_n, t_{n+1}]$ 구간에서 정의한다.

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}|_{t=t_n} = \mathbf{1} \quad (4)$$

이러한 \mathbf{Q} 에 의하여 변환된 대칭 2계 텐서 및 Cauchy 응력에 대한 물질 시간도함수를 이용하여 식 (1)~(3)는 다음과 같다 (Hughes, 1984),

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}} = \mathbf{C}^e : (\bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{D}}^p), \quad \bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}}, \quad \bar{\mathbf{N}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{T}}}, \quad \dot{r} = h(r) \dot{\hat{\epsilon}}^p \quad (5)$$

식 (5)는 증분형태의 구성관계로서 비선형 유한요소해석시 수치적분이 필요하다. n 번째 수렴한 후 $n+1$ 번째 현 시간단계내의 반복과정에서 식 (5)를 적분하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{T}}_{n+1} = \bar{\mathbf{T}}^n - \mathbf{C}^e : \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{\mathbf{D}}^p dt, \quad \bar{\mathbf{T}}^n = \mathbf{T}_n + \mathbf{C}^e : \int_{t_0}^{t_n} \bar{\mathbf{D}} dt \quad (6)$$

시도응력은 비선형 유한요소해석 절차에서 수렴된 단계의 응력과 반복과정중의 변형도에 의하여 정의되는 기지의 값이다. 따라서 식 (6)에서는 소성 변형속도의 적분만이 필요하다. 후진 Euler 절차에 의거하면 다음과 같이 유도된다.

$$\bar{\mathbf{T}}_{n+1} \cong \bar{\mathbf{T}}^n - \mathbf{C}^e : \Delta t (\bar{\mathbf{D}}^p)_{n+1} \quad (7)$$

여기서 $(\bar{\mathbf{D}}^p)_{n+1}$ 는 $\bar{\mathbf{T}}_{n+1}$ 에 의하여 기술되므로, 식 (6)이 내재적인(implicit) 함수임을 알 수 있다.

식 (7)은 $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ 변환계에서 적분한 것으로 미소변형도 조건의 내재적인 적분절차와 그대로 일치하고 있음을 알 수 있다(Hughes, 1984; 오세봉 2002). 이러한 적분절차를 구현하기 위하여 필요한 것은 유한요소해석 코드의 구성관계 서브루틴에서 입력과 출력을 적절하게 수학적 과정과 일치시키는 것이다. 본 연구에서는 범용해석코드 ABAQUS에 적합한 수학적 전개를 채택한다.

식 (7)을 Cauchy 응력으로 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}^r - \mathbf{C}^e : \{\Delta \mathbf{t}(\mathbf{D}^p)_{n+1}\} \quad (8)$$

여기서 새로운 시도응력의 정의는 다음과 같다.

$$\mathbf{T}^r \equiv \mathbf{Q}_{n+1} \bar{\mathbf{T}}^r \mathbf{Q}_{n+1}^T = \mathbf{T}_n^Q + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^Q, \quad \mathbf{T}_n^Q \equiv \mathbf{Q}_{n+1} \mathbf{T}_n \mathbf{Q}_{n+1}^T, \quad \Delta \mathbf{E}_{n+1}^Q = \mathbf{Q}_{n+1} \left\{ \int_n^{n+1} \bar{\mathbf{D}} dt \right\} \mathbf{Q}_{n+1}^T \quad (9)$$

식 (9)에 나타난 \mathbf{T}_n^Q 와 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^Q$ 는 변위를 계산하는 유한요소해법에서 응력적분절차의 입력으로 제공된다. 특히 ABAQUS에서는 \mathbf{Q}_{n+1} 이 Hughes-Winget(1980) 알고리즘에 의하여 결정되고 이에 따른 \mathbf{T}_n^Q 와 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^Q$ 를 사용자 서브루틴 UMAT에 입력으로 제공한다. 따라서 \mathbf{T}^r 을 쉽게 계산할 수 있다. UMAT에서의 출력은 Cauchy 응력과 상태변수들로 식 (8)에 나타난 내재적인 적분응력을 구하도록 코딩한다.

오세봉(2002)에 의하여 제안된 경계면과 항복면(그림 1)은 일반적인 응력장에 대하여 다음 식으로 나타난다.

$$F = (\mathbf{s}^* - \mathbf{b}) : (\mathbf{s}^* - \mathbf{b}) - R^2 = 0 \quad (10)$$

$$f = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) - r^2 = 0 \quad (11)$$

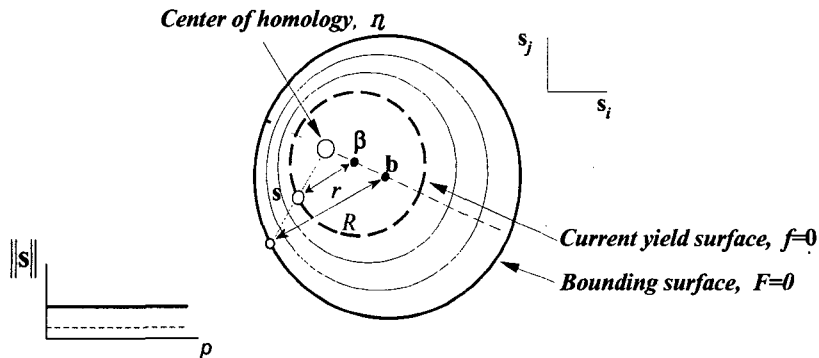


그림 1 경계면과 항복면

이 때 경계면과 항복면 중심응력 텐서 \mathbf{b} 와 $\boldsymbol{\beta}$ 는 축차항(deviator term)을 의미하며, r 은 항복면의 반경이며 R 은 경계면의 반경이다. 한편 상동응력 축차텐서는 $\boldsymbol{\eta}$ 이다. \mathbf{s}^* 는 \mathbf{s} 를 $\boldsymbol{\eta}$ 로부터 경계면상에 방사적으로 투사한 응력상태이다.

반면 지반재료는 축차변형에 대하여 매우 연약한 거동이 나타나므로, 역재하과정에서 항복면의 크기는 소성축차변형률에 의하여 나타날 수 있다고 가정하였다. 즉,

$$\tilde{\varepsilon}^p = a \frac{(r/R)^b}{(1-r/R)^c} \quad (12)$$

이 때 계수 a, b 및 c 는 경화함수에 사용되는 재료계수들이다. 그리고 $\tilde{\varepsilon}^p$ 는 $\dot{\varepsilon}^p$ 를 하나의 역재하과정 내에서 적분한 변형도 척도이다.

응력적분은 응력적분, 항복면 방정식, 경화함수를 내재적으로 연립하여 풀어야 한다. 그리고 비선형 계를 만족하는 해를 구하여야한다. 자세한 과정은 오세봉(2002)에 기술되어 있다. 지배식의 풀이과정에서 Newton 법의 점근적인 2차 수렴도를 유지하기 위하여 수치적으로 적분된 응력에 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)를 구하여 적용해야 한다 [Simo & Taylor(1985)]. ABAQUS의 UMAT 에 상응하는 접선계수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{C}_{n+1}^k = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k}{\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^e} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \hat{p}_{n+1}^k}{\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^e} + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^k}{\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^e} \quad (13)$$

여기서 위 식의 각 항은 오세봉(2002)에 수록되어 있다.

3. 예제해석

해석의 대상지반은 말레이시아 Muar평원의 연약지반 시험성토사레이다 ((MHA 1989, 오세봉 1999). 성토체의 제원은 폭 40m, 길이 60m로서 성토시 0.2m씩 주당 약 0.4m 속도로 급속하게 다짐 시공하였다. 그림 2는 해석 대상지반의 제원 및 요소망을 나타내며, 평면변형도 조건하의 8절점요소(CPE8)로 요소망을 설정하였다. 연약지반 요소는 초기응력이 없이 생성된다. 성토층은 층별로 생성하되 물체력(body force)에 하중-시간함수를 적용하여 각 층의 하중을 세분하도록 하였다. 그리고 성토층은 Drucker Prager 파괴규준을 적용하였고, 지반 요소는 GUX 모델 또는 Mises 모델을 각각 적용하였다.

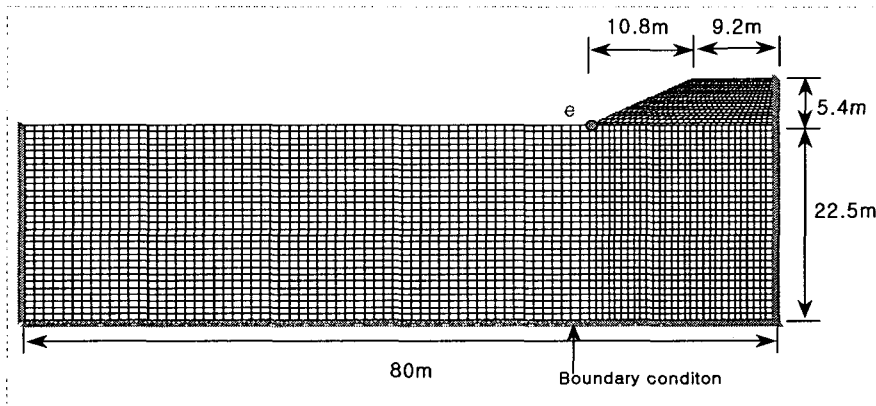


그림 2. 대상지반의 제원 및 요소망

해석시 지반의 물성은 MHA(1989)에 의하여 제공된 값을 사용하였으며 표 1에 정리하였다. 연약지 층은 비배수 전단강도에 따라 6개 지층으로 구분되었으며 각 층의 최대축차응력 q_{max} 가 Mises 모델과 GUX 모델의 입력치로 이용된다. Mises 모델의 경우에는 할선 Young 계수가 층별로 입력되고 GUX 모델은 q_{max} 로 규준화된 응력-변형도 관계가 일치하도록 계수를 설정하였다. 그리고 Poisson 비는 0.4999로 전응력 개념에 따른 비배수 조건을 모델하였다. 그림 3에서는 입력된 응력-변형률 관계를 비

교하고 있다.

그림 4에서 보여지듯이 체적력 재하과정에 따른 중심부 침하량을 비교하였다. 3가지의 경우에 대하여 하중 증분이 상이하게 입력한 해석결과 육안으로 확인하기 어려울 정도로 정확도를 확보할 수 있었다.

표 1. 지층 및 성토체의 재료계수

지 층	구 분	1	2	3	4	5	6
	Depth(m)	0 ~ 2	2 ~ 5	5 ~ 8	8 ~ 11	11~14	14 ~
	s_u (kPa)/ q_{max}	25/50	11.5/23	14/28	18/36	24/48	32/64
	Mises 모델, E_s (kPa)	25500	6600	8933	9120	6593	5884
	GUX 모델	a=0.0122, b=2.0714, c=0.3, $E=98000$ kPa, $\nu=0.4999$					
성토체	$E=5100$ kPa, $\nu=0.3$, $\gamma =20.5$ kN/m ³ , $c=30$ kPa, $\phi =37^\circ$						

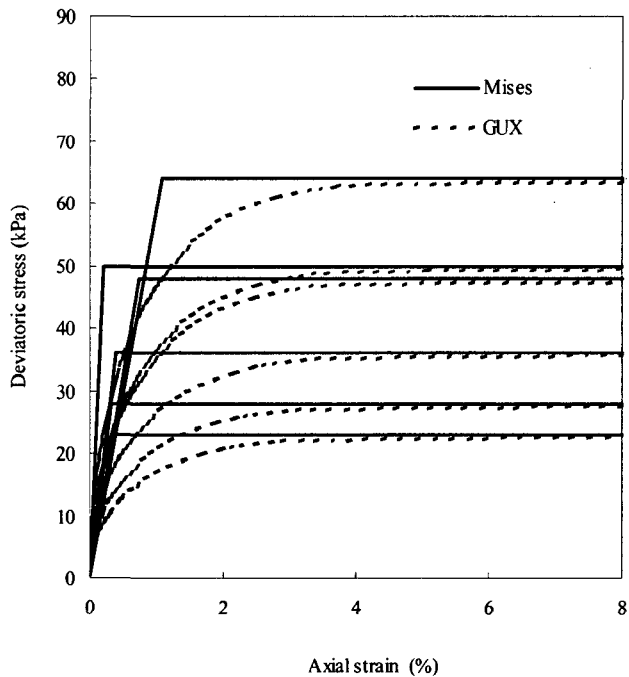


그림 3. 응력-변형도 관계

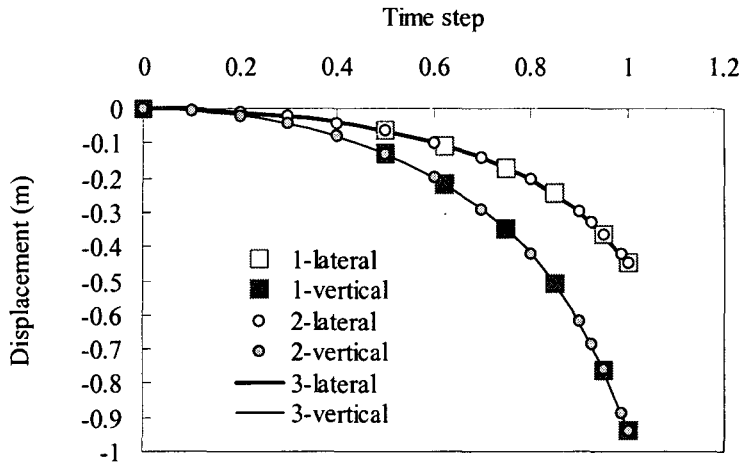


그림 4 정확도 해석

계측결과에 대하여 Mises규준의 해석과 GUX 모델의 해석 결과를 비교하여 분석하였다. 또한 미소 변형조건과 대변형조건의 해석 결과를 비교하였다. 그림 3은 성토고에 따른 변위를 나타낸 것이다. 그림 5에서는 성토체 중앙의 수직변위 결과로서 GUX 모델이 Mises 규준보다 변위를 크게 예측하였다. 또한 성토고 2m 이전에서는 미소변형도 조건의 변형계수를 적절하게 고려할 수 있는 GUX 모델이 침하량을 작게 계산하였다. GUX 모델은 미소변형도 조건에서 변형계수의 변화를 모델할 수 있는 특징이 있다 (오세봉, 1999). 계측치와 비교하여 보면 전반적으로 GUX 모델이 실제 침하량을 잘 예측할 수 있었다.

대변형에 따른 기하학적 비선형성을 고려한 경우에, 약 4m 성토시까지는 변위가 유사하게 나타나지만 그 이후에는 변위가 적게 일어난다. 이는 대변형 해석시 미소변형조건에서 나타나는 오차를 줄이거나 배제한 까닭이다. 특히 파괴에 이르는 성토고에서는 미소변형조건의 해석에서는 변위가 급작스럽게 일어나고 파괴시 성토고를 낮게 계산할 수 있다.

그림 6에서는 하중을 제거하고 다시 재하할 경우의 변위를 보여준다. GUX 모델은 비등방 경화 모델이므로 이러한 과정에서 나타나는 소성변형을 모델할 수 있었다.

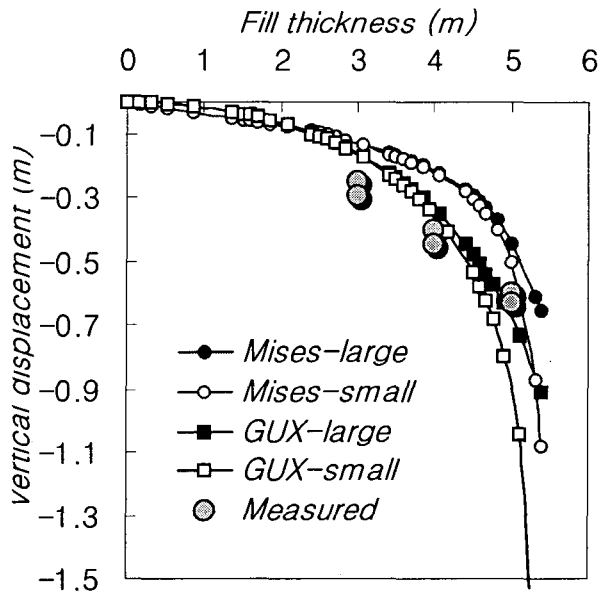


그림 5. 성토고에 따른 변위

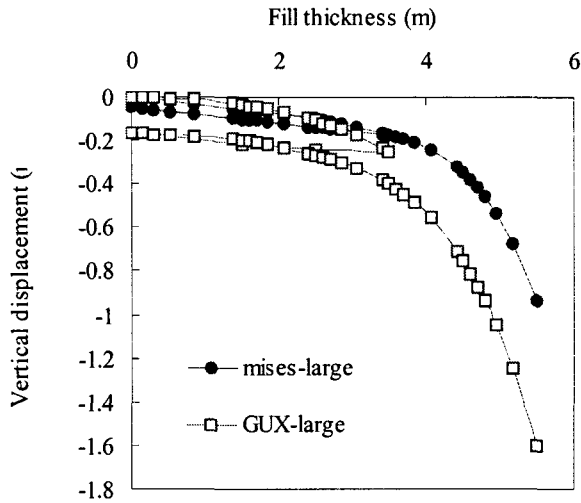


그림 6. 하중제거 및 재하시 변위

4. 결론

본 연구에서는 지반재료의 비등방경화 구성모델을 ABAQUS 코드에 구현하기 위한 정식화 과정을 기술하였다. 이를 위하여 (1) Hughes-Winget 알고리즘에 의하여 회전된 계에서 Jaumann 응력속도를 이용하여 대변형도 연속체 역학에 합당하도록 구성관계를 기술하였다. 그리고 (2) 해의 정확도를 확보하기 위하여 내재적 응력적분 기법을 정식화하고 (3) 비선형 지배식의 해 2차적 수렴도를 확보하기 위하여 일관된 접선계수를 정식화하였다. 이러한 정식화 과정은 ABAQUS 코드에서 제공하는 사용자 구성관계 서브루틴 UMAT에 합당하도록 이루어졌다. 그리고 본 논문의 정식화를 UMAT에 구현하여 비등방경화 탄소성 모델 GUX를 이용한 대변형 유한요소해석이 가능하도록 하였다.

그리고 연약지반에 성토시 거동에 대하여 ABAQUS를 이용한 대변형 해석을 수행하였다. 미소변형 조건 해석은 수학적인 오차로 인하여 변위를 과대평가하고 있음을 알 수 있었다. 또한 GUX 모델을 이용하여 실제 거동을 합리적으로 해석할 수 있었다.

참고문헌

1. 오세봉 (2002), "비등방경화 구성모델을 이용한 대변형 해석: I. 정식화", 한국지반공학회지, 제 18권 제 4 호
2. 오세봉(1999), 비등방경화 구성모델을 적용한 연약 지반의 비배수 거동 해석:II. 수치해석, 한국지반공학회지, 제 15권 제 3호, pp. 17~32.
3. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. (2001) ABAQUS/Standard User's Manual, version 6.2
4. Hughes, T. J. R. (1984). "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity," in Nemat-Nasser, S., Asaro, R.J. and Hegemier, G. A. (Eds.), Theoretical Foundation for Large-Scale Computation of Nonlinear Material Behavior, Martinus Nijhoff Publishers, Boston, 29-57

6. Lush, A. M., Weber, G. and Anand, L., (1989). "An Implicit Time-Integration Procedure for a Set of Internal Variable Constitutive Equations for Isotropic Elasto-Viscoplasticity," *International Journal of Plasticity*, 5, 521-549
7. MHA, Malaysian Highway Authority(1989), *Proceedings of the International Symposium on Trial Embankments on Malaysian Marine clays*, Kuala Lumpur, Vol.1
8. Simo, J. C. and Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*, Springer
9. Simo, J. C. and Taylor, R. L. (1985). "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,48, 101-118.