

3 차원 요소를 이용한 구조물의 위상 최적설계

Topology Design Optimization of Structures using Solid Elements

이 기 명*
Lee, Ki-Myung

조 선 호**
Cho, Seonho

ABSTRACT

In this paper, we develop continuum-based design sensitivity analysis (DSA) methods using both direct differential method (DDM) and adjoint variable method (AVM) for non-shape design problems. The developed DSA method is further utilized for the topology design optimization of 3-dimensional structures. In numerical examples, the analytical DSA results are verified using finite difference ones. The topology optimization method yields very reasonable results in physical point of view.

1. 서론

위상 최적설계는 비 형상 설계변수인 재료 물성치에 대한 설계민감도해석과 최적설계 기법을 이용하여 최적의 재료분포를 찾는 방법으로, 최근에는 정규재료밀도 함수를 이용한 밀도 방법 (Density Method)이 다루기 용이하여 널리 사용되고 있다. 본 연구에서는 유한요소법, 설계민감도 해석법, 최적설계 기법을 기반으로 제한된 재료량 내에서 가장 강한 강성을 갖는 3차원 구조물의 최적 위상을 찾는다. 최적설계의 구배(Gradient)가 되는 설계민감도는 선형 탄성체에 대한 변분 방정식으로부터 직접 미분법(Direct Differential Method) 혹은 에조인 변수법(Adjoint Variable Method)을 통해 얻게 되며 위상 최적설계 과정에서는 가장 효율적이라고 알려진 에조인 변수법을 사용한다.⁽¹⁾ 2장에서는 선형 탄성 문제에 대한 지배 방정식으로부터 약 형식(Weak Formulation)을 유도하고 유한요소해석을 위한 고체 요소를 정식화하였다. 3장에서는 연속체 기반의 직접 미분법과 에조인 변수법을 이용하여 설계민감도해석을 유도하였고, 4장에서는 설계민감도해석을 바탕으로 위상 최적설계 문제를 정식화하였다. 5장에서는 몇 가지 수치 예제를 통하여 유도된 설계민감도를 유한차분법(Finite Difference Method)을 통한 값과 비교 검증하였고, 위상 최적설계 예제를 통해 결과 형상의 타당성을 보였다.

2. 선형 탄성 문제의 지배방정식

2.1. 지배방정식과 변분식

그림 1에 나타난 공간상의 선형 탄성체 영역 Ω 를 고려하여 보자.

*학생회원, 서울대학교 조선해양공학과 석사과정

**정회원, 서울대학교 조선해양공학과 부교수

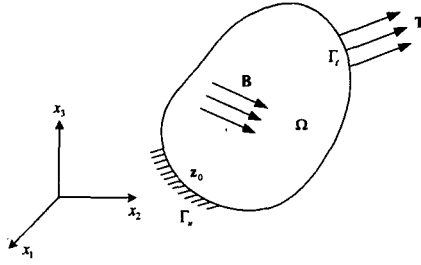


그림 1 공간상의 탄성체

여기서 Γ_t , Γ_u , \mathbf{T} , \mathbf{B} 는 각각 표면력(Traction) 경계, 변위 경계, 표면력, 체적력(Body Force Intensity)를 나타낸다. 두 가지 경계는 서로 겹치지 않으면서 ($\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$) 탄성체 영역의 경계를 구성한다고 가정하자($\Gamma_t \cup \Gamma_u = \partial\Omega$). 체적력에 의한 평형방정식의 강형식(Strong Form)은 아래와 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

여기서 σ 는 코시 응력(Cauchy Stress)이고, \mathbf{b} 는 체적력이다. 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}n_j = t_i \text{ on } \Gamma_t \quad (2)$$

$$z_i = z_i^0 \text{ on } \Gamma_u \quad (3)$$

다음과 같은 응력-변형률 관계(Stress-Strain Relation)를 이용하여 문제를 구성한다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{C} 와 ϵ 는 각각 탄성텐서(Elasticity Tensor)와 변형률을 의미한다.

가상일의 원리와 균일 경계조건을 만족하는 영역 \bar{Z} 에 속하는 가상 변위 $\bar{\mathbf{z}}$ 및 경계조건을 이용해서 식(1)을 약형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{Find } \mathbf{z} \in Z \text{ such that } a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = l(\bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \bar{Z} \quad (5)$$

여기서 $a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ 와 $l(\bar{\mathbf{z}})$ 는 각각 변형에너지 형식(Bilinear Strain Energy Form)과 하중 형식(Linear Load Form)을 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{z})\epsilon_{ij}(\bar{\mathbf{z}})d\Omega \quad (6)$$

$$l(\bar{\mathbf{z}}) = \iiint_{\Omega} b_i\bar{z}_i d\Omega + \iint_{\Gamma_t} t_i\bar{z}_i d\Gamma, \quad (7)$$

2.2. 유한요소 정식화

평형방정식에서 유도된 지배방정식의 약 형식을 이용하여 유한요소해석에 사용될 고체요소(Solid Element)를 정식화한다. 고체요소는 Isoparametric Mapping 개념의 8절점 육면체 요소(8-node Hexahedral Element)이며 C^0 조건을 만족하는 형상함수 N_i 을 사용하여 변위와 가상 변위를 나타내면 아래와 같다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{d}} \quad (8)$$

여기서 \mathbf{d} 는 고체요소의 모든 절점에서 각 방향의 변위를 나타내는 변위벡터이다. 또 파라미터 좌표계(Parametric Coordinates)와 실제 좌표계 간의 미분 관계를 이용하여 정리하면, 변위-변형률 관계 행렬(Displacement-Strain Relation Matrix) \mathbf{B} 를 구성하고 이를 통해 변형률과 가상 변형률을 다음처럼 기술할 수 있다.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}, \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{d}} \quad (9)$$

식(9)와 식(10)을 약 형식의 각 항인 식(7)과 식(8)에 대입하여 이산화한다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \bar{\mathbf{z}}^T \left[\sum_{m=1}^{NE} \iiint_{\Omega^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} d\Omega^{(m)} \right] \mathbf{z} \quad (10)$$

$$l(\bar{\mathbf{z}}) = \bar{\mathbf{z}}^T \left[\sum_{m=1}^{NE} \left(\iiint_{\Omega^{(m)}} \mathbf{N}^{(m)T} \mathbf{b}^{(m)} d\Omega^{(m)} + \iint_{\Gamma_i^{(m)}} \mathbf{N}^{(m)T} \mathbf{h}^{(m)} d\Gamma_i^{(m)} \right) \right] \quad (11)$$

여기서 \mathbf{z} 는 요소 변위벡터 \mathbf{d} 를 전체 영역에 걸쳐 조합(Assemble)한 전역 변위벡터이며, 위 첨자 m 은 m 번째 요소에 해당하는 성분을 지시한다. 가상 변위 $\bar{\mathbf{z}}$ 를 소거하여 유한요소 방정식을 완성하면 식(10)의 중괄호 내의 항이 전역 강성 행렬(Global Stiffness Matrix)이 된다.

3. 연속체 기반의 설계민감도해석

3.1. 직접미분법(Direct Differentiation Method)

설계 변수를 \mathbf{u} 라고 정의하였을 때, 미소 설계변경(Perturbed Design) $\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}$ 에 대해서 변분 방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{a}_{\mathbf{u}+\tau\delta\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = l_{\mathbf{u}+\tau\delta\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (12)$$

식(6)의 1차 변분식에서 설계변수에 대한 명시적 종속 부분(Explicit Dependence Term)을 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{a}'_{\delta\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \equiv \left. \frac{d}{d\tau} \mathbf{a}_{\mathbf{u}+\tau\delta\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) \right|_{\tau=0} \quad (13)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{z}}$ 는 에너지 식의 변분에서 \mathbf{z} 의 설계변수에 대한 종속성을 고려하지 않은 것으로 변분이 에너지 식 자체에 대해서만 수행됨을 의미한다. 식(7)의 하중 형식에 대한 1차 변분도 같은 방식으로 정의하면 다음과 같다.

$$l'_{\delta\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{z}}) \equiv \left. \frac{d}{d\tau} l_{\mathbf{u}+\tau\delta\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{z}}) \right|_{\tau=0} \quad (14)$$

또한 변분 방정식의 해인 \mathbf{z} 에 대한 1차 변분도 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{z}' \equiv \left. \frac{d}{d\tau} \mathbf{z}(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}) \right|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{z}(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}) - \mathbf{z}(\mathbf{u})}{\tau} \quad (15)$$

식(13)과 (15)를 이용하면 변형에너지 형식의 1차 변분은 다음과 같다.

$$\left. \frac{d}{d\tau} [\mathbf{a}_{\mathbf{u}+\tau\delta\mathbf{u}}(\mathbf{z}(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}), \bar{\mathbf{z}})] \right|_{\tau=0} = \mathbf{a}'_{\delta\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + \mathbf{a}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}) \quad (16)$$

식(14)와 (16)을 이용해서 식(12)의 1차 변분을 구하면 다음과 같은 설계민감도 식을 얻는다.

$$a_u(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}) = l'_{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{z}}) - a'_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (17)$$

일반적인 구조응답을 나타내기 위하여 아래와 같은 적분식을 고려하자.

$$\psi = \iiint_{\Omega} g(\mathbf{z}, \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}) d\Omega \quad (18)$$

식(18)의 1차 변분은 라이프니츠 법칙(Leibniz's Rule)과 미분의 연쇄법칙에 의하여 다음과 같이 유도된다.

$$\psi' = \frac{d}{d\tau} \left[\iiint_{\Omega} g(\mathbf{z}(\mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}), \nabla \mathbf{z}(\mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}), \mathbf{u} + \tau \delta \mathbf{u}) d\Omega \right]_{\tau=0} = \iiint_{\Omega} [g_z \mathbf{z}' + g_{\nabla z} \nabla \mathbf{z}' + g_u \delta \mathbf{u}] d\Omega \quad (19)$$

여기에서 각각 $g_z = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}}$, $g_{\nabla z} = \frac{\partial g}{\partial \nabla \mathbf{z}}$, $g_u = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}$ 를 의미한다. 다시 말해, 식(17)에 의해 \mathbf{z}' 를 찾으면 식(17)을 통해 응답함수의 설계민감도를 쉽게 얻을 수 있다.

3.2. 예조인 변수법(Adjoint Variable Method)

식(19)의 \mathbf{z}' 을 균일 경계조건을 만족하는 가상변위 $\bar{\lambda}$ 로 변경한 예조인 하중을 정의하면 예조인 응답값인 λ 에 대한 예조인 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \iiint_{\Omega} [g_z \bar{\lambda} + g_{\nabla z} \nabla \bar{\lambda}] d\Omega, \quad \forall \bar{\lambda} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (20)$$

$\bar{\lambda} \in \bar{\mathbf{Z}}$ 이고 또한 $\mathbf{z}' \in \bar{\mathbf{Z}}$ 이므로 $\bar{\lambda}$ 를 \mathbf{z}' 로 치환하면 식(20)은

$$a_u(\lambda, \mathbf{z}') = \iiint_{\Omega} [g_z \mathbf{z}' + g_{\nabla z} \nabla \mathbf{z}'] d\Omega \quad (21)$$

가 되며 $\lambda \in \bar{\mathbf{Z}}$ 이고 또한 $\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}}$ 이므로 식(17)에서 $\bar{\mathbf{z}}$ 를 λ 로 치환하면 다음을 얻는다.

$$a_u(\mathbf{z}', \lambda) = l'_{\bar{\mathbf{u}}}(\lambda) - a'_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{z}, \lambda), \quad \forall \lambda \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (22)$$

변형에너지 형식 $a_u(\bullet, \bullet)$ 은 각각의 변수에 대하여 선형적이므로 식(21)와 (22)는 동일하다.

$$\iiint_{\Omega} [g_z \mathbf{z}' + g_{\nabla z} \nabla \mathbf{z}'] d\Omega = l'_{\bar{\mathbf{u}}}(\lambda) - a'_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{z}, \lambda) \quad (23)$$

식 (23)을 식(19)에 대입하면, 응답함수의 설계변수 \mathbf{u} 에 관한 1차 변분식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\psi' = \iiint_{\Omega} g_u \delta \mathbf{u} d\Omega + l'_{\bar{\mathbf{u}}}(\lambda) - a'_{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{z}, \lambda) \quad (24)$$

여기에서 중요한 것은, 식(19)는 계산 수행에 많은 비용이 들어가는 변위에 대한 민감도 (Displacement Design Sensitivity)를 요구하는 반면, 식(22)은 본래의 구조해석 결과와 예조인 결과만 있으면 응답함수의 민감도를 구할 수 있다는 것이다. 따라서 본 논문에서는 이러한 장점을 갖는 예조인 방법을 이용하여 설계변수에 대한 구조적 응답함수의 민감도를 구하게 된다.

4. 위상 최적설계의 정식화

위상 최적설계는 초기설계에서 구조물의 강성을 최대화하는 최적의 재료분포를 구하는 기법이다. 목적함수로는 구조물의 컴플라이언스(Compliance)로 두고 제한조건으로는 사용재료량으로 설정할 수 있으며 설계변수로는 정규화된 상대 재료밀도(Relative Material Density) $\rho(\mathbf{x})$ 로 두어 구조물의 재료분포를 나타내었다. 상대 재료밀도 $\rho(\mathbf{x})$ 가 1.0이면 재료가 분포되어 있는 상태(Solid), 0이면 재료가 없는 상태(Void)를 의미한다. 선형 탄성문제에 관하여, 위상 최적화 문제를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\text{Minimize } \Pi = \iiint_{\Omega} b_i z_i(\rho) d\Omega + \iint_{\Gamma_t} t_i z_i(\rho) d\Gamma_t \quad (25)$$

$$\text{Subject to } \iiint_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_{\text{allowable}} \quad (26)$$

여기서 Π , $V_{\text{allowable}}$ 과 ρ 는 각각 컴플라이언스, 가용 재료량, 상대 재료밀도를 가리킨다. 설계변수인 재료분포는 다음과 같이 SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization) 방법을 이용하여, 각 요소에 대해 상대 재료밀도와 재료 물성치로 표현할 수 있다.

$$E_i = \rho_i^n E_0 \quad (i = 1, 2, \dots, NE) \quad (27)$$

여기서 E_0 는 실제 재료의 Young's Modulus이다. n 은 재료분포 형태에 관련되는 집중계수(Penalty Parameter)로서 1인 경우는 선형분포를 의미한다. 상대 재료밀도는 수치적인 특이성(Numerical Singularity)을 피하기 위하여 재료의 하한 ρ_{\min} 을 도입한다.

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \quad (28)$$

어드조인트 방법을 통해 목적함수인 구조물의 컴플라이언스의 설계민감도를 구하기 위해 변형에너지 형식의 재료 물성치에 관한 1차 변분을 구해보면 다음과 같다.

$$a'_{\alpha}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \iiint_{\Omega} C'_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{kl}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (29)$$

외력은 설계변수인 재료 물성치에 독립적이므로 식 (24)에서 컴플라이언스의 설계 민감도는 다음과 같이 유도된다.

$$\psi' = \iiint_{\Omega} g_{\alpha} \delta u d\Omega - \iiint_{\Omega} C'_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{z}) \varepsilon_{kl}(\lambda) d\Omega \quad (30)$$

5. 수치 예제

다음 그림과 같은 수치 예제 모델을 설정하자. 두 모델 모두 2000개의 고체 요소로 이루어져 있으며 탄성계수는 $E = 2.1 \times 10^{11} (N/m^2)$, 푸아송비(Poisson's Ratio)는 0.3이다.

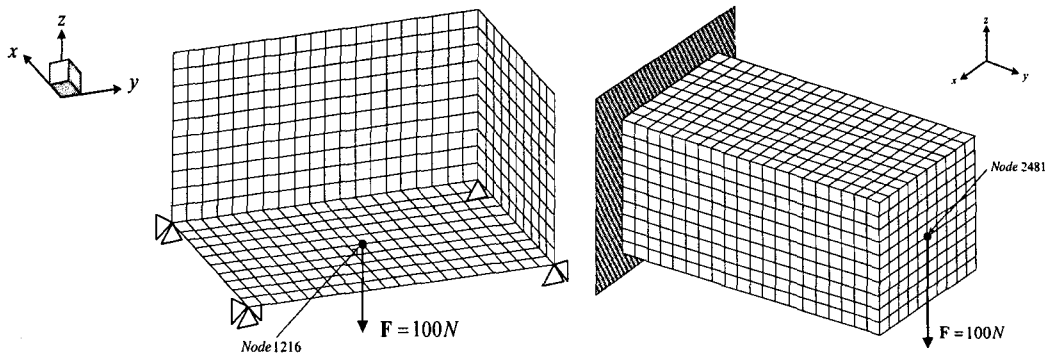


그림 2 수치 예제 모델 (A: 단순 지지 보, B: 외팔보)

5.1. 설계민감도해석

3장에서 전개한 설계민감도 해석법이 3차원 고체 요소를 이용한 구조물에서 얼마나 정확성을 갖는지 살펴보자. 예조인 방법을 통해 해석적인 설계민감도를 구하고 유한차분법을 이용하여 검증한다. 그림 2(A)의 밑면 중심에 아래 방향으로 하중이 가해지는 단순 지지 보를 고려해보자. 그림 3에는 설계변수인 상대 재료밀도에 대한 컴플라이언스의 설계 민감도가 구조물 외면에 걸쳐 도시되어 있다. 푸른색 계열일수록 음의 방향으로 민감도 값이 크며, 이는 이곳에 재료를 배치하면 컴플라이언스의 감소가 더욱 급격하게 일어남을 의미한다. 설계 민감도가 최적화의 방향을 지시해주는 구배 역할을 하고 있음을 가사적으로 확인할 수 있다.

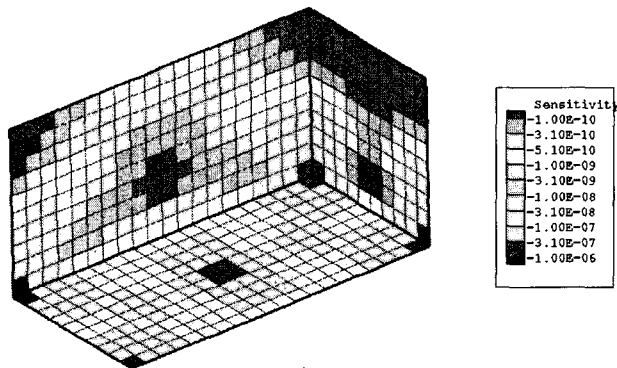


그림 3 상대 재료밀도에 대한 컴플라이언스의 설계민감도

표 1에는 임의로 선택한 몇 개 요소의 상대 재료밀도 ρ_i 에 대한 컴플라이언스의 설계 민감도가 제시되었다. $d\Pi/d\rho_i$ 는 예조인 방법을 사용하여 구한 해석적인 설계 민감도이며 $\Delta\Pi/\Delta\rho_i$ 는 유한차분법으로 구한 설계 민감도를 의미한다. 마지막 열에서 보듯이 해석적인 민감도와 유한차분 민감도가 잘 일치함을 알 수 있다. 예조인 방법의 계산 시간은 평균 3.9568×10^{-3} 초가 걸리는데 비해 유한차분법(Central Finite Difference 기준)은 평균 105.6439초가 걸려 예조인 방법의 정확성을 동반한 상당한 효율성을 보여준다.

표 1 컴플라이언스의 설계 민감도 비교

설계변수	$\frac{d\Pi}{d\rho_i}$ (해석적)	$\frac{\Delta\Pi}{\Delta\rho_i}$ (유한차분)	$\frac{\Delta\Pi}{\Delta\rho_i} / \frac{d\Pi}{d\rho_i}$
ρ_{27}	$-3.03043771 \times 10^{-10}$	$-3.03043856 \times 10^{-10}$	100.00003 (%)
ρ_{341}	$-9.21195337 \times 10^{-10}$	$-9.21194986 \times 10^{-10}$	99.99996 (%)
ρ_{731}	$-1.56847095 \times 10^{-10}$	$-1.56846925 \times 10^{-10}$	99.99989 (%)
ρ_{1258}	$-3.99204559 \times 10^{-10}$	$-3.99204241 \times 10^{-10}$	99.99992 (%)
ρ_{1573}	$-3.49321835 \times 10^{-10}$	$-3.49321650 \times 10^{-10}$	99.99995 (%)
ρ_{1906}	$-8.05713201 \times 10^{-10}$	$-8.05713200 \times 10^{-10}$	100.00000 (%)

5.2. 위상 최적설계

외력에 의한 구조물의 위상 최적설계 결과 형상을 몇몇 예제를 통해 나타내었다. 3차원 형상을 나타내기 위하여, 부재간의 연결성이 잘 드러날 수 있는 상대 재료밀도 등위면(Iso-Surface)으로 형상 가시화를 하였다. 먼저 그림 2(A)에서 보인 단순 지지 형태의 모델을 생각해보자. 모든 경계 조건과 하중 조건 및 재료 물성치는 앞서 설명한 것과 동일하다. 설계변수는 상대 재료밀도이며, 집중계수는 3이고 가용 재료비율 30%와 10%에서 최적화하였다. 연결성을 잘 드러낼 수 있는 등위면을 선택하였기 때문에 아래의 형상이 완전한 모양은 아니지만, 가용 부피가 작은 그림 4(b)의 결과가 비교적 연결성을 더 확실하게 보여주고 있다. 두 결과 모두 호(Arc) 형상이 추가된 결과로 보여주며, 가운데의 부재 연결도 하중이 가해지는 가운데 부분의 강성을 높이는 형태임을 알 수 있다.

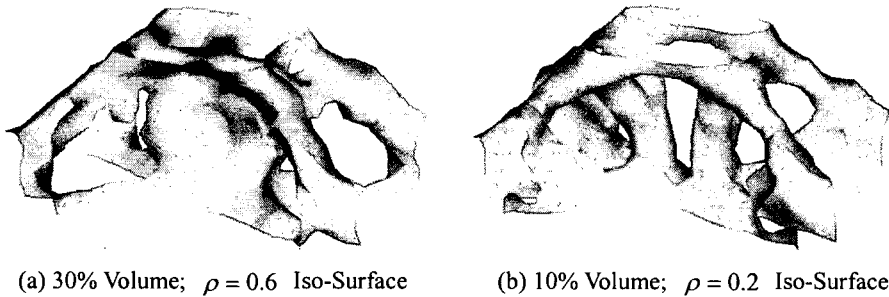
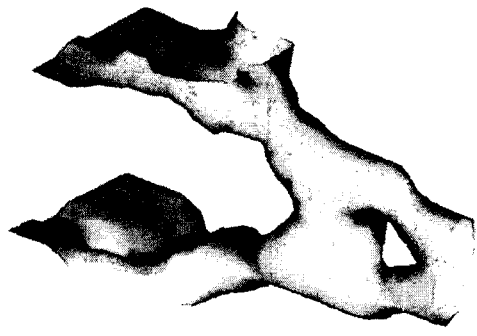


그림 4 단순 지지 보의 위상 최적설계 결과

그림 2(B)에서 보인 외팔보를 고려해보자. 직육면체 보의 한 면이 고정되어 변위를 발생시킬 수 없으며, 고정된 반대 면의 가운데 절점에 아래 방향으로 하중이 가해진다. 설계변수는 상대 재료 밀도이며, 집중계수는 3이고 가용 재료비율 30%와 10%에서 최적화하였다. 구조물 내부의 연결성을 잘 드러내기 위해 가용 재료비율을 10%로 줄였지만 그림 5(b)의 30% 가용 재료 상태처럼 안정적인 연결성을 보여주지는 못한다. 적절한 연결성을 위해 일정량 이상의 재료가 필요함을 짐작할 수 있다. 응력이 많이 걸리는 윗면과 아랫면 부분에 재료가 많이 분포되어 정면의 모양이 I 형태를 띠며, 측면에서는 강성을 높이기 위한 X 모양의 트러스(Truss) 형태 부재배치가 주를 이룬다.



(a) 30% Volume; $\rho = 0.6$ Iso-Surface



(b) 10% Volume; $\rho = 0.2$ Iso-Surface

그림 5 외팔보 모델의 위상 최적설계 결과

6. 결론

3차원 선형 탄성 구조물의 구조해석을 위하여 에너지 원리로부터 유한요소 식을 유도하고 3차원 솔리드 요소를 정식화하였다. 또한 선형 탄성 구조물에 대하여 설계민감도해석을 유도하였다. 변형에너지 형식, 하중 형식과 구조적 응답에 대한 1차 변분식을 유도하여 연속체 기반의 설계 민감도를 유도하였다. 유도된 해석적인 설계민감도를 바탕으로 위상 최적설계를 수행하여 최대 강성을 갖는 최적의 부재배치를 살펴보았다. 이러한 방법론은 3차원 구조물 부재의 초기 배치 문제에 있어서 설계자의 직관이 아닌, 보다 해석적으로 강건한 개념에 의한 설계를 제공한다. 그리고 3차원에 적용된 위상 최적설계 기법은 실제 설계 상황에서, 보다 직접적으로 최적화된 형상을 지닌 구조 부재를 설계할 수 있는 가능성을 제시한다.

참고 문헌

1. Edward J. Haug, Kyung K. Choi, and Vadim Komkov, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York, 1986
2. Klaus-Jürgen Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., 1996.
3. Martin P. Bendsøe and Ole Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer, 2003.
4. Robert D. Cook, Davis S. Malkus, Michael E. Plesha, and Robert J. Witt, *Concepts and Application of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
5. 하윤도, 박주호, 조선희, “위상최적화 기법을 이용한 인력선의 구조설계,” *대한조선학회 2002년도 추계학술대회 논문집*, 2002.
6. Irving H. Shames and Clive L. Dym, *Energy and Finite Element Method in Structural Mechanics*, Hemisphere Publishing Corporation, 1985.