

기하학적으로 정확한 쉘 요소의 NLib에 의해 생성된 NURBS 곡면에서의 적용

The application of geometrically exact shell element to NURBS generated by NLib

최진복*
Choi, Jin-Bok

노희열*
oh, Hee-Yuel

조맹효**
Cho, Maenghyo

ABSTRACT

In this study, we implement a framework that directly links a general tensor-based shell finite element to NURBS geometric modeling. Generally, in CAD system, the surfaces are represented by B-splines or non-uniform rational B-spline(NURBS) blending functions and control points. Here, NURBS blending functions are composed by two parameters defined in local region. A general tensor-based shell element also has a two-parameter representation in the surfaces, and all the computations of geometric quantities can be performed in local surface patch. Naturally, B-spline surface or NURBS function could be directly linked to the shell analysis routine.

In our study, we use NLib(NURBS library) to generate NURBS for shell finite analysis. The NURBS can be easily generated by interpolating or approximating given set of data points through NLib.

1. 서론

셸(shell)은 곡률을 가지는 얇은 구조물로 정의되며, 자동차, 항공기 그리고 선박을 비롯하여 건축물의 아치(arch)또는 돔(dome) 등과 같이 공간을 효율적으로 활용함과 동시에 경량화가 요구되는 분야에 널리 사용되는 구조물이다. 그러나 셸은 그 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로 셸 문제를 접근하는 것은 까다롭다. 따라서 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대하여 강력하게 적용할 수 있는 도구인 유한요소법이 셸의 수치해석에 적합하며 이에 관련한 연구들이 지난 수십 년 간 활발히 진행되어 왔고 현재도 많은 연구가 진행 중이다.

Ahmad⁽¹⁾ 등이 감절점 셸요소(degenerated shell element)를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 셸을 해석 하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 감절점 요소 개발이 관심을 모았으나, 감절점 요소는 요소 내에서의 기하학적인 셸의 형상을 근사를 통하여 보간 하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 셸을 해석하는 데는 한계가 있다. 그러므로 정확한 기하학적 형상을 고려한 셸 이론에 근거한 유한요소의 개발이 수행되어 왔다.

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

** 정희원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

한편, 최근 CAD(Computer Aided Design) 시스템에 사용되는 곡면의 기하학적 모델링은 대부분 NURBS (Non Uniform Rational B-Spline Surface)를 사용하여 수행되어지고 있다. 일반적으로 NURBS를 사용하면 곡면은 2개의 매개변수로 나타낼 수 있고, 일반 곡선좌표계에서 주어지는 쉘 유한요소 또한 2개의 매개 변수로 일반 곡면을 표시하기 때문에 CAD에서 주어지는 곡면 표현식과 동일하여 직접적인 연동이 가능하게 된다. 즉 CAD 시스템에서 얻은 쉘 형상의 기하학적인 모델링을 쉘 구조물의 유한요소 해석 루틴과 연결하는 것이 가능해지며 모든 기하학적인 계산은 NURBS방법에 의해 얻은 국지 접선 표면에서 이루어진다. 본 연구자들에 의해 쉘 곡면의 기하 정보를 정확히 적용할 수 있는 쉘 요소가 개발되었고⁽²⁾ 이 쉘 요소를 B-스프라인 곡면과 연동시켰으며⁽³⁾ B-스프라인 환경 하에서 곡면 모델링과 해석을 통합한 연구를 발표하였다⁽⁴⁾. 또한 유한요소의 절점의 위치를 변경하여 해의 정밀도를 향상시키는 r-adaptivity방법에 대한 연구도 수행되었다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 쉘의 기하학적 모델링과 쉘의 유한요소 해석을 연동할 수 있는 프레임 워크를 상용 소프트웨어 라이브러리 환경을 이용하여 개발하고자 한다. 기하학적 쉘의 형상을 NURBS 곡면으로 모델링하기 위하여 그 정확성과 유용성이 검증된 라이브러리인 Solid Modeling Solutions, Inc (SMS)의 NLib™(NURBS Library)⁽⁶⁾를 사용하였으며, 이를 통하여 일반 좌표계에기초한 쉘 유한요소와 NURBS 곡면을 기반으로 통합된 설계 프레임워크는 모델링 부분에서 생성한 기하정보를 해석부분에서 그대로 사용하며, 모델이 변형된 후에도 유한요소 격자를 새로 생성하지 않고 기존의 격자를 그대로 사용하므로 일반적으로 여러 차례 반복 시행하는 모델링과 해석에서의 계산 비용을 크게 절감할 수 있다.

2. Naghdi 쉘 이론과 유한요소

2.1 Naghdi 쉘 이론

일반 곡선좌표계와 텐서에 기초한 쉘 이론에서는 일반적으로 변형률 텐서를 다음과 같이 나타낸다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma_a = 2E_{\alpha 3} = (g_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \quad (1)$$

변형률 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 그림 1은 본 연구에서 사용되는 변형전과 변형후의 쉘의 기하학적인 형상을 나타낸다. 일반좌표계에 기반을 둔 텐서에 대한 기초는 참고문헌^{(7),(8)}에서 확인할 수 있다.

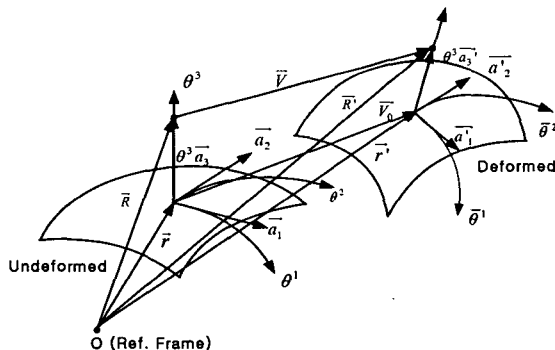


그림 1 변형전과 변형후의 쉘의 기하학적 형상

2.2 혼합 가정 변형률 범함수

Naghdi 쉘에 기초한 유한요소 해석에서 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 발생하는 잠김현상을 해결하기 위해 가정된 변형률장을 사용하고 잠김을 효과적으로 억제하는 부분 혼합 변분 범함수를 도입한다. 본 연구에서 전단 변형률과 인장 변형률을 변분 변형률 매개변수로 도입한다. 변분 범함수의 자세한 내용은 참고문헌⁽²⁾을 참조할 수 있다.

2.3. 유한요소 정식화

유한요소 정식화를 위한 변위와 변형률 가정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (u_a, w, \psi_a) &= \sum (u_{ai}, w_i, \psi_{ai}) N_i + (u_a, w, \psi_a)_b N_b \\ (\varepsilon_a, \gamma_a) &= (P_1 \vec{\alpha}, P_2 \vec{\beta}) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 N_i 는 형상함수, N_b 는 거품함수 형태의 형상함수이고, P_1, P_2, α, β 는 가정된 변형률장과 그 매개 변수이다. 자세한 내용은 참고문헌⁽⁴⁾을 참고할 수 있다.

부분 혼합 범함수와 가정된 변형률 매개변수를 이용하여 유한요소 이산화를 수행하면 이산화 된 범함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi(\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2} \vec{d}^T K_b \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T H_m \vec{\alpha} + \vec{\alpha}^T G_m \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{\beta}^T H_v \vec{\beta} + \vec{\beta}^T G_v \vec{d} - \vec{d}^T \cdot f \quad (3)$$

$$\text{여기서 } K_b = \int_{\Omega} B_b^T D_b B_b \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2, \quad H_m = \int_{\Omega} P_1^T D_m P_1 \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2, \quad G_m = \int_{\Omega} P_1^T D_m B_m \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2$$

$$H_v = \int_{\Omega} P_2^T D_v P_2 \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2, \quad G_v = \int_{\Omega} P_2^T D_v B_v \sqrt{a} d\Theta^1 d\Theta^2 \text{이고, } \vec{f} \text{는 외력에 의해 요소에 가해지는 하중}$$

벡터, \vec{d} 는 요소 절점 변위 벡터, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 는 미지 변형률 벡터이다. 문자에 사용한 하첨자 m, b, v 는 각각 멤브레인, 굽힘, 전단 변형을 표시한다.

요소의 자유도 벡터는 절점의 자유도와 일반적인 쉘 곡면의 접평면에서 2개의 곡면의 접선방향 변위(u_a)와 수직변위(w), 2개의 회전각변위(ψ_a)로 표시된다.

$$\vec{d} = [(u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)_1, \dots, (u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2)_n, (u_b, u_b, w_b, \psi_b, \psi_b)]^T \quad (4)$$

여기서, 4절점 요소의 경우는 $n=4$ 이다.

$\vec{d}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 에 대한 변분을 취함으로써 다음과 같은 요소 평형 방정식을 얻는다.

$$K^e \vec{d} = \vec{f} \quad (5)$$

여기서 요소 강성 행렬 K^e 는 다음과 같이 표현된다.

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_v^T H_v^{-1} G_v \quad (6)$$

3. NURBS 곡면의 표현

개발된 쉘 유한요소와 CAD에서의 기하학적 곡면 모델링의 연동을 위해서 NURBS 곡면을 구성해야 한다. 본 절에서는 그 방법에 대해 간략히 설명한다. 자세한 내용은 참고 문헌에서 찾을 수 있다⁽⁹⁾

3.1 NURBS 곡면의 정의

일반적으로 NURBS는 식(7)로 정의 된다.

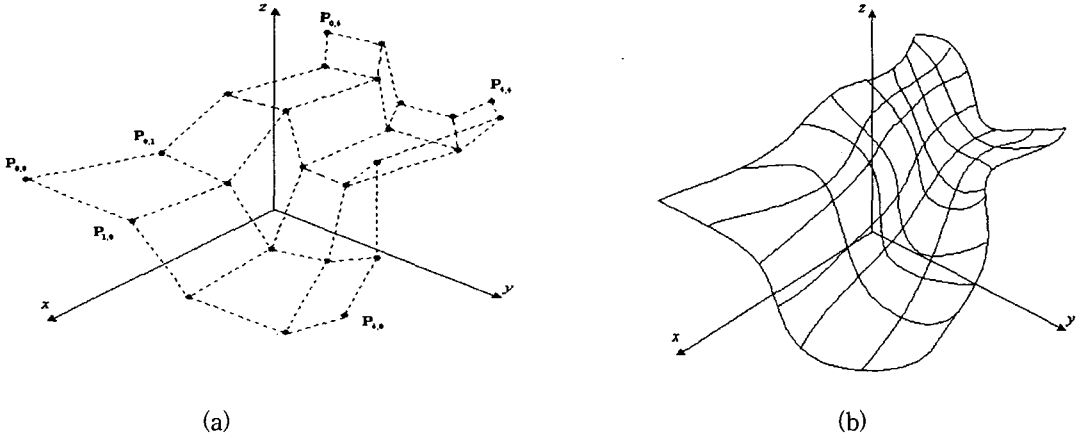


그림 2. (a) Biquadratic NURBS의 조정점과 (b) Biquadratic NURBS surface

u 방향과 v 방향으로 각각 p, q 의 차수를 가지는 NURBS 곡면은 다음과 같이 정의 된다.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (7)$$

여기서 $P_{i,j}$ 는 u, v 방향으로의 조정점 망을 나타내며 $w_{i,j}$ 는 가중치 그리고 $N_{i,p}(u), N_{j,q}(v)$ 는 각각 B-스플라인의 기저 함수를 나타낸다. 그리고 각 방향으로의 조정점 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, \dots, 1\}$$

$$V = \{0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, \dots, 1\} \quad (8)$$

여기서 $r = n + p + 1, s = m + q + 1$ 인 관계를 만족하며, 아울러 u 방향으로의 기저함수는 다음과 같이 표시된다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p+1} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (9)$$

v 방향으로도 마찬가지로 기저 함수를 생각할 수 있다.

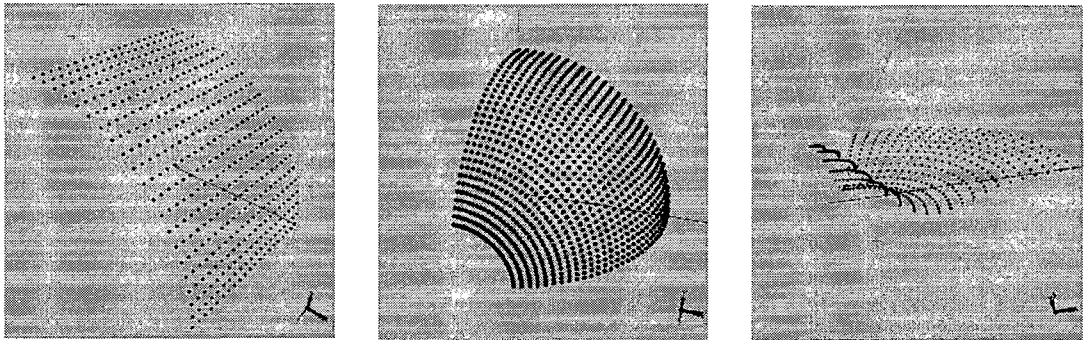
$[u_i, u_{i+1}]$ 는 매듭 간격이라고 하는데 일반적으로 편의를 위하여 $u_0 = 0, u_n = 1$ 로 둔다.

3.2 NLib를 이용한 NURBS 곡면의 생성

NLib(NURBS Library)에서 NURBS 곡면을 생성하는 방법은 다양하다. 생성하고자 하는 곡면에 대한 조정

점 망 정보, 가중치 값들, 차수 등을 입력하여, 직접 생성할 수 있고, 곡면상의 주어진 데이터 점들을 보간(interpolation) 하거나 근사화(approximation)하여 NURBS 곡면을 생성할 수 있다. 또한 일반적인 CAD 시스템에서 모델링한 IGES 포맷 형태의 파일로 되어 있는 곡면을 불러들여 NURBS 곡면을 생성할 수도 있다.

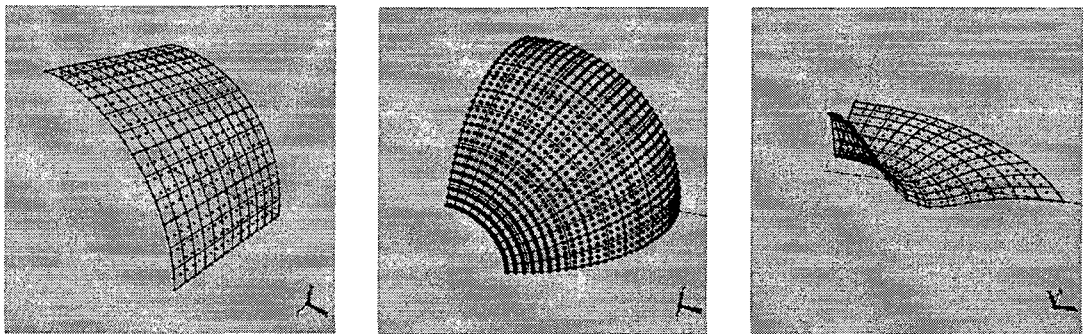
본 연구에서는 해석하고자하는 곡면의 데이터 점들이 주어진다 가정 하에 NLib의 보간에 의한 NURBS 곡면 생성 루틴을 이용하여 곡면을 생성하였다.



(a) 실린더(cylinder) (b) 반구(hemi-sphere) (c) 멕시칸 모자(mexican hat)

그림 3. 보간에 의한 NURBS 곡면 생성을 위한 곡면 데이터 점 입력

그림 3. 은 개발된 프로그램에서 NURBS 곡면을 생성하기위해 불러들인 각 쉘 모델들의 곡면 데이터 점들을 나타내고 있다. 본 연구에서는 프로그램의 검증을 위하여 수학적으로 표현 가능한 모델을 사용하였으나 궁극적으로 해석하고자 하는 곡면상의 충분한 점에 대한 좌표정보를 얻을 수만 있다면 일반적인 자유 곡면형상에 대한 NURBS 곡면 생성도 가능하다. 그림 4. 는 입력된 곡면 데이터 점들을 보간(interpolation) 하여 NURBS곡면을 생성한 예를 보여 주고 있다. 곡면 생성과 동시에 그림에서 보는 바와 같이 쉘 유한요소해석을 위한 격자(mesh)를 생성하며 프로그램에서 사용자가 임의로 u, v 방향으로의 격자의 수를 조정 할 수 있다.



(a) 실린더(6×6) (b) 반구(6×6) (c) 멕시칸 모자(6×6)

그림 4. NURBS 곡면 생성 및 유한요소 격자(mesh) 생성 예 (괄호 안은 u, v 방향으로의 격자수)

또한, 곡면 생성 시에 생성하고자 하는 곡면의 u, v 방향의 차수(p, q)와 곡면 파라미터의 설정방식(Uniform, Chord length, Centripetal)을 선택할 수 있다.

4. 해석과정 및 해석 결과

4.1 해석 과정

주어진 데이터 포인트 정보로부터 NURBS 곡면을 생성하게 되면 $0 \leq u, v \leq 1$ 의 파라미터 범위를 갖는 곡면이 생성된다. 먼저 유한요소해석을 위하여 임의의 격자를 생성하면서 절점 정보와 연결성(connectivity) 정보를 구성하게 된다. 변위경계조건과 하중조건은 기본적인 쉘 모델에 대한 미리 정의된 조건을 부여할 수 있고, 사용자가 임의로 부여 할 수도 있다. 이러한 조건들이 설정이 되면 강성행렬을 조립하고 해석을 하는 과정을 통해 결과를 얻게 된다. 그림 5는 생성된 격자 정보와 9절점 요소의 가우스(gauss) 적분점 그리고 변위 경계 조건과 하중 조건이 부여된 상태를 보여주고 있다.

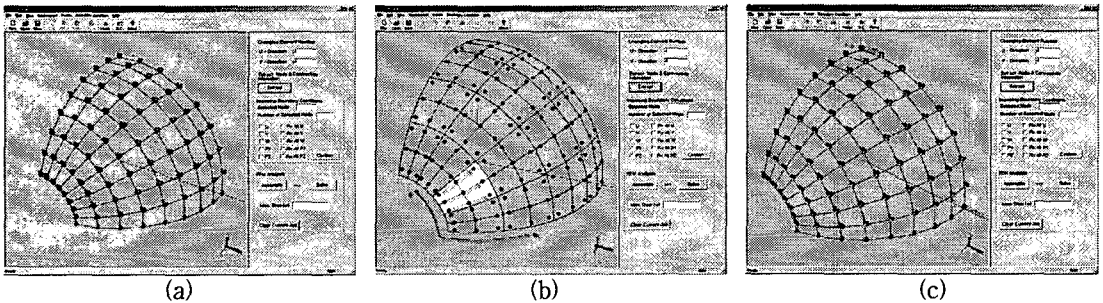


그림 5. 생성된 격자정보(a)와 각 요소의 가우스 적분점(b), 변위 경계조건과 하중 조건 부여(c)

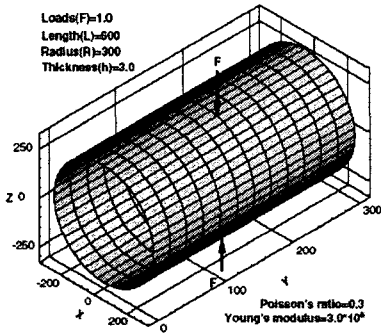
해석을 위해서는 계산 시간을 단축하고 컴퓨팅 시 메모리의 효율적인 사용을 위하여 스카이라인 솔버(skyline solver)를 사용하였다. 현재 상태에서는 해석 결과 검증에 위하여 변위값을 계산 할 수 있으며 향후 해석 결과를 시각적으로 제공하는 후처리 루틴을 추가 할 예정이다.

4.2 해석 결과

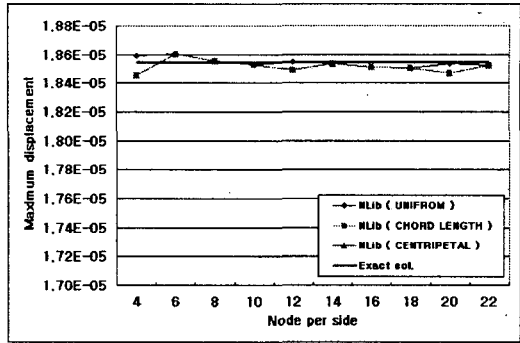
개발된 프로그램의 해석결과를 검증하기 위하여 정해(exact solution)가 주어진 몇 가지 잘 알려진 쉘 모델들을 해석해 보았다.

4.2.1 집중하중이 주어진 실린더 예제

양단에 막(diaphragm) 경계조건이 주어진 그림과 같은 실린더 모델에 대하여 해석을 수행 하였다. 그림 6의 (a)와 같은 조건에 대하여 실린더의 최대변위는 0.18541×10^{-4} 이며, 그 해석 결과는 그림 6의 (b)와 같다.



(a) 해석조건



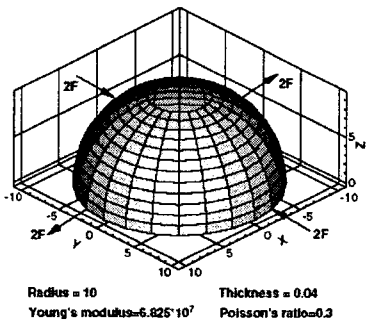
(b) NURBS곡면 Parameterization에 따른 수렴성 비교

그림 6. 실린더 해석결과

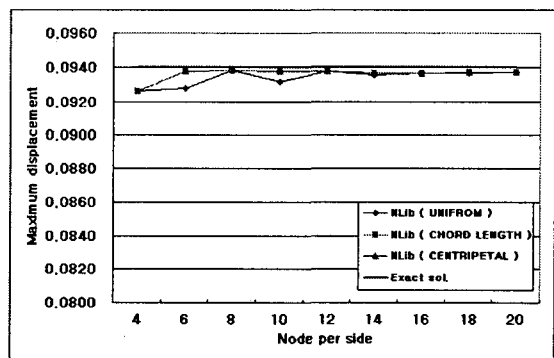
본 연구에서는 주어진 데이터 점들을 보간하는 방식으로 NLib를 이용하여 NURBS곡면을 생성 하므로 곡면 생성 시 parameterization 방법에 따라 생성된 곡면의 정확성에 차이가 있을 수 있다. 따라서 일반적으로 사용하는 parameterization 방법인 uniform, chord-length, centripetal 방법으로 각각의 곡면을 생성했을 경우 수렴성 및 u, v 각 방향으로 격자의 수에 따른 해석 결과를 살펴보았다. 일반적으로 chord-length 나 centripetal parameterization 방법이 곡면을 잘 표현한다고 알려져 있으나 본 실린더 예제의 경우에는 uniform 방법이 좀더 나은 수렴성을 보여주었다. 그러나 나머지 예제들에 대해서는 chord-length나 centripetal 방법이 보다 좋은 결과를 보여 주었다.

4.2.1 집중하중이 주어진 반구 예제

상단에 18° 의 구멍이 뚫린 반구 예제에 대하여 해석을 수행하였다. 하단은 변위에 대한 경계조건이 없는 자유로운 상태이다. 이 문제에 대한 최대 변위의 정해는 0.094 로 알려져 있다.



(a) 해석조건



(b) NURBS곡면 Parameterization에 따른 수렴성 비교

그림 7. 반구 해석결과

그림 7의 (b)에서와 같이 각 parameterization 방법에 따른 수렴성을 확인 해 보았으며, 이 예제의 경우에는 uniform parameterization으로 NURBS 생성했을 경우보다 chord-length 또는 centripetal 방법을 사용하여 NURBS곡면을 생성했을 경우 더 나은 수렴성을 보여 주었다.

5. 결론

본 연구에서는 일반 곡선 좌표계에 기초한 기하학적으로 정확한 쉘 유한요소와 NURBS곡면을 이용한 기하 모델링의 연동을 가능하게 하는 프레임워크를 구현하였다. 임의의 형상의 곡면에 대한 효과적인 해석을 위하여 기하학적으로 정확한 쉘 요소를 적용하였고 잠김 현상을 해결하기 위하여 가정된 변형률 방법과, 격자 뒤틀림에 민감하지 않도록 거품함수를 도입하였다. 매개화된 쉘 곡면의 일반적인 형태를 생성하기 위해서 NURBS곡면 구현에 대한 다양한 기능을 제공하는 NLib를 이용하여 NURBS곡면을 생성하였고, 현재의 일반 좌표계에 기초한 텐서기반 쉘 요소가 임의의 자유 곡면을 다룰 수 있도록 하였다. 매개변수 영역에서 구성된 기하학적으로 정확한 쉘 요소는 컴퓨터 이용 곡면 모델링(CAGD modeling)과 쉘 유한요소(Shell FE) 해석의 연동 체계를 가능케 한다.

잘 알려진 benchmark 쉘 구조에 대한 해석을 통하여 본 연구를 통해 구현된 프레임워크의 성능을 검증하였으며, 이로써 기존의 감절점 쉘 요소의 한계를 극복하고 일반적인 CAD 시스템과 유기적으로 연동할 수 있는 통합설계에 대한 가능성을 확인 하였다. 추후 Cut-out을 포함하는 Trimmed surface와 Blending surface등 실제적인 문제를 다룰 수 있도록 적용 범위를 확장시킬 계획이다.

참고 문헌

1. Ahmad,S.,Iron,B.,and Zienkiewicz,O, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.2, 1970, pp.419-451
2. Maenghyo Cho, Hee-Yuel Roh, "Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates", *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.56, No.1, 2003, pp.81-115
3. H.Y.Roh, M.Cho, "The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces," *Computer Meth. Applied Mech and Engrg.* 193 (2004) 2261-2299.
4. H.Y.Roh, M.Cho, "Integration of geometric design and mechanical analysis using B-spline functions on surface," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, 62(2005) 1927-1949.
5. M.Cho, S.K.Jun, "R-adaptive mesh generation for shell finite element analysis," *Journal of Computational Physics*, 199(2004) 291-316
6. NLib™, Solid Modeling Solutions, Inc. <http://www.smlib.com/>
7. Naghdi PM, "Foundations of Elastic Shell Theory, Progress in Solid Mechanics 4", Edited by Sneddon, 1963,
8. Green AE, Zerna W., Theoretical Elasticity, 1968
9. Les Piegl, Wayne Tiller., " The NURBS Book", Springer-Verlag, New York, NY Second Edition, 1997