한국전산구조공학회
2005년 봄 학술발표회 논문집

모드중첩법을 이용한 케이블지지교량의 3차원 교량-차량 상호작용 해석

3D Bridge-Vehicle interaction Analysis of Cable-Supported Bridges Using Mode Superposition Method

이 준 석* 임 명 훈** 김 문 영***
Lee, Jun-Seok Im, Myoung-Hoon Kim, Moon-Young

ABSTRACT

For bridge-vehicle interaction analysis of cable-supported brides, the superposition method is applied based on the results of 3-dimensional free vibration analysis using General-purpose FEM Software. This study firstly performs the eigenvalue analysis for the free vertical and the torsional vibration of bridges using FEM analysis. Next the equations of motion considering interaction between bridges and vehicles/train are derived from mode superposition method. And then dynamic analysis is performed using the Newmark numericial method. Finally through the numerical examples, the dynamic responses of cable-supported bridges by this study are presented and discussed.

1. 서 론

사장교와 현수교는 케이블로 지지된 교량으로서 장대화에 따른 진동특성이 수반되기 마련이다. 특히 사장교는 중간의 교각위에 세운 타워로부터 뻗친 케이블로 주형 또는 트러스를 매단 구조형식으로서, 경간의 장대화에 수반하는 사하중을 경감하기 위하여 고안된 교량이며 현수교에 비하여 강도가 크고 처짐이 작으며 비교적 흔들리지 않는 구조물이지만 경간이 커지면 편심 재하 된 차량하중을 받을 경우 사장교의 비틂이 발생하게 되며 케이블의 상대적인 수직진동과 함께 교축방향에 대하여 모멘트를 발생시킨다. 이러한 케이블 교량의 진동특성은 중요한 공학적 문제이나 국내의 경우 케이블 교량에 관한 정적해석은 많은 연구가 진행되고 있으나, 차량하중에 대한 동적해석에 관한 연구는 미미하다. 교량의 이동하중을 포함한 동적응답을 해석하는 방법은 Fryba[1]가 일정한 속도와 크기의 하중 또는 질량을 단순교에 적용하면서부터 최근에 이르기까지 많이 사용되고 있으며, 처음 Timoshenko에 의해 "moving-mass moving-force"의 문제는 moving force"로 단순화되어 접근하여 Abdel-Ghaffar[2], Hayashikawa[3]외 각각 현수교의 비틂, 횡방향 진동에 관한 이론 및 이동하중을 받는 현수교의 전단변형 및 회전관성효과를 조사하기도 하였다. 국내에서는 임[4], 김[5], 김

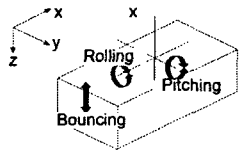
* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정 E-mail:junsok73@steel.skku.ac.kr
** (주)제일엔지니어링 사원 E-mail:lamus2@hanmail.net
*** 성균관대학교 토목환경공학과 교수 E-mail:kmye@skku.ac.kr

[6] , 권[7]그리고 서[8] 등이 각각 이와 유사한 유한요소 및 모드중첩법을 이용하여 연구를 수행하여 왔고, 최근 임 등[9]이 전단변형효과를 고려한 현수교의 교량의 차량과의 상호작요에 관한연구를 수행하고 있다. 이에 본 연구는 상용프로그램인 sap2000을 사용하여 수치예제 모델인 케이블 교량에 대하여 3차원 자유진동해석을 수행하여 고유진동수와 그에 대한 고유모드를 구한 후, 모드중첩법을 이용하여 교량과 차량의 상호작용을 고려한 3차원 운동방정식을 구한 후 수치해석 방법으로 직접적분법인 Newmark-β법을 이용하여 케이블 교량과 차량의 동적응답을 수행하여 그 결과에 대한 영향을 토론하였다.

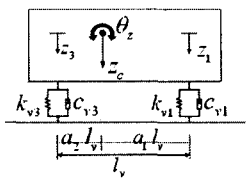
2. 차량 모델 및 에너지

차량모델은 그림3과 같이 3차원 차량모델을 사용하였으며, 차체 중심에 대하여 1개의 수직자유도와 2개의 회전자유도를 가지고 있다. 차량의 3차원 모형은 bouncing, pitching 운동뿐만이 아니라 rolling 운동까지 고려할 수 있다. 차량 중심에서의 연직, 피칭 그리고 롤링에 대한 자유도는 각 차륜에 대한 수직 자유도로 관계되어 지며, 따라서 차량의 자유도는 각 차륜에 대한 4개의 자유도로 표현할 수 있다. 최종 3차원 운동방정식은 총 6개의 자유도로 나타내어진다. 차량 모형화는 크게 질량, 강성과 감쇠, 기하학적 구속 조건 등으로 구분할 수 있으며 차량은 다음과 같은 가정에서 그림 1(a) 같은 운동을 한다.

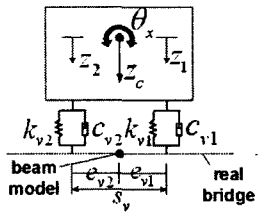
- 차체는 바운싱(ouncing), 피칭, 그리고 롤링 운동을 하며 차체의 중심에 대하여 발생한다.
- 교량위에서 차량은 일정한 속도로 주행한다.
- 차륜은 노면과 하나의 점에서 접촉한다.
- 현가장치의 스프링 상수와 감쇠는 선형이다.



(a) 3차원 차량의 운동



(b) 차량의 모형화(측면)



(c) 차량의 모형화(정면)

그림 1 3차원 차량의 모형화

그림 1에 사용한 기호는 다음과 같다.

z_c , m_v : 차체의 무게중심에서의 수직변위와 질량

Θ_x , I_{mx} : 차체의 롤링 변위와 회전 관성모멘트

Θ_z , I_{mz} : 차체의 피칭 변위와 회전 관성모멘트

z_k , c_{vk} , k_{vk} : 각 차륜위치에서의 변위 및 현가장치에서의 강성과 감쇠계수 , $(k= 1 \sim 4)$

그림 1과 같은 차량에서 차체에서의 각 bouncing , pitching 및 rolling 세 개의 변위와 차축에서의 변위와의

관계는 다음과 같다.

$$z_c = \frac{1}{2}(z_{c1} + z_{c2}) \; ; \; \Theta_z = \frac{1}{2}(\Theta_{z1} + \Theta_{z2}) \; ; \; \Theta_x = a_3(\Theta_{x1} - \Theta_{x2}) + \Theta_{x2} \qquad \text{(1a-c)}$$

여기서, $z_{c1} = a_3(z_1 - z_3) + z_3 \; ; \; z_{c2} = a_4(z_2 - z_4) + z_4$

$$\Theta_{z1} = \frac{z_1 - z_3}{l_v} \; ; \; \Theta_{z2} = \frac{z_2 - z_4}{l_v} \; ; \; \Theta_{x1} = \frac{z_1 - z_2}{s_v} \; ; \; \Theta_{x2} = \frac{z_3 - z_4}{s_v}$$

교량의 자유진동해석에 따른 교량의 모드형상과 차량의 에너지로부터 라그랑지안 식을 이용하여 교량과 차량의 상호 관련된 교량의 운동방정식을 유도한다. 교량의 수직변위와 회전변위를 $v(x,t)$, $\Theta(x,t)$ 라 할 때, 변위는 모드 형상 $\Phi_i(x)$, $\Phi_{ti}(x)$ 과 일반화 좌표계의 변위 $q_i(t)$, $w_i(t)$ 의 곱으로 표현할 수 있으며, 차량이 속도를 가지므로 차량의 위치는 시간에 대한 함수가 되어 모드 형상은 공간만이 아닌 시간의 함수도 된다. 따라서 교량의 수직 및 회전변위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(x(t),t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x(t))\, q_i(t) \; ; \; \Theta(x(t),t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ti}(x(t))\, w_i(t) \qquad \text{(2a-b)}$$

차량의 차축이 x_k 지점에 있을 때, 차축에 작용하는 변위 량은 차량의 변위와 그 지점의 교량의 변위 및 노면 조도로 표현할 수 있다.

$$\text{상대변위}(s_k) = z_k - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_{vk}) q_i(t) - e_k \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_{vk}) w_i(t) + y_0(x_{vk}) \qquad (3)$$

여기서, k = 1~4

차량의 운동에너지 (T_v) ,위치에너지 (V_v) ,분산에너지 (D_v) 는 다음과 같다.

$$T_v = \frac{1}{2} m_v \dot{z}_c^2 + \frac{1}{2} I_{mx} \dot{\Theta}_x^2 + \frac{1}{2} I_{mz} \dot{\Theta}_z^2 + \frac{1}{2} m_v v_t^2 \qquad (4a)$$

$$V_v = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2} k_{vk} \left(z_k - v(x_k,t) - e_k w(x_k,t) + \frac{m_{vk} g}{k_{vk}} + y_0(x_k) \right)^2 - m_{vk} g \qquad (4b)$$

$$D_v = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2} c_{vk} \left(\dot{z}_k - \dot{v}(x_k,t) - e_k \dot{w}(x_k,t) + \dot{y}_0(x_k) \right)^2 \qquad (4c)$$

3. 교량과 차량의 상호작용을 고려한 운동방정식

교량의 에너지와 차량의 에너지로부터 교량과 차량의 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 라그랑지안 식을 이용할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k}\right) + \frac{\partial L}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_k} = Q_k \tag{5}$$

여기서, $L = T - V$

식(5)를 각 에너지 식에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{p}_k}\right) + \frac{\partial V}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_k} = Q_k \tag{6}$$

식(6)에서 T와 V와 그리고 D는 각각 운동에너지, 위치에너지 그리고 분산에너지를 나타내며, 여기서 p_k 는 일반화 된 좌표로써 교량의 변위와 차량의 변위인 $q_i(t)$, $w_i(t)$ 와 z_k 을 적용한다. 먼저, 교량의 수직과 비틂에 대한 운동방정식을 구하기 위해서 교량의 에너지에 대하여 일반좌표 q_i , $w_i(t)$ 를 적용하면 교량의 운동방정식은 임[9] 등이 제시한 선형화 된 교량의 자유진동 운동방정식과 같다. 차량과 교량의 상호작용을 고려한 교량의 운동방정식을 구하기 위하여 차량의 에너지 식을 식(7)에서 $p_k = q_i, w_i$ 인 경우에 대하여 각각 라그랑지안 식을 적용하면 차량과 교량의 상호 관련된 교량의 운동방정식을 구할 수 있다. 그리고 각각 두개의 전륜과 후륜에 대한 차량의 운동방정식 또한 교량의 유도과정과 동일한 방법으로 라그랑지안 식 (6)에 각각 교량과 차량의 에너지식을 대입하고 이을 차량의 자유도인 z_k ,여기서 $(k=1\sim4)$ 에 대하여 변분을 취하면 차륜의 수직자유도에 대한 각각의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_b & 0 \\ M_{vb} & M_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{U}_b \\ \ddot{U}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & C_{bv} \\ C_{vb} & C_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & K_{bv} \\ K_{vb} & K_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_b \\ U_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{F}_v \end{Bmatrix} \tag{7}$$

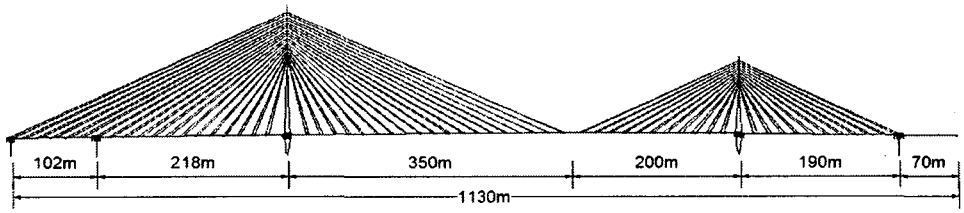
여기서, $U = \begin{Bmatrix} U_b \\ U_v \end{Bmatrix} = \{q_1 \cdots q_n \; w_1 \cdots w_n \; s_1 \cdots s_4\}^T$

식(7)에서 s_k는 차량과 교량의 상대변위, 질량, 강성, 감쇠 행렬에 대한 아래첨자 기호 b 는 교량의 수직과 비틂, 그리고 v 는 차량만의 운동방정식을 나타내며 이는 증분 시간에 대하여 변하지 않으며 일정한 값을 나타낸다. 그리고 아래첨자 vb 와 bv 의 행렬 값은 교량과 차량의 상호관련 된 항으로써 차량위치에 대하여 형상함수가 변하므로 각 증분시간에 대하여 값은 변하게 된다.

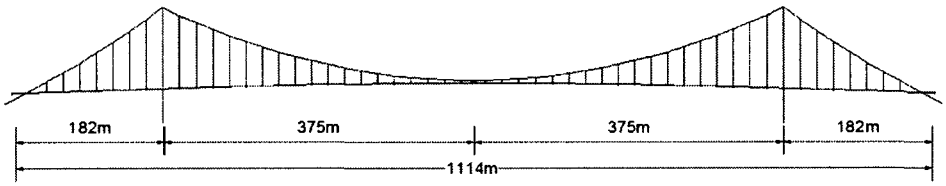
4. 해석 예

사장교의 구조해석 모델은 사장교의 경우 그림 2와 같은 5경간 비대칭 사장교로써 돌산화태대교의 설계 자료를 근거로 하여 모델링 하였고, 현수교는 현재 계획 중인 거금도 연육교를 대상으로 하였다. 이 두 교량에 대해서 절점당 6개의 자유도를 가지는 3차원 모델을 사용하였으며, 각각 주형의 요소가 264개 및 116개를 이

루며, 교량에 대한 자유진동해석은 상용프로그램인 sap2000을 이용하여 수행하였다. 차량 모델은 권[7]의 논문을 참조하였으며 제원은 표1과 같다.



(a) 돌산 화태대교



(b) 거금도 연육교

그림 2 해석 대상 교량

표 1 차량의 제원

특 성		기 호	제 원	특 성		기 호	제 원
질량		m_v	223.67 kN	종축간 길이		l_v	3.85 m
스프링상수	앞축	k_{v1}, k_{v2}	549.6 kN/m	횡축간 길이		s_v	1.8 m
	뒷축	k_{v3}, k_{v4}	3144.0 kN/m	축간 비율	앞축	a_1	0.779
감쇠계수	앞축	c_{v1}, c_{v2}	13.7 kN-s/m		뒤축	a_2	0.221
	뒷축	c_{v3}, c_{v4}	68.4 kN-s/m	피칭/롤링모멘트		I_{mz}, I_{mx}	570.94 $kN \cdot m^2$, 139.11 $kN \cdot m^2$

본 연구에서 개발한 프로그램을 사용하여 주행속도 $100km/h$ 인 경우에 대하여 시간이력해석을 수행하였다. 그림 4는 본 수치 해석에서 고려된 하중 재하 조건이며 case1은 교량 모델의 중심을 따라 진행하는 경우이고 case2와 3은 각각 추월선과 주행선을 진행하는 경우이다. 그림 6은 해석에 고려한 모드 수에 따른 중앙경간 처짐을 도시하였다. 모드 수 10개 이상에서 응답의 값은 거의 일정하였으며, 이를 고려하여 본 해석에서는 30개의 모드를 사용하였다. 또한 그림 6으로부터 알 수 있듯이 사장교의 동적응답이 현수교의 응답에 비해 매우 작은 것으로 판단되며, 이는 사장교의 강성이 현수교보다 일반적으로 크기 때문으로 사료된다.

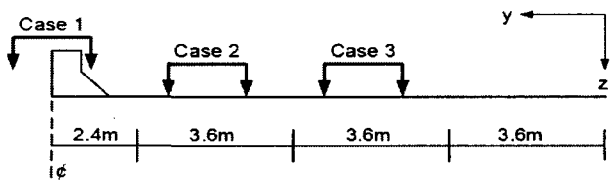
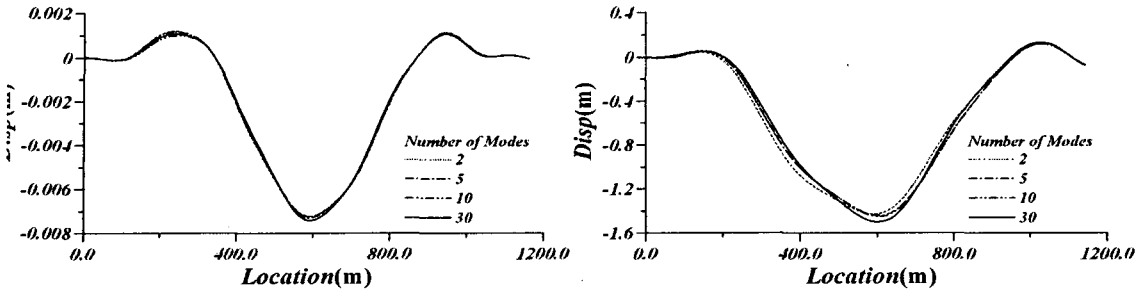
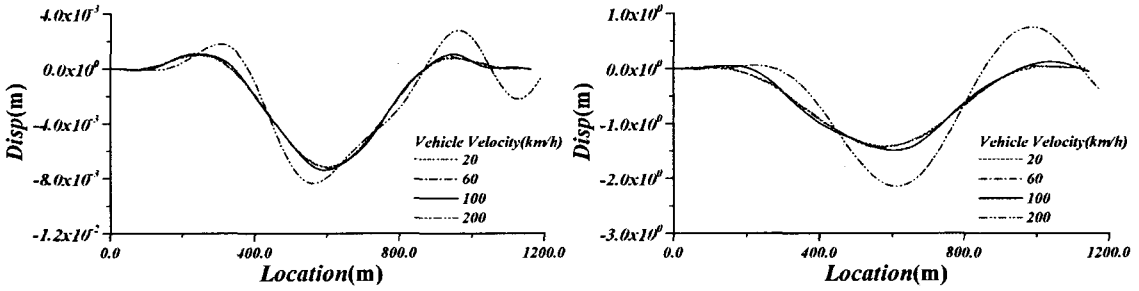


그림 5 하중재하 case



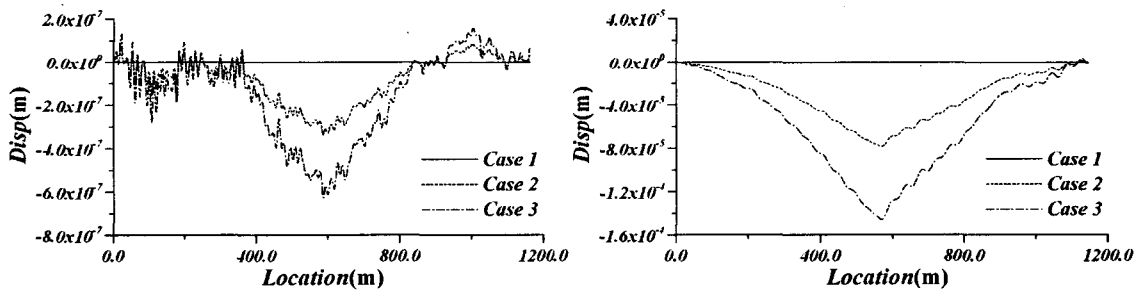
(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 6 모드수에 따른 중앙경간의 수직변위응답



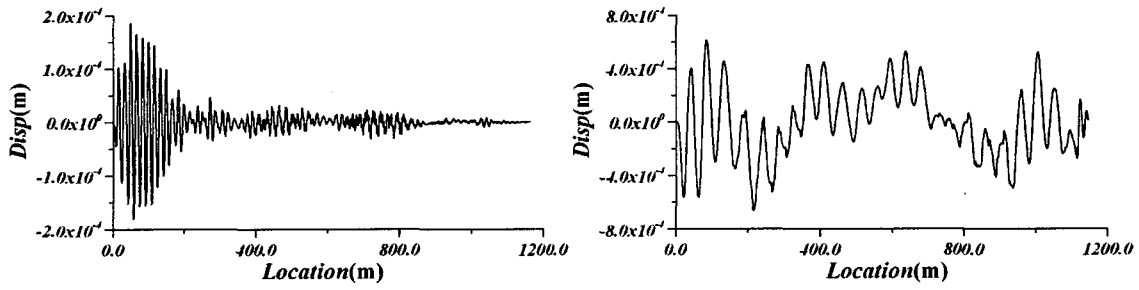
(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 7 차량 속도에 따른 중앙경간의 수직변위응답



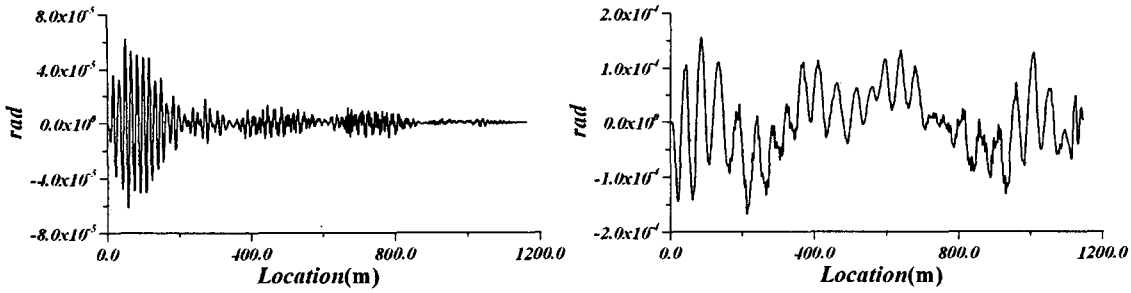
(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 8 중앙경간 중앙 비틂변위 응답



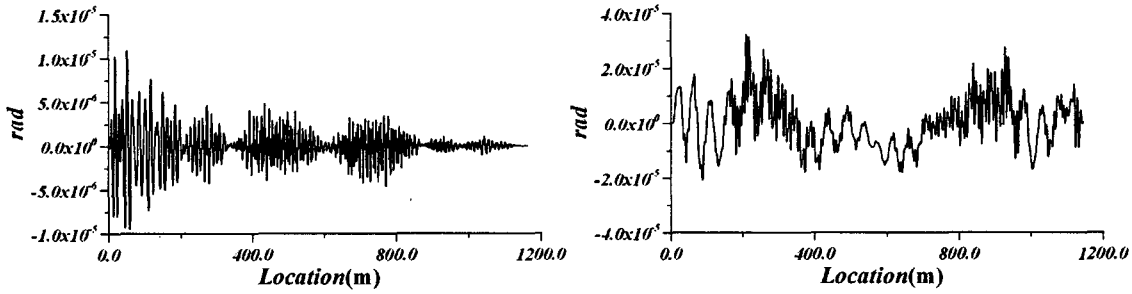
(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 9 차량의 Bouncing 응답



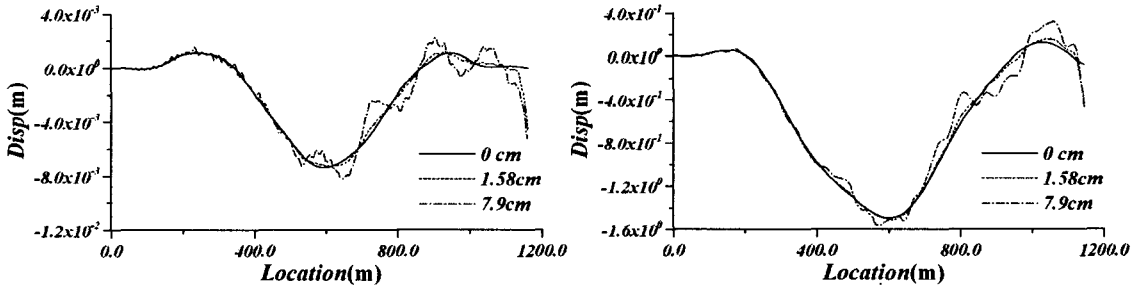
(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 10 차량의 Pitching 응답



(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 11 차량의 Rolling 응답



(a) 화태대교 (b) 거금도 대교

그림 12 노면조도의 크기에 따른 중앙경간 처짐응답

그림 7로부터 알 수 있듯이, 두 교량의 경우 차량의 속도가 100km/h까지는 교량의 응답이 거의 비슷하나 200km/h에서 수직변위응답이 눈에 띄게 크게 되는 것을 알 수 있다. 또한 그림 8의 경우 차량이 교량의 중심으로 지나는 Case1의 경우 중앙경간의 비틂변위가 발생하지 않으나 Case2와 Case3의 경우 화태대교와 거금도 대교가 비슷한 양상을 보여주고 있다. 그림 9~10은 차량속도가 100km/h이고 Case3인 경우에 대한 차량의 운동을 나타내고 있다. 사장교인 화태대교의 경우 초기에 발생하는 bouncing, rolling, 그리고 pitching이 교량을 통과하면서 진폭이 줄어드나, 거금도 대교의 경우 초기에 발생한 변위가 교량의 중심을 통과하는 순간 일순간 작아지나 다시 진폭이 커지는 경향이 발견된다. 이는 사장교에서의 진동특성과 현수교의 진동특성이 틀리기 때문으로 사료된다. 또한 그림 12는 노면조도를 고려시에 발생하는 교량중앙의 연직 처짐을 최대 노면조도의 크기에 따라 나타낸 것으로 차량운행 초기에는 노면조도에 의한 영향이 크지 않으나 시간이

지남에 노면조도의 영향을 크게 받음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 유한요소 상용프로그램을 이용하여 케이블 교량의 3차원 자유진동해석을 수행한 후 차량의 에너지로부터 lagrange equation을 이용하여 교량과 차량의 상호작용을 고려 할 수 있는 운동방정식을 유도하여, 현재 시공예정인 국내의 장대 케이블 교량인 사장교 형식의 화태대교와 현수교 형식의 거금도 연육교에 대해서 적용하여 그 결과를 비교 분석하였다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초사업비(과제번호 : R01-2003-000-11630-0)지원 및 한국과학재단의 특정기초연구(R01-2002-000-00265-0)사업에 의하여 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Fryba. L. "Vibration of solids and structures under moving loads". Noorhoff International Publishing. Groningen. The Netherlands. 1972, pp344.

2. Abdel-Ghaffar, A. M., "Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges", J. of Struct. Div., ASCE, Vol. 106, No. ST10, Oct., 1980, pp. 2053-2075

3. Hayashikawa, T. and Watanabe, N., "Suspension Bridge Response to Moving Loads", J. of Engrg. Mech., ASCE, Vol. 108, No. EM6, Dec., 1982, pp. 1051-1065

4. 임성순, "이동하중을 받는 직선형 거더교의 동적거동 분석", 산업기술연구소 논문집, 제 4권, pp. 1-8, 1996

5. 김호경 "시공상태를 고려한 현수교의 3차원 해석" 서울대학교 박사논문, 1993

6. 김문영, 이병주, 노범준 "전단변형 및 회전관성을 고려한 현수교의 수직 자유진동해석 : II. 수치적 방법", 대한토목학회 논문집, 제17권 제I-5호, 1997, pp. 727-737

7. 권순덕, "차량하중을 받는 교량의 진동 제어를 위한 TMD의 효과", 대한토목학회 논문집, 제 18권 제I-4호, 1998, pp457-467.

8. 서정인, 김호경, "현수교의 정착 형식에 따른 이동하중에 의한 동적 응답의 비교", 한국강구조학회 논문집, 제 12권, 1호, pp. 103-110, 2000

9. 임명훈, 김문영, 권순덕, 김호경 "전단변형효과를 고려한 현수교의 교량-차량 상호작용 해석", 한국지진공학회, 제 8권, 6호, pp. 1-11 , 2004