



높은 Re수에서의 2차원 Lid-Driven 캐비티유동의 수치해석

명 현 국¹, 김 종 은²

Numerical Simulation of 2-D Lid-Driven Cavity Flow at High Reynolds numbers

H. K. Myong and J. E. Kim

Numerical simulations of two-dimensional steady incompressible lid-driven flow in a square cavity are presented to verify the validity of a new solution code(PowerCFD) with unstructured grids. The code uses the non-staggered(collocated) grid approach which is very popular for incompressible flow analysis because of its numerical efficiency on the curvilinear or unstructured grids. Solutions are obtained for configurations with a Reynolds number as high as 10,000 with both rectangular and hybrid types of unstructured grid mesh. Interesting features of the flow are presented in detail and comparisons are made with benchmark solutions found in the literature. It is found that the code is capable of producing accurately the nature of the lid-driven cavity flow at high Reynolds numbers.

Key Words: 수치해석(Numerical Simulation), Lid-Driven 캐비티 유동(Lid-Driven Cavity Flow), 비정렬격자법(Unstructured-Grid Method), 정렬격자법(Structured-Grid Method), 높은 Re수(High Reynolds Number), 전산유체역학(CFD)

1. 서 론

이차원 lid-driven 캐비티유동은 기하학적 형상이 단순하여 용이하게 수치해석방법을 적용할 수 있으나 일정속도로 움직이는 위쪽 벽면에 의해 1차의 큰 와동이 공동의 중심에 형성되고 Reynolds수가 증가함에 따라 캐비티의 모서리 부분에서 반대방향으로 회전하는 즉, 비연속적인 와동의 발생으로 여러 개의 재순환 영역이 나타나는 복잡한 유동구조를 가지기 때문에, Burggraf[1]의 수치해석적 연구 이후로 전산유체역학(CFD)분야에서 Navier-Stokes 방정식 코드의 정확성을 입증함과 더불어 많은 연구자들에 의

해 지금까지 여러 가지 다른 수치해석기법이나 알고리즘의 검증에 연구되어져 왔다[1-5]. 일례로 Ghia 등[2]은 직각격자에서 와도-유량함수법을, Botella-Reyret[3]은 Chebyshev 집중방법(collocation method)을, Aydin-Fenner [4]는 경계요소법(Boundary Element Method)을 사용하여 각각 계산하였다.

본 연구에서는 일반좌표계 및 비정렬격자계를 사용하는 자체적으로 개발한 코드(PowerCFD)의 적합성 및 타당성을 검증하기 위해 lid-driven 캐비티 유동을 대상으로 하여 Reynolds 수를 100에서 10000까지 여러 가지 경우로 변화시켜가며 계산하고 검증용해(benchmark solution)로 제시된 Ghia 등[2]과 Botella-Reyret[3]의 수치해석 결과와 비교분석하고, 고레이놀즈수(high Reynolds number)에서의 lid-driven 캐비티 유동의 특성을 수치해석을 통하여

*1 정회원, 국민대학교 기계자동차공학부

*2 학생회원, 국민대학교 대학원 기계공학과

* E-mail : myong@kookmin.ac.kr

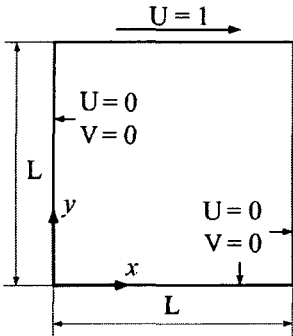
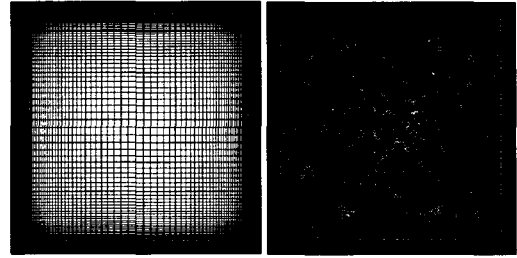


Fig. 1 Model for lid-driven cavity



(a)

(b)

Fig. 2 Segments of (a) non-uniform rectangular mesh (142 x 142 cells), and (b) hybrid mesh (20546 cells).

알아본다. 또한 코드의 유연성을 검증하기 위해 비정렬 사각형 격자계 및 비정렬 하이브리드 격자계를 사용하여 수치해석을 수행하였다.

2. 수치해석

본 연구에서 lid-driven 캐비티유동 수치해석을 위하여 사용한 모델과 경계조건은 Fig. 1과 같으며, 계산에 사용된 지배방정식은 무차원화된 2차원 층류 Navier-Stokes 방정식이다. 이 식을 풀기 위해 본 연구에서 사용한 코드(PowerCFD)는 자체 개발한 코드로 이 코드는 복잡하고 실제적인 형상에 대한 격자생성이 용이하고, 흥미 있는 국부 형상에 대해 격자를 능동적으로 적용시킬 수 있는 능력을 가지고 있는 비정렬격자계를 사용하고 유한체적법에 기초하여 열/유체 유동 문제를 해석할 수 있는 3차원 해석 알고리즘을 사용하고 있다[6]. 즉, 기본적으로 열/유체 유동 현상을 지배하는 지배방정식들을 풀기 위해 현재 대부분의 상용 CFD 해석 소프트웨어에서 채택하고 있는 일반좌표계를 사용하고 유한체적법에 기초하여 벡터와 스칼라 값을 모두 제어체적의 중심점에 위치시키는 집중 격자계를 사용하며, 미소체적 중심에서의 직교좌표 성분의 속도, 압력 및 스칼라 성분을 주요 종속변수로 채택하고 있다. 또한, 운동량 방정식의 압력항 처리를 위하여 연속방정식의 속도와 연관시킨 SIMPLE계통 알고리즘을 비정렬격자계에 적용시켜 압력수정방정식을 얻는 방법을 확립시켰다. 특히, 본 코드는 대류항 및 확산항을 이산화하기 위해 필요한 셀 면에서의 종속변수 ϕ 값 및 그 구배 $\nabla\phi$ 값을 Gauss 정리(발산정리)를 이용하는

방법과 임의의 셀 형상에 대해 유효한 최소자승법을 이용하는 방법을 선택적으로 사용할 수 있다. 마지막으로, 일반적인 보존방정식과 달리 운동량 방정식이 추가적인 확산 플럭스항을 포함하고 있으므로, 본 코드에서는 압력 수정방정식 및 경계조건과의 상용성을 함께 고려하여 원래의 전단응력 텐서로부터 구하는 방법을 사용하고 있다

본 연구에서는 대류항 계산에는 상용 CFD 코드에서 널리 사용되고 있는 2차중심차분법(2nd-order central differencing scheme)을 이용하였다. 또한, 수렴판정 조건으로 처음 10번 반복계산에서 얻어지는 모든 셀에서의 속도 및 연속방정식에 대한 잔차의 절대값 합의 최대값으로 정규화 시켰으며, 이 값들이 10^{-7} 이하일 때 수렴되었다고 판정하였다.

3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 Ghia 등[2]과 마찬가지로 레이놀즈 수 $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$ 의 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다. 먼저 기존의 정렬 격자계를 사용한 연구결과와 비교, 검증하기 위하여 Fig. 2(a)에 나타난 바와 같이 비정렬 사각형 격자계(142 x 142 CV)를 사용하여 수치해석하고 또한, 격자계 형상이 수치해석에 미치는 영향을 알아보기 위하여 Fig. 2(b)와 같이 동등한 셀 수의 비정렬 하이브리드 격자계(15600 사각형 CV + 4946 삼각형 CV)를 이용하여 수치해석하고 그 결과 값을 비교하였다. 참고로 Ghia 등[2]은 고레이놀즈수에서의 계산 정확도를 위해 66,000 셀 (256 x 256 CV) 정도의 사각형 정렬격자를 사용하였으나, 등간격이기 때문에

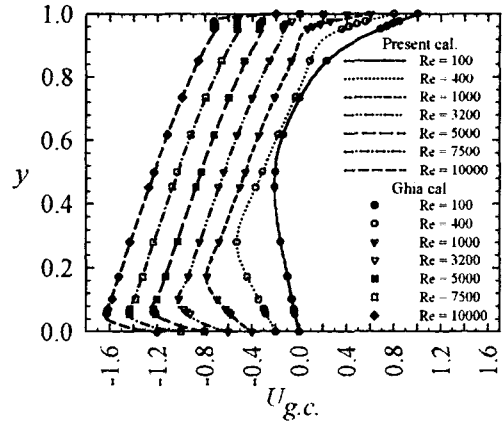
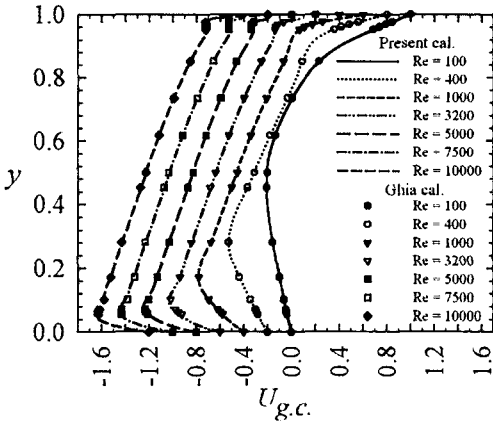


Fig. 3 Comparison of u-velocity along vertical lines through geometric center with unstructured rectangular meshes (142 x 142 cells).

Fig. 5 Comparison of u-velocity along vertical lines through geometric center with unstructured hybrid meshes(20546 cells).

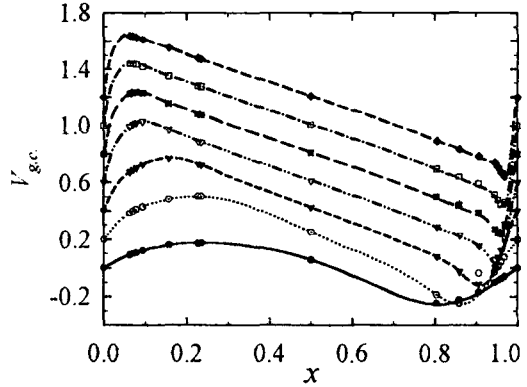
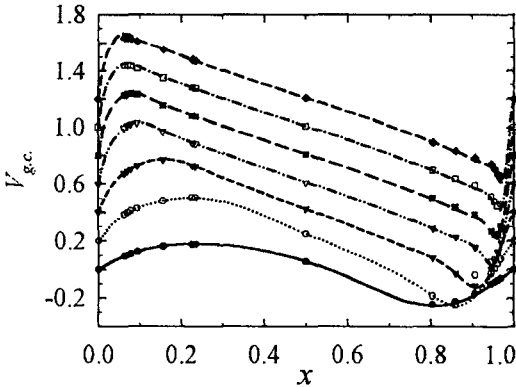


Fig. 4 Comparison of v-velocity along horizontal line through geometric center with unstructured rectangular meshes (142 x 142 cells).

Fig. 6 Comparison of v-velocity along horizontal lines through geometric center with unstructured hybrid meshes(20546cells).

$Re=10000$ 에서 벽면에서 첫 번째 격자점까지의 거리가 $y^+ > 10$ 으로 되나, 본 연구에서는 비등간격 격자를 사용함으로써 전체적으로 상당히 작은 셀 수를 사용하면서도 이 값이 1 정도의 값이 되도록 하였다.

Figs. 3과 4는 비등간격 비정렬 사각형 격자계 (Fig. 2(a))를, Figs. 5와 6은 하이브리드 격자계 (Fig. 2(b))를 각각 사용하여 계산한 결과를 Reynolds수에 따라 기하학적 캐비티 중심인 $x = 0.5$ 위치에서의 수평방향 속도 U 와 $y = 0.5$ 위치에서의 수직방향 속도 V 를 검증용 해로 제시된 Ghia 등[2]의 연구결과 값과 비교하여 나타낸 것이다. 결과를 보면 캐비

티 유동의 특징인 Re 가 증가할수록 벽면 경계층 두께가 얇아지며, 그레이놀즈수에서 $x=1$ 근처에서 수평방향 속도와 $y=1$ 근처에서 수직방향 속도의 비틀어짐(kink) 현상이 각각 나타나는 것 등을 포함해, 고려한 모든 Reynolds수에서 수평 및 수직방향 속도 모두 Ghia 등[2]의 속도에 대한 계산결과 값과 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한, Figs. 3-6으로부터 사각형 격자계와 하이브리드 격자계의 결과가 거의 정확하게 동일한 예측결과를 제시하고 있음을 알 수 있다. 이로써 본 연구에서 사용한 비정렬격자계를 사용하는 PowerCFD의 적합성과 타당성은 물

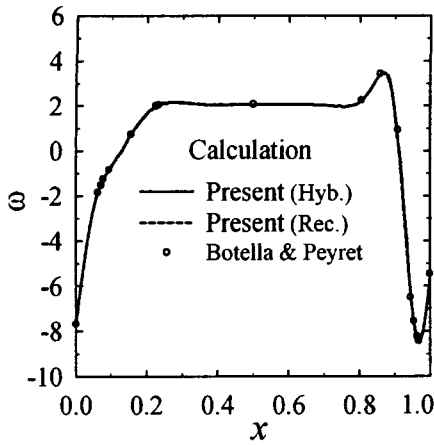


Fig. 7 Comparison of vorticity values along horizontal line through geometric center with two types of meshes at $Re = 1000$.

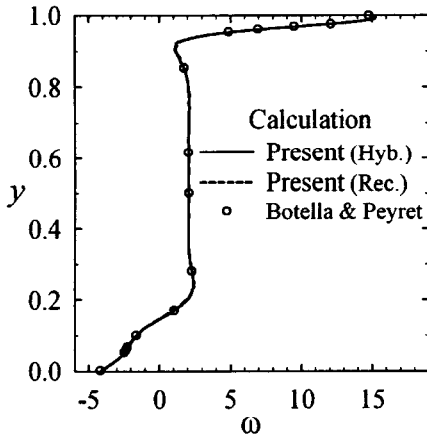


Fig. 8 Comparison of vorticity values along vertical line through geometric center with two types of meshes at $Re = 1000$.

른 격자 형상에 대한 유연성을 확인할 수 있다.

Figs. 7과 8은 $Re = 1000$ 에서 두 가지 형태의 격자계에 대하여 기하학적 캐비티 중심인 $x = 0.5$ 위치에서의 수평방향 와도값(ω)과 $y = 0.5$ 위치에서의 수직방향 와도값(ω)의 계산결과를 Chebyshev 집중 방법을 사용하고 또 다른 검증용 해로 제시된 Botella-Reyret[3]의 계산결과 값과 비교한 것이다. 본 계산 결과는 격자 형태에 상관없이 거의 동일한

Table 1 Values for Vorticity Contours in Figs. 9 and 10.

Vorticity			
Contour number	value of ω	Contour number	value of ω
1	5.0	7	0.0
2	4.0	8	-0.5
3	3.0	9	-1.0
4	2.0	10	-2.0
5	1.0	11	-3.0
6	0.5		

예측결과를 보여주며, 또한 예측결과도 검증용 해와 매우 정확하게 일치함을 알 수 있다. 이로써 다시 한번 본 연구에서 사용된 PowerCFD 코드의 적합성 및 타당성과 함께 유연성을 확인할 수 있다.

Fig. 9와 Fig. 10은 Reynolds수에 따라 각각 사각형 및 하이브리드 격자계를 사용해서 계산하여 얻은 와도선도이고, Table 1은 이들 그림에서 사용한 등고선의 번호에 따른 와도값을 나타낸다. 기존의 연구 [2]에 따르면, 본 연구에서 다루고 있는 캐비티 유동은 Re 가 증가할수록 캐비티내 여러 곳에서 와도구배가 높은 영역이 나타나며, 캐비티 왼쪽 아래 코너부근에서 반대방향으로 회전하는 2차 와동(secondary vortex), 오른쪽 아래 코너부근에서의 2차 와동 및 코너에서의 3차 와동, 왼쪽 벽면 위쪽 부근에서의 2차 와동이 각각 존재하고, 주와동(primary vortex)은 낮은 Re 에서 오른쪽 위쪽 코너로부터 파생되어 나와 Re 가 증가할수록 캐비티의 기하학적 중심으로 이동하며, $Re \geq 5000$ 에서는 거의 변하지 않으며, 모든 이차 와동이 초기에 코너 근처에서 나타나 천천히 캐비티 중심을 향해 이동해 간다고 알려져 있다. 본 계산 결과는 그림에서 보는 바와 같이 이러한 기존연구로부터 알려진 와동에 대한 특성을 명확하게 보여주고 있으며, 또한 대상으로 한 모든 Re 범위에서 격자형태에 상관없이 거의 일치된 결과를 나타내고 있다. 따라서 와도선도에 대한 결과를 통해서도 PowerCFD의 유연성과 타당성을 확인할 수 있다.

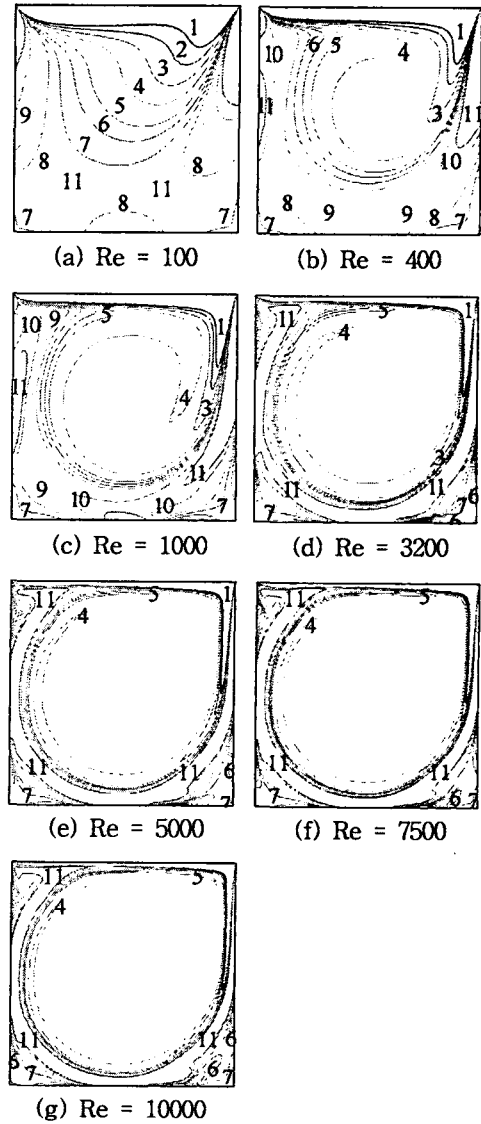
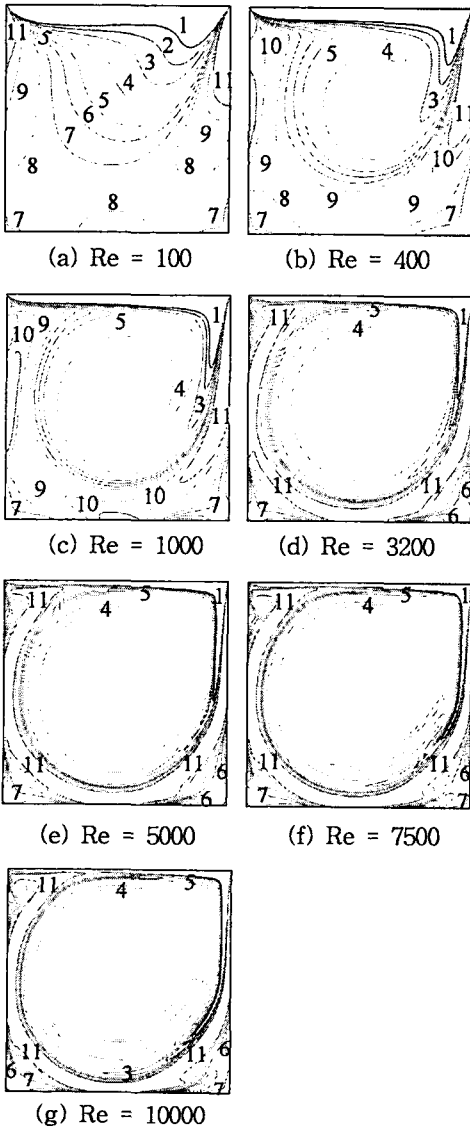


Fig. 9 Vorticity contours for flow in driven cavity with unstructured rectangular meshes (142 x 142 cells).

Fig. 10 Vorticity contours for flow in driven cavity with unstructured hybrid meshes (20546 cells).

한편, Fig. 9와 10으로부터 $Re \geq 7500$ 에서 왼쪽 아래 코너에서 3차 와동이 미약하지만 나타남을 확인할 수 있는데, 이것은 Ghia 등[2]의 기존 연구에서는 보고 되어 있지 않은 새로운 사실이다. 이러한 현상은 본 연구에서 비등간격 격자계를 사용하여 벽면으로부터 첫 번째 격자점 위치를 기존의 연구[2]

보다 1/10 정도로 작게 하였기 때문에 나타나는 것으로 물리적으로도 타당하다고 사료된다.

4. 결 론

본 연구에서는 lid-driven 캐비티 유동을 대상으로 하여 일반좌표계 및 비정렬 격자계를 채택하여 일반

성을 가진 자체적으로 개발한 코드(PowerCFD)의 적합성, 타당성 및 유연성을 검증하기 위해, 비정렬 사각형 격자계 및 비정렬 하이브리드 격자계를 사용하여 Reynolds 수를 100에서 10000까지 여러 가지 경우로 변화시켜가며 계산하고, 검증용 해(benchmark solution)로 제시된 Ghia 등[2]과 Botella-Reyret[3]의 속도 및 와도선도에 대한 수치해석 결과와 비교 분석하였다. 연구결과,

(1) 고려된 Re 범위에서 속도 및 와도에 대한 계산 결과는 기존의 검증용 해와 매우 정확하게 일치함이 입증되었다. 따라서 본 연구에서 사용한 코드는 수치해석방법을 포함해 lid-driven 캐비티 유동의 특성과 현상을 적절하게 예측할 수 있다.

(2) 본 계산에 사용된 코드는 격자 형태에 상관없이 거의 동일한 예측결과를 보여주며, 또한 예측결과도 검증용 해와 정확하게 일치하였다. 이로써 본 연구에서 사용된 PowerCFD 코드의 적합성 및 타당성과 함께 유연성을 확인할 수 있었다.

(3) 비등간격 격자계를 사용하여 벽면근방을 조밀하게 한 본 연구를 통해 $Re \geq 7500$ 에서 캐비티 왼쪽 아래 코너에서 Ghia 등[2] 이전의 연구에서 보고되지 않았던 3차 와동이 미약하지만 명확하게 나타남을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] Burggraf, O.R., 1966, "Analytical and Numerical Studies of The Structure of Steady Separated flows", *J. Fluids, Mechanics*, Vol.24, pp.131-151.
- [2] Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method.", *J. Comp. Physics*, Vol.48, pp.387-411.
- [3] Botella, O., Peyret, R., 1998, "Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow", *Computers and Fluids*, Vol.27, pp.113-151.
- [4] Aydin, M. and Fenner, R.T., 2001, "Boundary Element Analysis of Driven Cavity Flow for Low and Moderate Reynolds Numbers", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.37, pp.45-64.
- [5] Benjamin, A.S. and Denny, V.E., 1979, "On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large Re ", *J. Comp. Physics*, Vol.33, pp.340-358.
- [6] 명현국, 2004, "원형실린더 주위의 비정상 이차원 층류유동 수치해석", *한국전산유체공학회지*, 제9권, 제4호, pp.41-47.