

# Central Flux Scheme과 WENO Scheme을 이용한 고차 정확도 Hybrid Scheme의 개발

김 대 희<sup>\*1</sup>, 권 장 혁<sup>\*2</sup>

## Development of a High-Order Accurate Hybrid Scheme Using the Central Flux and WENO Schemes

D. Kim and J. H. Kwon

A hybrid central-WENO scheme is proposed. The fifth order WENO-LF scheme is coupled with a central flux scheme at cell face. Two sub-schemes, the WENO-LF scheme and the central flux scheme, are switched by a weighting function. The efficiency and accuracy of the proposed hybrid central-WENO scheme is validated through several numerical experiments.

**Key Words:** 고차 정확도 수치 기법(High-Order Accurate Scheme), 하이브리드 기법(Hybrid Scheme), WENO 수치기법(WENO scheme), 중앙유속기법(Central Flux Scheme)

### 1. 서 론

유체의 거동을 해석하기 위해 전산유체역학(CFD) 알고리즘은 다양한 분야에 대해 더 나은 계산 효율과 더 높은 정확도를 가지도록 개발되어 왔다. 압축성 유동에서는 초창기에 충격파의 안정적인 해석을 위한 충격파 포획 알고리즘 개발이 많은 부분을 차지했고 최근에는 CAA(Computational Aero-Acoustics), LES(Large Eddy Simulation), DNS(Direct Numerical Simulation)에 관한 연구가 활발히 진행되는 과정에서 고차 정확도 수치기법에 대해 많은 관심과 노력이 더해지고 있다. 고차 정확도 수치기법은 특성상 적은 격자수로도 작은 스케일의 유동 현상을 잘 해상해 낼 수 있으므로 계산 효율을 높일 수 있다. 고차 정확도 수치기법은 stencil을 늘임으로써 쉽게 정확도를 높일 수 있으나 초기 조건,

경계조건, aliasing error로부터 생기는 교란에 의해 수치해가 불안정해 지는 것을 막기 위해 선형 문제의 경우에도 약간의 수치점성을 추가해야 하며, 특히 충격파를 포함하는 유동의 경우에는 수치진동을 막기 위해 수치점성이 제대로 조절되어야 한다. 고차 정확도 수치기법이 가지는 딜레마는 정확도의 향상을 위해서는 수치점성이 될 수 있는 한 적어야 하는데 수치기법의 강건성을 위해서는 수치점성이 될 수 있는 한 많이 추가되어야 한다는 점이다.

고차 정확도를 얻기 위한 다양한 수치기법들 가운데 가장 널리 사용되는 기법으로 Compact scheme과 ENO(Essentially Non-Oscillatory) 계열의 수치기법을 들 수 있다.[1,2,3]. Compact scheme은 spectral method와 같은 해상도를 줄 수 있으나 충격파와 같은 비선형 현상을 해상하기 위해서 upwind 전략을 사용하거나 인위적인 수치점성을 추가해야 한다. ENO scheme은 강건한 반면 계산을 위해 포함하는 stencil의 모든 정보를 이용하지 않으므로 정확도 향상의 여지가 있고 adaptive stencil의 적용과정에서 수렴성에 문제를

\*1 정회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

\*2 정회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

\*E-mail : dehee@kaist.ac.kr, jhkwon@kaist.ac.kr

일으킬 수 있으므로 WENO 기법이 각광받고 있다. WENO scheme의 단점으로는 긴 계산시간과 과도한 수치점성을 들 수 있다.

Yee 등은 필터링 개념을 사용하는 고차 정확도 수치기법(YSD 기법이라 칭함)을 개발하였다[4]. Yee의 수치기법은 고차의 central difference scheme이나 compact scheme을 이용해서 수치유속(numerical flux)을 구하고 수치해의 불안정성을 막고 충격파를 해상해내기 위해 충격파 포획기법의 수치점성 부분을 추가하는 방법이다. 또한, 수치점성을 줄이기 위해 Harten이 제안한 ACM(Artificial Compression Method)을 수치점성 부분에 적용함으로써 5차 정확도 WENO scheme(이후로 WENO5라 칭함)의 결과에 버금하는 해상도를 보여 주었다. Garnier 등[5]은 MUSCL, ENO, WENO 필터를 제안하고 이것들과 YSD scheme을 이용해서 비정상 유동을 해석하였다. Kim 등[6]은 WENO5 scheme의 수치점성을 간략화 하여 YSD scheme에 적용하였다.

이상에서 기술된 고차정확도 수치기법과는 다른 접근방법으로 지난 수십년간 꾸준히 개발되어 온 hybrid scheme을 들 수 있다. 유동이 부드럽게 변하는 부분에서는 중앙차분연산자를 사용하고 급변하는 부분에서는 강건한 TVD scheme이나 ENO 계열의 수치기법을 적용함으로써 두 기법이 가지는 장점을 제대로 살릴 수 있다.

Adams와 Shariff[7]는 비보존적인 compact scheme과 ENO scheme을 조합해서 hybrid compact-ENO scheme을 제안하였다. WENO scheme이 ENO scheme에 비해서 정확도와 수렴성면에서 더 좋은 특성을 가지므로 Pirozzoli[8]는 hybrid compact-WENO scheme을 제안하였다. WENO scheme과의 결합을 위해 보존적인 compact scheme을 개발하여 사용하였고 이를 통해 보존적인 WENO scheme과의 결합을 용이하게 했을 뿐 아니라 경계 조건에 관계없이 hybrid scheme의 보존성을 만족시켰다. 이를 이어 Ren 등[9]은 compact scheme과 WENO scheme 간의 급격한 변환을 막기 위해 연속성을 가지는 가중함수(weighting function)를 설계하였고 Roe type의 characteristic-wise hybrid scheme을 개발함으로써 Pirozzoli의 component-wise hybrid scheme보다 향상된 정확도를 얻을 수 있음을 보였다. 본

논문에서는 6차의 중앙차분 연산자를 위한 격자경계의 중앙유속과 WENO5 scheme을 특성공간(characteristic space)에서 결합시킴으로써 hybrid scheme을 얻고 개발된 수치기법을 1차원 충격파/난류 상호작용, 자유류에서의 와류의 대류, double Mach reflection 등의 비점성 문제에 적용하고 수치기법이 가지는 특성 및 효율을 검토하였다.

## 2. 지배 방정식 및 공간 이산화

### 2.1 지배방정식

2차원 비정상 압축성 Euler 방정식을 직교좌표계에서 미분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{11} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{21} p \\ \rho u_i H \end{pmatrix} \quad (2)$$

이고,  $\rho, u_i, p, E, H$ 는 각각 밀도, 각방향의 속도 성분, 압력, 총에너지, 총엔탈피를 나타낸다.

### 2.2 공간 이산화

#### 2.2.1 WENO5 Scheme

Jiang과 Shu[2]에 의해 제안된 WENO-LF scheme을 이용해 격자 경계면에서 수치유속을 구하는 과정은 다음과 같다.

- (1) Projection to the characteristic space
- (2) Global Lax-Friedrichs flux splitting
- (3) WENO interpolation
- (4) Reverse projection

보존변수와 비점성 유속을 characteristic space로 사영할 때 비점성 유속의 자코비안 행렬의 left eigenvector,  $R_{i+1/2}^{-1}$ 를 이용한다.

$$q_k = R_{i+1/2}^{-1} Q_k, f_k = R_{i+1/2}^{-1} F_k, k = i-2, \dots, i+3 \quad (3)$$

Lax-Friedrichs flux splitting을 이용하면,

$$f^{(n)\pm} = \frac{1}{2} (f^{(n)} \pm \lambda_{\max}^{(n)} q^{(n)}) \quad (4)$$

여기서, 고유치  $\lambda_{\max}^{(n)}$ 는 해석하는 전유동장에 걸쳐  $\lambda_{\max}^{(n)} = \max |\lambda_i^{(n)}|, i=1, \dots, N$ 로 정의된다. 위첨

자  $l$ 은 각 특성공간을 의미한다.

양과 음으로 분할된 격자중심의 유속들은 WENO interpolation을 통해 5차 정확도로 재구성되며 재구성된 유속,  $\bar{f}^{MLZ}$ 을 통해 수치유속은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{f}_{i+1/2} = \bar{f}^{+i+1/2} + \bar{f}^{-i+1/2} \quad (5)$$

마지막으로, 역변환하면  $\bar{F}_{i+1/2} = R_{i+1/2} \bar{f}_{i+1/2}$ 의 비점성 수치유속을 구할 수 있다. 일련의 WENO 수치유속을 구하는 과정은 Jiang과 Shu[2]의 논문에서 자세히 기술되어 있다.

### 2.1.2 Central Flux Schemes

4차의 차분 정확도를 위해 격자 경계면에서 central flux scheme은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+1/2} &= \frac{1}{12} (-f_{i-1} + 7f_i + 7f_{i+1} - f_{i+2}) \\ \bar{f}_{i-1/2} &= \frac{1}{12} (-f_{i-2} + 7f_{i-1} + 7f_i - f_{i+1}) \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)을 사용하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i &= \frac{1}{h} (\bar{f}_{i+1/2} - \bar{f}_{i-1/2}) \\ &= \frac{1}{12h} (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}) \\ &\quad + O(h^4) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,  $h$ 는 격자 간격을 나타낸다. 같은 방법으로, 6차 정확도 central difference scheme을 위해 격자 경계면에서의 central flux scheme은

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+1/2} &= \frac{1}{60} (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 37f_i \\ &\quad + 37f_{i+1} - 8f_{i+2} + f_{i+3}) \\ \bar{f}_{i-1/2} &= \frac{1}{60} (f_{i-3} - 8f_{i-2} + 37f_{i-1} \\ &\quad + 37f_i - 8f_{i+1} + f_{i+2}) \end{aligned} \quad (8)$$

이고, 6차 정확도 central difference scheme은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i &= \frac{1}{h} (\bar{f}_{i+1/2} - \bar{f}_{i-1/2}) \\ &= \frac{1}{60h} (-f_{i-3} + 9f_{i-2} - 45f_{i-1} \\ &\quad + 45f_{i+1} - 9f_{i+2} + f_{i+3}) + O(h^6) \end{aligned} \quad (9)$$

4차 정확도와 6차 정확도의 central difference scheme을 위한 central flux scheme은 각각 영역의 경계와 내부에서 hybrid scheme에 적용된다.

### 2.1.3 Hybrid Central-WENO Scheme

격자 경계면에서 hybrid central-WENO scheme은 다음의 식과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+1/2, hybrid} &= \sigma_{i+1/2} \bar{f}_{i+1/2, central flux scheme} \\ &\quad + (1 - \sigma_{i+1/2}) \bar{f}_{i+1/2, weno scheme} \\ \bar{f}_{i-1/2, hybrid} &= \sigma_{i-1/2} \bar{f}_{i-1/2, central flux scheme} \\ &\quad + (1 - \sigma_{i-1/2}) \bar{f}_{i-1/2, weno scheme} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $\sigma$ 는 가중함수로  $0 \leq \sigma \leq 1$ 의 범위를 가진다.  $\sigma$ 가 0이면 WENO5 scheme이 되고 1이면 central flux scheme이 된다. 특성공간에서 구성된 hybrid scheme은 right eigenvector 행렬을 이용해 실공간의 수치유속을 구할 수 있도록 변환된다.

### 2.1.4 Switch

가중함수는 hybrid scheme의 성능에 결정적인 영향을 미친다. 수치점성이 과도한 WENO5 scheme이 가능한 좁은 영역에 걸쳐 적용되도록 하면 넓은 부분에서 central flux scheme이 우세해지고 해의 정확도는 향상되는데 반해 수치기법의 강건성은 떨어진다. 따라서, 정확도와 강건성을 확보하기 위해서는 두 sub-scheme의 가중치를 어떻게 주느냐가 관건이라 할 수 있다. 해의 정확도와 계산 효율을 위해서는 WENO5 scheme이 되도록 적게 계산되어야 한다. Ren 등[9]이 제안한 switch가 Adams와 Shariff[7]의 switch와 ACM switch[4] 보다 좋은 결과를 주며 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1/2} &= \min\left(1, \frac{r_{i+1/2}}{r_c}\right) \\ r_{i+1/2} &= \min(r_i, r_{i+1}) \\ r_i &= \frac{|\Delta f_{i+1/2} \Delta f_{i-1/2}| + \epsilon}{(\Delta f_{i+1/2})^2 + (\Delta f_{i-1/2})^2 + \epsilon} \\ \epsilon &= \frac{0.9 r_c}{1 - 0.9 r_c} \zeta^2 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,  $r_c \zeta$ 은 threshold 값을 의미하며  $r_c$ 는  $0 < r_c \leq 1$ 로 정해지고,  $\zeta$ 는  $10^{-3} \sim 10^{-4}$  정도의 값으로 주게 된다. 식(11)은 강건성을 위해  $r_i$ 를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$r_i = \frac{|\Delta f_{i+1/2} \Delta f_{i-1/2}|}{(\Delta f_{i+1/2})^2 + (\Delta f_{i-1/2})^2 + \epsilon} \quad (12)$$

식(12)를 사용하면 WENO5 scheme이 차지하는 영역이 늘어나므로 계산시간이 증가하지만 강건성

은 상당히 좋아진다. 식(11)의  $r_{i+1/2}$ 을 약간 변형시켜서 강건성을 확보하는 다른 방법은 다음과 같다.

$$r_{i+1/2} = \min(r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}) \quad (13)$$

식(13)을 사용하고  $r_{i+1/2}/r_c$ 가 1 미만인 격자면에 대해서 식(12)와 식(13)을 사용하면 강건성을 더 높일 수 있다. 식(11)을 type A, 식(12)가 쓰이면 type B, 식(12)와 식(13)을 식(11)과 사용하면 type C라 칭하기로 한다.

### 2.3 시간 적분법

시간전진을 위해서 4차 정확도의 Runge-Kutta 다단계 시간 적분법이나 3차 정확도의 Shu 다단계 시간 적분법(TVD 조건 만족)이 사용될 수 있다. 본 연구에서는 4차 정확도의 Runge-Kutta 시간 적분법을 사용하였다. 그 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= Q^n + \frac{1}{2} \Delta t L(Q^n) \\ Q^{(2)} &= Q^n + \frac{1}{2} \Delta t L(Q^{(1)}) \\ Q^{(3)} &= Q^n + \Delta t L(Q^{(2)}) \\ Q^{n+1} &= Q^n + \left[ \frac{1}{6} \Delta t L(Q^n) + 2L(Q^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + 2L(Q^{(2)}) + L(Q^{(3)}) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,  $L(Q)$ 는 비점성 유속을 나타낸다.

## 3. 수치 계산

### 3.1 1D Shock/Turbulence Interaction

Shu와 Osher[1]의 충격파/난류 상호작용 1차원 모델로 수치기법이 충격파와 다양한 요동을 제대로 해상해 낼 수 있는지를 보기위한 문제이다. 움직이는 마하수 3의 충격파와 요동하는 밀도 sine 파와의 상호작용을 해석하게 된다. 문제의 개요는 Fig. 1과 같고 초기 유동 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho_L &= 3.857143, \quad \rho_R = 1 + 0.2 \sin(5x) \\ u_L &= 2.269369, \quad u_R = 0 \\ P_L &= 10.33333, \quad P_R = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $x=-4$ 의 좌우측을 아래첨자  $L$ 과  $R$ 로 나타내었다. 유동장은  $-5 \leq x \leq 5$ 이고 사용되는 격자계는 균일한 간격의 격자점으로 구성된다. 격자점 1601개와 WENO5 scheme을 사용해서 구한 해를 정확한 해로 보고 비교하도록 한다. 무차원

시간  $t=1.8$ 까지 시간전진을 시킨다. CFL 수는 0.5로 주었다. 제안된 hybrid scheme을 위해 switch는 type A,  $\xi$ 는  $10^{-3}$ 으로 주었으며  $r_c$ 는 0.3으로 주었다. Fig. 2는 2차 정확도 upwind TVD scheme, WENO5 scheme, Pirozzoli의 hybrid scheme을 사용해서 구한 수치해로 요동을 제대로 잡아낼 수가 없다. 모두 201개의 균일한 격자점을 사용하였고 오른쪽 아래만 401개의 격자점을 사용한 결과이다. Fig. 3은 Ren 등의 hybrid scheme과 제안된 hybrid scheme을 사용한 결과로 거의 비슷한 결과를 주고 있는데 Fig. 2에서 401개의 격자점과 WENO5 scheme을 사용한 수치해와 비교하면 절반의 격자점으로 거의 같은 결과를 얻을 수 있음을 볼 수 있고 오히려 201개를 사용한 결과가  $x=0.6$  부근의 접촉 불연속면을 약간 더 잘 해상해 낼 수 있다. 고차 정확도 수치기법에서 정확도와 더불어 고려해야하는 것은 계산시간으로 계산효율을 위해서는 hybrid scheme이 충격파 포획기법을 더 적게 계산하도록 해야 한다. TVD scheme의 계산 시간을 1로 보면 WENO5 scheme은 2.08, Pirozzoli의 hybrid scheme은 2.52, Ren 등의 hybrid scheme은 5.0, 제안된 hybrid scheme은 1.8이다. Pirozzoli의 hybrid scheme은 스칼라 삼대각 행렬을 풀이해야 하고 Ren 등의 hybrid scheme은 블록 삼대각 행렬을 풀어야 하므로 계산시간이 많아지게 된다. 이에 비해 제안된 hybrid scheme은 그런 과정이 불필요하므로 적은 계산시간으로도 Ren 등의 hybrid scheme과 비슷한 정확도를 줄 수 있다.

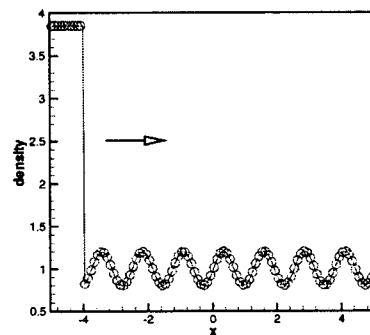


Fig. 1 Initial condition of the shock/turbulence interaction

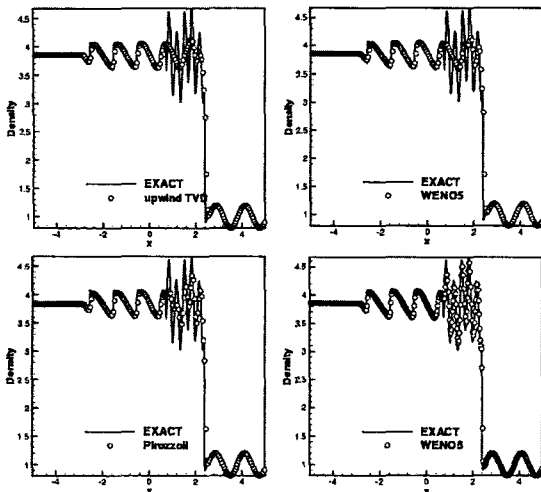


Fig. 2 201 nodes: Upwind TVD(top left), WENO5 (top right), Pirozzoli's hybrid(bottom left), 401 nodes: WENO5(bottom right)

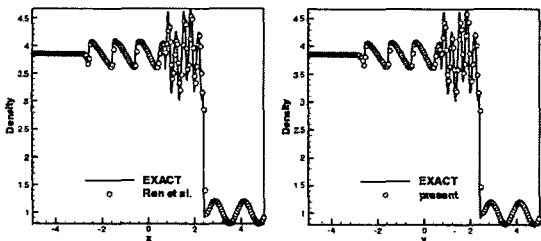


Fig. 3 Ren et al.'s hybrid(left), present central-WENO hybrid(right), 201 nodes

3.2 Advection of an Isentropic Vortex

수치기법이 긴 시간 적분을 통해서 어느 정도 정확도가 유지되는지 확인하기 위한 문제로 자유류에 등엔트로피 와류를 흘려보내는 문제이다[4]. 유동 조건은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 p_\infty &= \rho_\infty = 1 \\
 (\delta u, \delta v) &= \frac{\beta}{2\pi} e^{(1-r^2)/2} (-\bar{y}, \bar{x}) \\
 \delta T &= -\frac{(\gamma-1)\beta^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

여기서,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x-x_0, y-y_0)$ ,  $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ 이고  $(x_0, y_0)$ 는 와류의 중심 좌표이다.  $\beta$ 는 와류의 강도를 나타내는 상수로서 5로 준다.

유동장은  $[-5,5] \times [0,10]$ 으로  $81 \times 80$ 의 격자점이 사용되었다. 시간 간격은 0.04로 두며, 경계조건은

주기조건(periodic boundary condition)이 적용된다. 시간간격이 10일때 마다 와류는 원래 자리로 되돌아오며 1주기가 된다. 유동이 비점성이므로 초기의 와류가 그대로 유지되어야 하며 수치기법의 오차에 의해 와류가 변형되는 정도를 판단해 수치기법의 정확도를 알 수 있다.

제안된 hybrid scheme을 위해 type A switch,  $r_c=0.1, \xi=10^{-3}$ 으로 주었다.

Fig. 4는 초기 와류의 형태와 경계조건을 보여주고 있다. Fig. 5는 와류가 초기와류의 중심을 100번 지난후의 밀도 선도를 나타내고 있는데 WENO5 scheme의 경우 초기 형태에 비해 서서히 뭉개지고 있으나 제안된 hybrid scheme의 경우는 초기와 거의 비슷한 형태를 유지하고 있다. Fig. 6은  $y=0$ 에서 밀도 분포를 보여 준다. 10주기가 되었을 때는 WENO5 scheme이나 hybrid scheme 모두 수치점성이 거의 영향을 못미치고 있으나 100주기가 되면 WENO5 scheme의 수치점성이 밀도 분포 곡선을 무더지게 만들고 있다. hybrid scheme은 100주기가 되어서도 초기와 거의 같은 수치해를 보여주고 있다.

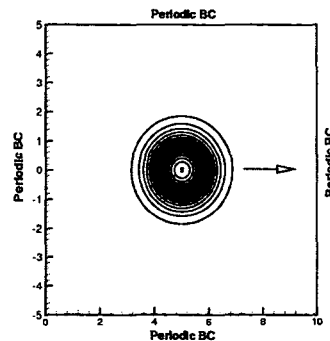


Fig. 4 Initial vortex contour

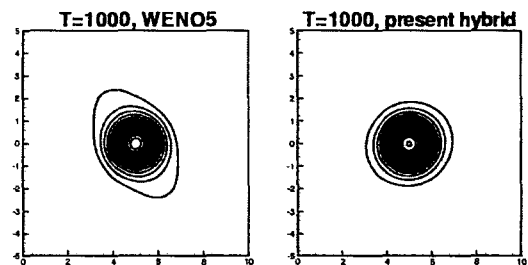


Fig. 5 Density contours at  $t=1000$ , WENO5(left), present hybrid(right)

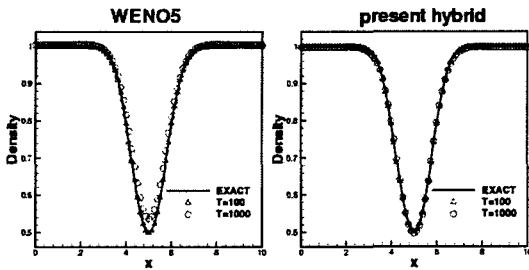


Fig. 6 Density distributions at  $t=100, 1000$ , WENO5(left), present hybrid(right)

### 3.3 Double Mach Reflection

이 예제는 고해상도 수치기법의 검증용으로 많이 이용된다[10]. 문제의 개요는 Fig. 7에 나타내었다. 반사 벽면과  $60^\circ$ 의 각을 이루는 마하수 10의 충격파가 공기중( $\gamma=1.4$ )으로 진행하면서 복잡한 유체의 거동을 만들어 낸다. 이 문제의 계산영역은 가로 4, 세로 1 단위이다. 초기에 아랫면의  $x=1/6$ 점에서 계산영역의 윗면  $y=1$ 로 충격파가 뻗어 나간다. 충격파가 지나지 않는 앞쪽의 비교란 영역은 밀도 1.4, 압력 1의 구성을 가진다. 반사벽면은 계산영역의 아랫면으로  $x=1/6\sim 4$ 이다. Post-shock condition이 충격파의 왼쪽 경계에 적용되고, 오른쪽 경계에는 유출 경계조건이 적용된다. 위쪽 경계에는 마하수 10의 충격파가 정확한 전진을 할 수 있도록 경계조건이 적용된다. 모든 결과는  $t=0.2$ 까지 시간 전진하여 얻었고 CFL 수는 0.5로 주었다. 사용된 격자계는 균일한 격자계로  $721 \times 201$ 개의 격자점으로 구성된다. 제안된 hybrid scheme을 위해 type C switch,  $r_c=0.45$ ,  $\xi=10^{-4}$ 로 주었다.

Fig. 7은 초기조건을 보여주고 있으며 Fig. 8과 9는 무차원 시간 0.2일 때의 밀도 선도를 나타내고 있는데 WENO5 scheme의 경우 slip line의 vortical structure나 roll-up 영역의 해상도에 있어서 제안된 hybrid scheme을 이용한 결과에 미치지 못한다. double Mach stem에서 오른쪽의 강한 Mach stem은 거의 수직 충격파로 형성되므로 Ren 등의 hybrid scheme은 Roe type을 사용했기 때문에 carbuncle 현상이 일어나게 되며 특별한 entropy fix를 주어야 하나 본 기법은 특별한 처리없이 안정적으로 수치해를 구할 수 있다. Ren 등의 결과[9]와 유사한 결과를 준다.

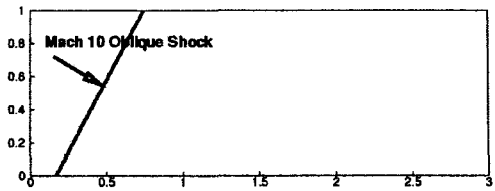


Fig. 7 Initial condition of double Mach reflection

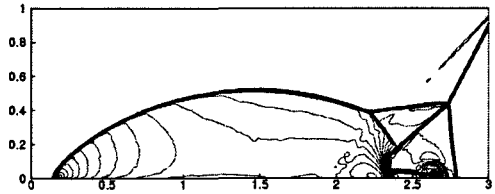


Fig. 8 Density contours at  $t=0.2$ , WENO5

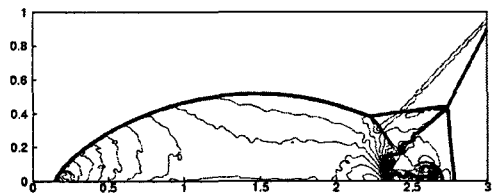


Fig. 9 Density contours at  $t=0.2$ , present hybrid

## 4. 결 론

본 논문에서는 central flux scheme과 WENO5 scheme을 결합하여 hybrid scheme을 구성하였고 강건한 계산을 위해 수정된 switching 방법을 제시하였다. 여러 수치예제에 적용한 결과 계산 효율이 매우 높고 정확도에 있어서도 좋은 특성을 보임을 확인하였다.

## 참고문헌

- [1] Shu, C. W. and Osher, S., 1989, "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock Capturing Schemes II," *Journal of Computational Physics*, Vol.83, pp.32-78.
- [2] Jiang, G. S. and Shu, C. W., 1996, "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.126, pp.202-228.



- [3] Lele, S. K., 1992, "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution," *Journal of Computational Physics*, Vol.103, pp.16-42.
- [4] Yee, H. C., Sandham, N. D., and Djomehri, M. J., 1999, "Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic-Based Filters," *Journal of Computational Physics*, Vol.150, pp.199-238.
- [5] Garnier, E., Sagaut, P., and Deville, M., 2001, "A Class of Explicit ENO Filters with Application to Unsteady Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.170, pp.184-204.
- [6] Kim, D. and J. H. Kwon, 2004, "A Low Dissipative and Dispersive Scheme with a High Order WENO Dissipation for Unsteady Flow Analyses," AIAA 2004-2705.
- [7] Adams, N. A. and Shariff, K., 1996, "A High-Resolution Hybrid Compact-ENO Scheme for Shock-Turbulence Interaction Problems," *Journal of Computational Physics*, Vol.127, pp.27-51
- [8] Pirozzoli, S., 2002, "Conservative Hybrid Compact-WENO Schemes for Shock-Turbulence Interaction," *Journal of Computational Physics*, Vol.178, pp.81-117.
- [9] Ren, Y. X., Liu, M., and Zhang, H., 2003, "A Characteristic-wise Hybrid Compact-WENO Scheme for Solving Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol.192, pp.365-386.
- [10] Woodward, P. and Colella, P., 1984, "The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *Journal of Computational Physics*, Vol.54, pp.115-173.