

## 고마하수 유동에서 Roe 해법의 문제와 해결

원 수 희<sup>\*1</sup>, 최 정 열<sup>\*2</sup>, 정 인 석<sup>\*3</sup>

## Issues and Solutions of Roe Schemes for High Mach Number Flows

S. H. Won, J. Y. Choi and I. S. Jeung

In the CFD area, the numerical analysis of high Mach number flow over a blunt-body poses many issues. Various numerical schemes have been developed to cover the issues, but the traditional schemes are still used widely due to the complexities of new schemes and intricacy of modifying the established codes. In the present study, the well-known Roe's FDS based on TVD-MUSCL scheme is used for the solution of very high Mach number three-dimensional flows posing carbuncle and non-physical phenomena in numerical analysis. A parametric study was carried out to account for the effects of the entropy fixing, grid configurations and initial condition. The carbuncle phenomena could be easily overcome by the entropy fixing, and the non-physical solution could be eliminated by the use of the modified initial condition regardless of entropy fixing and grid configurations.

**Key Words:** Roe의 기법(Roe's scheme), 고마하수 유동(High Mach number flows), Carbuncle 현상(Carbuncle phenomena), 비물리적 해(Non-physical solution), 격자 형상(Grid Configuration), 수정된 초기조건(Modified Initial Condition)

## 1. 서 론

극초음속 유동은 복잡한 기체반응을 수반한 높은 엔탈피 유동으로서 물리적 현상의 모델링이 중요하지만, 정확한 해석을 위해서는 적절한 수치기법의 선택 또한 중요하다. 극초음속 유동계산을 위한 공간 이산화 기법은 높은 수준의 정확도와 강건성, 그리고 효율성 등이 요구되는데, TVD (Total Variation Diminishing) 기반의 풍상차분방법이 개발된 이후, 초음속이나 극초음속 유동의 연구는 지난 20년간 전산유체역학을 이용한 급속한 발전이 있었다.

풍상차분법은 대개 FVS (Flux Vector Splitting) 와 FDS (Flux Difference Splitting)로 나누어진다. Steger-Warming[1]이나 van Leer[2]의 방법과 같

은 초기의 FVS 기법은 강건성과 효율성 면에서 장점을 가지며, 강한 충격파나 팽창 현상 등의 초음속 유동을 해석하는데 중요한 positivity[3] 조건을 만족시키지만, 과도한 수치점성 때문에 점성 유동의 계산 시 정확성이 떨어지는 문제점이 있어서 현재는 많이 이용되지 않는다. Roe[4]의 방법과 같은 FDS 기법은 국소 Riemann 문제의 결과를 이용하여 파의 진행을 제어면에서 모사함으로써 일반적으로 정확한 결과를 보여준다. Roe의 방법은 접촉면과 음속 천이점에서 플럭스가 영이 되는 성질로 전단층이나 충격파의 정확한 포착이 가능하며, 수학적 완결성으로 인하여 가장 널리 이용되고 있는 해석 방법으로 여겨진다. 그러나 엔트로피 조건을 만족시키지 못해 비물리적인 해를 보여준다는 점과, 매우 급격하게 팽창하는 영역과 같은 국소 선형화가 타당하지 않은 영역에서 강건성 및 carbuncle 현상 등의 문제점이 있다.

이러한 초기 풍상 차분 방법들의 문제점을 해결하기 위해 AUSM 계열의 해법이나 BGK 방법 등 다

\*1 학생회원, 서울대학교 대학원 항공우주공학과

\*2 정회원, 부산대학교 항공우주공학과

\*3 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

\*E-mail : aerochoi@pusan.ac.kr

양한 풍상차분법들이 새로이 개발되었고, TVD 기법의 단조성 문제를 해결하기 위한 ENO/WENO 기법 등 많은 새로운 기법들이 연구되어 이용되고 있다. 또한 CE/SE 방법과 같이 기존의 FDM/FEM/FVM으로 분류할 수 없는 새로운 해법도 개발되어 기존 해법이 보여주는 결과 이상의 좋은 결과를 보여주고 있다. 그러나 수학적 복잡성이나 번거로움으로 인하여 새로운 기법이 다양한 분야에서 널리 이용되고 있지는 않으며, 많은 문제에서 기존 보유한 코드를 활용하는 것이 편리한 면이 있다.

본 연구에서는 전산 유체 해석에서 여러 가지 문제점이 존재하여 여전히 어려운 문제로 여겨지고 있는 무딘 물체 주위의 고마하수 유동을, 기존에 가장 널리 이용되고 있다고 여겨지는 TVD-MUSCL 기반의 Roe의 FDS 수치해법을 이용하여 해결할 수 있는 계산 격자나 초기 조건 등의 해석 기법 외적인 문제의 가이드라인을 제시하고자 한다. 해석의 예로서는 행성 대기권 재돌입 물체가 가질 수 있는 충분히 큰 속도인 마하수 30의 유동이 반구형 무딘 물체 주위에 들어오는 것을 가정하였으며, Roe's FDS 수치해법에서 발생하는 정체점 부근의 carbuncle 현상 및 충격파가 물체 표면에 부착되는 비물리적인 현상 등 3차원 해석을 통해 나타나는 비물리적 해의 해결 방안에 연구의 주안점을 두었다.

## 2. 지배방정식과 수치해법

### 2.1 지배방정식

3차원 Navier-Stokes 방정식의 질량보존, 운동량보존, 에너지보존 방정식을 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z}$$

유동과 플럭스 벡터는 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{bmatrix}, E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \beta_x \end{bmatrix}, F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yz} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \beta_y \end{bmatrix}, G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \end{bmatrix}$$

경계조건으로 유입류는 물리적인 경계조건이 주어졌으며 유출류는 외삽을 통한 수치적 경계조건으로 구해졌다. 벽면 경계조건은 점착조건을 사용하였으며 온도에 대한 경계조건으로 단열벽면 조건을 사용하였다.

### 2.2 수치해법

수치적인 해석을 위하여 지배 방정식은 유한체적법을 이용하여 이산화 하였으며, 대류 플럭스는 일반 좌표계에서 minmod 제한자를 이용하는 TVD-MUSCL 기반의 Roe의 FDS 기법을 사용하여 차분하였다. 점성항의 차분에는 중심 차분법을 이용하였고, LU-SGS 기법을 이용하여 완전 내재적인 시간적분 기법을 수행하였다. 해석 방법의 구체적인 내용은 Choi 등[5]의 것과 동일하다.

## 3. 지배방정식과 수치해법

### 3.1 Carbuncle 및 비물리적 해의 발생

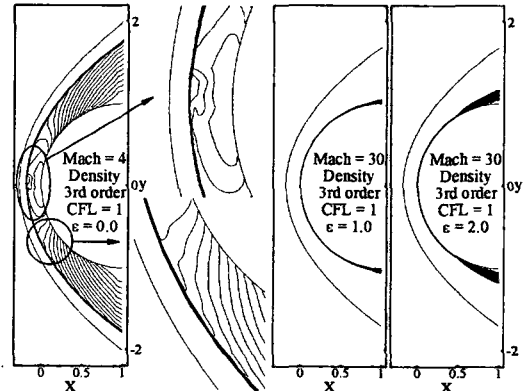


Fig.1 Carbuncle and non-physical solutions of high Mach No. flow over a blunt-body.

Roe의 FDS 기법을 이용한 초음속 유동해석에서 무딘 물체 정체점 부근의 carbuncle 현상은 잘 알려져 있으며, 엔트로피 보정을 통해 어느 정도 해결할 수 있다고 알려져 있다. 한편, 정체점 부근에서 유동은 발생하지 않고 경사 충격파가 물체 표면에 부착되는 형태로 빠르게 수렴하는 비물리적 해가 해법에 관계없이 자주 나타나는데, 이 문제는 엔트로피 보정 등을 통해서도 쉽게 해결되지 않은 경향을 보여준다. Fig. 1은 마하수 4 및 마하수 30의 유동에서 나타나는 carbuncle 현상과 비물리적 해의 예이다.

3.2 Carbuncle 현상의 제거

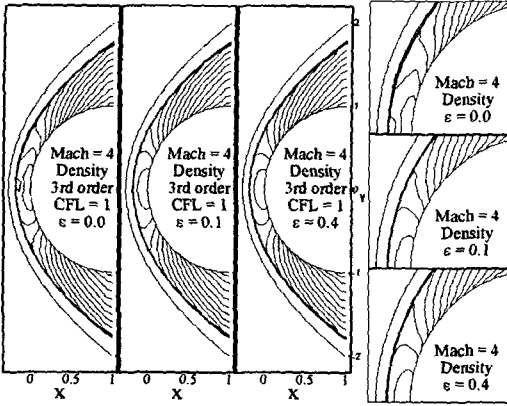


Fig. 2 Carbuncle according to entropy fixing parameter at Mach=4.

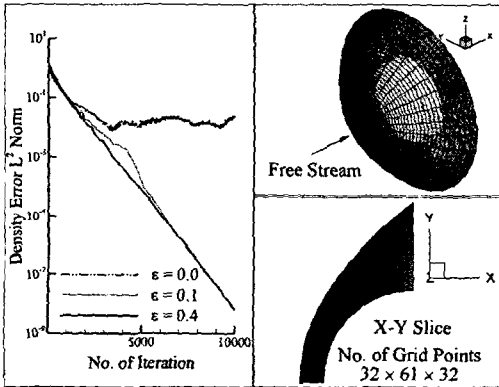


Fig. 3 Convergence history and 3-D grid system of blunt-body at Mach=4.

Table 1 Numerical experiments according to entropy fixing parameter and spatial accuracy at Mach=30. (CFL=1.0)

Mach=30	1 <sup>st</sup> order	2 <sup>nd</sup> order	3 <sup>rd</sup> order
ε=0.4	N/P	N/P	N/P
ε=0.6	P	N/P	N/P
ε=0.8	P	N/P	N/P
ε=1.0	P	N/P	N/P
ε=2.0	P(EAD)	P	N/P
ε=3.0	P(EAD)	P	P
ε=4.0	P(EAD)	P(EAD)	P
ε=5.0	P(EAD)	P(EAD)	P(EAD)
ε=6.0	NaN	NaN	NaN

P: Physical Solution, N/P: Non-Physical Solution,

EAD: Excessive Artificial Dissipation, NaN: Not a Number

Carbuncle 현상이 발생하는 문제점은 엔트로피 보정을 통한 강건성 증가로 쉽게 해결할 수 있다. Fig. 2는 엔트로피 보정변수  $\epsilon$  값을 변화시켜 carbuncle 현상을 제거하는 과정이다.  $\epsilon=0$ 일 경우 정체점 부근에서 등밀도선의 심각한 일그러짐 현상을 볼 수 있다. 그러나  $\epsilon=0.1$ 의 경우 정체점에서 다소 벗어난 충격과 주위에서만 등밀도선의 일그러짐 현상을 볼 수 있으며,  $\epsilon=0.4$  이상에서는 보이지 않고 있다. Fig. 3은 계산에 사용된 격자계와 수렴과정을 나타낸 그림이다. 무단물체에 대한  $32 \times 61 \times 32$ 의 3차원 격자계가 사용되었으며,  $\epsilon$  값의 증가에 따라 수렴특성 또한 개선되고 있다.

Table 1에 마하수 30의 유동에 대해 엔트로피 보정변수와 공간정확도에 따른 계산결과를 나타내었다. 전체적으로 CFL=1이 이용되었으며, 고마하수 유동으로 인해 그 이상의 CFL 수의 사용은 어려웠다. 마하수 30의 유동과 같은 무단물체 주변의 고마하수 유동을 해석할 경우 엔트로피 보정변수가 감소할수록, 고차 공간정확도로 갈수록 수렴하는 물리적인 해를 구하기가 쉽지 않았다. 또한 1차 공간정확도에서는 비교적 넓은 엔트로피 보정변수 범위에서 계산의 수행이 가능하였지만 과도한 엔트로피 보정변수 값은 해의 정확성에 악영향을 미쳐 전 엔탈피의 감소 및 이로 인한 물성치의 과소추정을 초래하였다. Table 1에서 P는 물리적인 해, N/P는 비물리적인 해, EAD는 과도한 인공 소산으로 인한 비물리적인 해, NaN는 전산유체역학 프로그램이 수행되지 않는 경우를 각각 의미하며, 이후에 Table에도 같은 방법으로 적용된다.

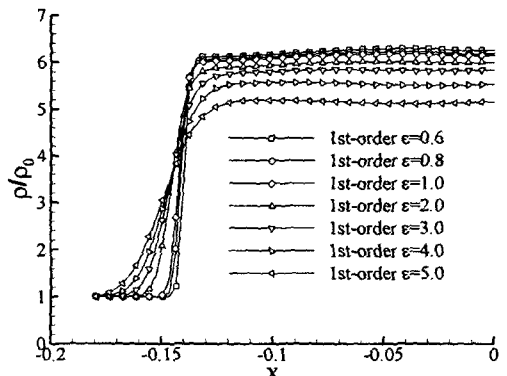


Fig. 4 Density along stagnation-line with 1st-order spatial accuracy at Mach=30.

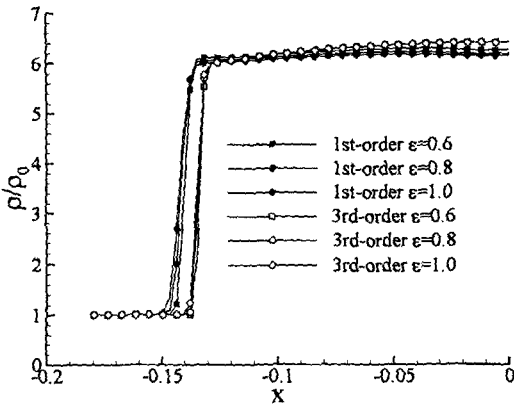


Fig. 5 Density along stagnation-line with 1st and 3rd-order spatial accuracy at Mach=30.

Fig. 4는 Table 1의 1차 공간정확도 결과를 바탕으로 엔트로피 보정에 따른 불연속면의 퍼짐현상과 밀도값의 과소측정을 나타내었다. 밀도값은 자유류로부터 정체점에 이르는 유선을 따라 측정되었다. 엔트로피 보정변수의 증가로 인한 과도한 점성소산은 불연속면의 퍼짐현상과 충격파 이후 밀도값의 과소측정을 초래한다.  $\epsilon=1$ 까지는 비교적 정확한 충격파 포착과 밀도값의 측정을 보여주고 있으나 그 이상에서는 해의 정확성이 크게 저하되는 것을 볼 수 있다. Fig. 5는 공간정확도에 따른 영향을 살펴보기 위해 같은 엔트로피 보정변수에서 공간정확도만을 변화시켜 비교해 보았다. 엔트로피 보정변수는 비교적 해의 정확성이 확보되는  $\epsilon=1$  이하로 한정하였으며, 여기서 사용된 3차 공간정확도 계산결과는 다음절에서 설명될 가상 충격파를 이용한 결과이다. 공간정확도에 따라 밀도값은 큰 영향을 받지 않으나 충격파 위치의 이동을 확인할 수 있다.

위의 내용을 종합해 볼 때 고마하수 유동해석에 있어 carbuncle 현상과 함께 비물리적인 해의 발생이 중요하며, 이를 제거하기 위한 엔트로피 보정이 필요함을 알 수 있다. 그러나 과도한 엔트로피 보정은 해의 정확성을 떨어뜨리며, 또한 높은 마하수로 인한 CFL 수의 한계로 인해 효율적인 계산의 수행이 어렵다. 결론적으로 해의 정확성을 위해 고차의 공간정확도 및 가능한 작은 엔트로피 보정변수가 사용되어야 하며, 계산의 효율성을 위해서는 큰 CFL 수가 필요하다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해 다음과 같이 격자계 형상에 따른 영향과 초기에 가상의 충격파를 이용한 문제해결을 살펴본다.

### 3.3 격자계 형상에 따른 효과

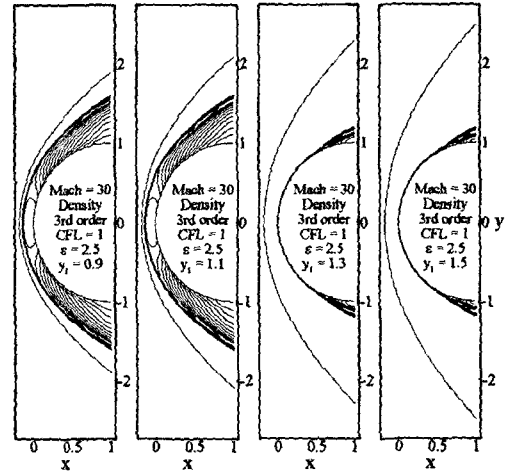


Fig. 6 Physical and non-physical solutions according to grid configuration.

Fig. 6은 가상의 충격파가 없는 경우 격자계 형상에 따른 계산결과이다. 충격파 이격거리를 고려하여  $x_0=0.18$ 로 고정하였으며,  $y_1$ 을 변화시켜 가면서 수치 실험이 수행되었다. ( $x_0, y_1$ 의 정의는 Fig. 10을 참고) 해의 정확성을 위해 계산은 3차 공간정확도로 한정하였으며 이로 인해 CFL 수는 1, 엔트로피 보정변수는 비교적 큰 값인 2.5가 사용되었다. 그림에서 보이는 바와 같이  $y_1$ 을 증가시켜감에 따라 충격파가 물체 표면에 부착되는 비물리적인 현상이 나타나고 있다. 이러한 현상은 마하수가 커질수록, 2차원 유동해석보다 3차원 유동해석에서 자주 발생하는 경향이 있다. 이 결과로부터 충격파 형상과 비교적 평행하게 진행되는 잘 작성된 격자계를 이용하는 경우, 비물리적 해를 제거할 수 있음을 확인할 수 있다. 그러나 충격파 형상에 따라 매번 격자계를 바꾸어 주는 것(특히, AOA나 YAW가 존재하는 경우)은 번거로운 일이며, 비물리적인 해를 제거하는 해결방법으로는 한계가 있다.

### 3.4 비물리적 해의 발생 및 제거

비물리적 해가 발생하는 또다른 원인으로는, 비물리적인 초음속 균일 유동 초기 조건으로부터 무한대의 가속도로 시간 전진하여 정상상태 초음속 유동으로 수렴 시키는 시간전진 기법에서 문제를 찾을 수 있다. 그러나 물리적으로 타당한 초기조건을 설정하

기는 간단치 않으므로, 간단한 대안으로써, 균일 유동의 조건으로부터 벽면 조건을 적용하여 얻을 결과를 물체 전방의 일부 영역에 적용하여 가상의 초기 충격파를 형성하여 초기 조건으로 이용하는 방법을 제시한다. Fig. 7의 좌측 그림은 가상의 충격파를 이용하지 않은 경우로 해의 정확성을 위해  $\epsilon=1$ 로 한정하였으며, 이에 따라 공간정확도는 1차 이상으로 확장이 불가능하였고, CFL 수 역시 1이상에서는 계산 수행이 불가능 하였다. 반면 Fig. 7의 가운데 그림은 언급된 방법으로 초기 유동으로 가상의 충격파를 생성한 그림이며, 이를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 3차의 공간정확도를 가진 해를 얻을 수 있었으며, CFL 수도 10 이상으로 증가시킬 수 있었다.

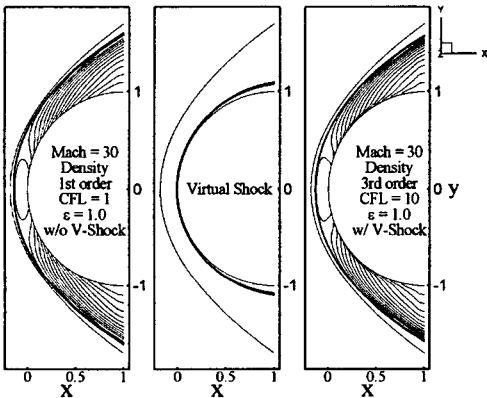


Fig. 7 Calculation results without Virtual Shock and with Virtual Shock.

Table 2 Numerical experiments with Virtual Shock.

Mach=30	3 <sup>rd</sup> order: Initial Cond.	3 <sup>rd</sup> order: Restart Cond.
$\epsilon=0.4$	NaN	NaN
$\epsilon=0.6$	CFL=0.02 Iter=1,000	CFL=10 Iter $\approx$ 5,000
$\epsilon=0.8$	CFL=0.05 Iter=400	CFL=10 Iter $\approx$ 4,000
$\epsilon=1.0$	CFL=0.1 Iter=200	CFL=10 Iter $\approx$ 4,000

NaN : Not a Number

구체적인 수치실험 결과는 Table 2에 정리되어 있으며 정확한 해를 위해서 3차의 공간정확도에 대해

서만 수치실험을 수행하였다. 초기의 가상 충격파 생성을 위해 엔트로피 보정변수에 따라 CFL 수는 0.02-0.1까지 주어졌으며 이에 따른 반복계산 횟수는 1000-200회가 사용되었다. 가상 충격파를 생성한 이후 계산에서는 CFL=10에서 약 4,000-5,000회 정도의 반복계산을 통해 기계오차까지 충분히 수렴하는 결과를 보여주었다.

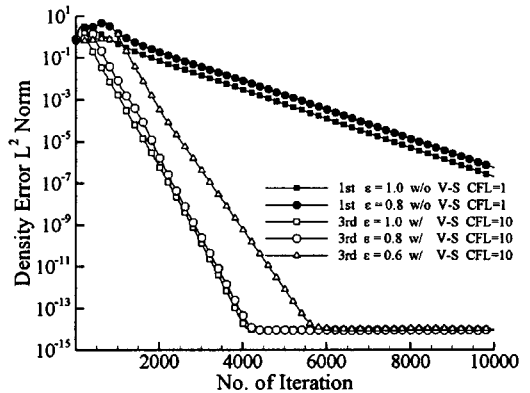


Fig. 8 Convergence history without Virtual Shock and with Virtual Shock.

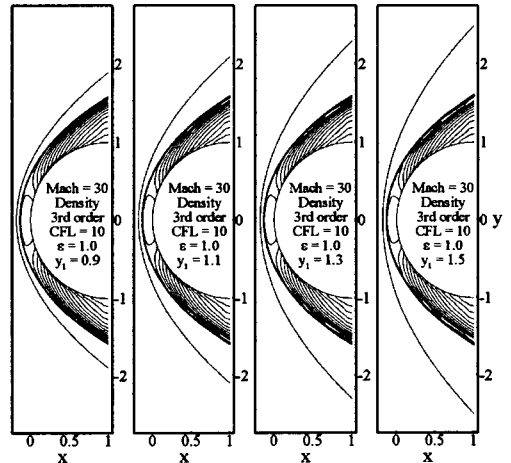


Fig. 9 Physical solutions with Virtual Shock.

Fig. 8은 Table 2의 결과를 바탕으로 가상의 충격파를 이용하지 않은 계산과 이용한 계산 간의 수렴 과정을 비교한 그림이다. 가상의 충격파를 이용하지 않은 경우,  $\epsilon=1.0$  이하에서 계산을 수행하기 위해서는 1차 이상 공간정확도로의 확장 및 1이상의 CFL 수의 사용이 불가능 하였다.  $\epsilon=0.6$ 에서는 계산의 수

행이 불가능 하였으며, 계산이 가능한  $\epsilon=0.8$ 과  $\epsilon=1.0$ 에서도 10,000회의 반복계산을 통해 기계오차까지의 수렴을 보여주지 못하고 있다. 그러나 가상의 충격파를 이용하는 경우, 3차의 공간정확도를 사용해 가상의 충격파 생성에 필요한 반복계산을 포함하여 약 4,000 - 6000회 정도의 반복계산을 통해 기계오차까지 수렴하는 것을 보여주고 있다.

Fig. 9는 앞서 수행된 격자 형상에 따른 수치실험에 가상 충격파를 적용한 결과이다. Fig. 6은 가상 충격파 없이  $\epsilon=2.5$ , CFL=1의 조건에서 계산된 반면, Fig. 9는 가상 충격파를 이용한 결과로서  $\epsilon=1.0$ , CFL=10의 보다 엄격한 조건을 사용하였음에도 모든 격자계에서 수렴된 물리적인 해를 보여준다.

Table 3 Numerical experiments according to grid configuration.

Mach=30	without Virtual Shock (CFL=1, $\epsilon=2.5$ )	with Virtual Shock (CFL=10, $\epsilon=1.0$ )
$y_1=0.7$	P	P
$y_1=0.9$	P	P
$y_1=1.1$	P	P
$y_1=1.3$	N/P	P
$y_1=1.5$	N/P	P
$y_1=1.7$	N/P	P

P: Physical Solution, N/P: Non-Physical Solution

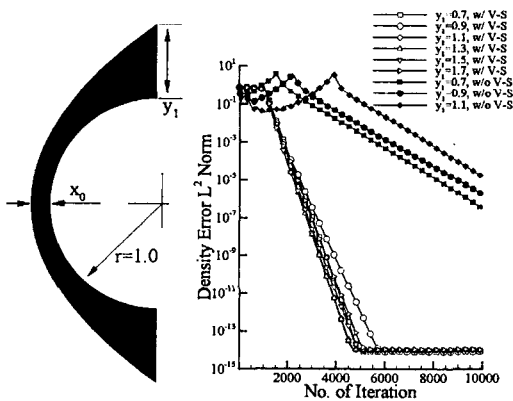


Fig. 10  $x_0$ - $y_1$  definition and convergence history according to grid configuration.

Table 3과 Fig. 10은 격자형상의 변화에 대한 가

상 충격파 유무에 따른 효과를 알아보기 위해 수행된 구체적인 수치실험 결과와 수렴과정을 각각 나타내었다. 가상의 충격파를 사용하는 경우 격자계에 관계없이 모두 수렴된 물리적인 해를 보여주고 있다. 수렴과정의 경우, 가상의 충격파를 사용하지 않으면 격자계가 충격파 형상에서 멀어질수록 수렴 특성이 나빠지는 반면에 가상의 충격파를 사용하는 경우 격자계에 관계없이 거의 동일한 수렴과정을 보여주고 있다.

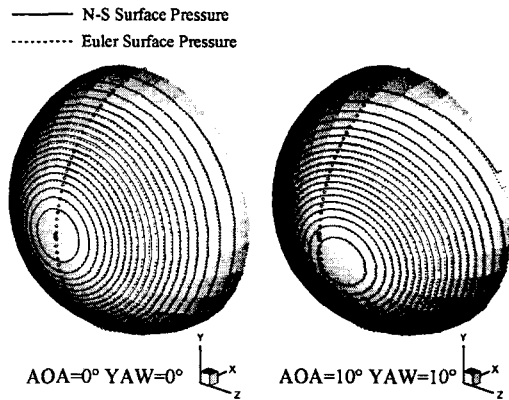


Fig. 11 Surface pressure of blunt-body at Mach=30.

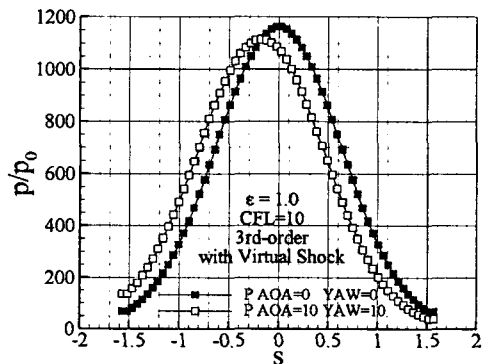


Fig. 12 Center-line pressure of blunt-body at Mach=30.

Fig. 11과 12는 각각 표면 압력분포 및 대칭축을 지나는 중심선에 따른 압력분포이다. 표면 압력분포의 경우 유동의 입사각이 있는 경우나 없는 경우 모두에서 문제없이 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 또한

중심선에 따른 압력분포에서도 AOA와 YAW에 의한 정체점의 이동으로 인해 최대압력의 감소 및 이동을 확인 할 수 있다.

이와 같이 가상의 충격파를 이용할 경우, 작은 엔트로피 보정을 통해 고차의 공간정확도로 확장이 가능하기 때문에 계산의 정확성이 확보될 수 있었으며, 보다 큰 CFL 수의 이용이 가능하기 때문에 계산의 효율성 면에서 이점이 있었다. 또한 격자 형상에 관계없이 계산이 가능한 강건성을 얻을 수 있었다.

#### 4. 결 론

본 연구는 기존에 이미 많이 이용되고 있는 Roe's FDS 기반 수치해법에서 여러 문제점이 발생하는 것으로 알려진 고마하수 무딘 물체 주위유동의 3차원 해석에서, 수치적 문제점을 수치기법 외적인 처방을 통하여 간단히 해결할 수 있는 방법과 극한적 해석 예를 제시하였다. 잘 알려진 carbuncle 현상은 높은 마하수에서도 엔트로피 보정을 통하여 쉽게 해결할 수 있음을 알 수 있었으며, 비물리적 해의 경우는 엔트로피 보정 외에, 격자 형상 등에도 영향을 받지만, 간단히 변화된 초기 조건을 이용하여 엔트로피 보정이나, 격자 형상 등에 관계없이 고차 정확도 해법에서 충분히 큰 CFL 수를 이용하여 쉽게 해결할 수 있음을 알 수 있었다.

#### 후 기

본 논문은 국방과학연구소의 고에너지물질 특화연구센터 연구의 일부분으로 진행되었으며, 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

- [1] J. L. Steger, and R. F. Warming, 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite - Difference Method," *J. of Computational Physics*, Vol. 40, pp.263-293.
- [2] B. Van Leer, 1982, "Flux - vector Splitting for the Euler Equation," *Lecture Notes in physics*, Vol. 170, pp.507-512
- [3] J. Gressier, P. Villedieu, and J-M Moshetta, 1999, "Positivity of Flux Vector Splitting Schemes," *J. of Computational Physics*, Vol. 155, pp.199-220.
- [4] P. L. Roe, 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *J. of Computational Physics*, Vol. 43, pp.357-372.
- [5] J. Y. Choi, I. S. Jeung, and Y. Yoon, 2000, "Computational Fluid Dynamics Algorithms for Unsteady Shock - Induced Combustion, Part 1: Validation," *AIAA J.*, Vol 38, No. 7, pp.1179-1187.
- [6] V. M. Vista, J. L. Thomas, and B. W. Wedan, 1987, "Navier-Stokes Computations of Prolate Spheroids at Angle of Attack," *AIAA* pp. 87-2627.
- [7] D. Gaitonde, and J. S. Shang, 1993, "Accuracy of Flux-Split Algorithms in High-Speed Viscous Flows," *AIAA J.*, Vol. 31, No. 7, pp.1215-1221.
- [8] D. Hanel, R. Schwane, and G. Seider, 1987, "On the Accuracy of Upwind Schemes for the Solution of the Navier-Stokes Equations," *AIAA paper 87-1105-CP*.
- [9] P. L. Roe, 1989, "A Survey of Upwind Difference Techniques," *Lecture Notes in physics*, Vol. 323, pp.69.
- [10] P. K. Sweby, 1985, "High Resolution TVD Schemes Using Flux Limiters," *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 22, pp.289-309
- [11] D. Hanel, R. Schwane, and G. Seider, 1987, "On the Accuracy of Upwind Schemes for the Solution of the Navier-Stokes Equations," *AIAA paper 87-1105-CP*.
- [12] C. Hirsh, 1990, "Numerical Computation of Internal and External Flows," *John Wiley & Sons*, Vol. 1,2.