

Bernstein 다항식을 이용한 2-D FIR 필터에 관한 연구

서 현 수 · 강 경 덕 · 김 남 호

*부경대학교 공과대학 제어계측공학과

A Study on 2-D FIR Filter Using the Bernstein Polynomial

Hyun-Soo Seo · Kyung-Duck Kang · Nam-Ho Kim

*Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : digitalshs@mail1.pknu.ac.kr

요 약

현대 사회가 방대한 양의 정보에 대한 획득, 저장 및 전송의 과정을 필요로 함에 따라, 신호처리의 중요성이 증가하고 있으며, 영상과 같은 2차원 신호에 대해서 다양한 형태의 디지털 필터가 설계되어 사용되고 있다. 이러한 디지털 필터에는 IIR(infinite impulse response) 필터와 FIR(finite impulse response) 필터가 있으며, 특히 구현이 용이하고 선형위상특성과 안정성을 가지는 FIR 필터가 많은 분야에서 적용되고 있다. 또한 FIR 필터의 설계에 있어서 통과대역과 저지대역에서의 평탄 특성은 중요한 요소이다. 본 논문에서는 Bernstein 다항식을 이용하여 2차원 Circular FIR 저역통과 필터를 설계하였으며, 통과대역과 저지대역에서 평탄한 특성을 나타내도록 하였다. 그리고 설계된 필터를 시뮬레이션하기 위해, AWGN이 중첩된 테스트 영상을 사용하였으며, 필터링 결과를 기존의 방법들과 비교하였다.

ABSTRACT

As modern society needs to process of aquisition, storage and transmission of much information, the importance of signal processing is increasing and various digital filters are used in the two-dimensional signal such as image. And kinds of these digital filters are IIR(infinite impulse response) filter and FIR(finite impulse response) filter. And FIR filter which has the phase linearity, the easiness of creation and stability is applied to many fields. In design of this FIR filter, flatness property is a important factor in pass-band and stop-band. In this paper, we designed a 2-D Circular FIR filter using the Bernstein polynomial, it is presented flatness property in pass-band and stop-band. And we simulated the designed filter with noisy test image and compared the results with existing methods.

키워드

FIR, IIR, flatness, Bernstein Polynomial

1. 서 론

현대 사회가 방대한 양의 정보에 대한 획득, 저장 및 전송의 과정을 필요로 함에 따라, 신호처리 분야에서 디지털 필터의 사용이 급격히 증가하고 있다. 디지털 필터는 주어진 입력신호를 원하는 형태로 여과하는 디지털 시스템이며, 특히 영상 신호와 같이 다차원 배열로 표현되는 신호의 다양성으로 인해 2차원 신호에 대한 디지털 필터의 사용이 증가하고 있다.

디지털 필터에는 IIR(infinite impulse response)

필터와 FIR(finite impulse response) 필터가 있다. IIR 필터는 정확성이 우수한 장점을 가지나, 위상 변화가 생기며 계산이 복잡하고 구현이 용이하지 않은 단점을 가진다. 반면, FIR 필터는 IIR 필터에 비하여 다소 부정확하지만, 선형위상특성을 가지며 구현이 용이하다는 장점으로 인해 신호 처리의 여러 응용분야에서 적용되고 있다[1].

이러한 FIR 필터의 설계 방법에는 창함수 설계법과 McClellan 변환 등이 있다. 창함수는 필터 설계에 있어서, 통과 대역의 차단주파수부근에서 깃스(gibbs)현상에 의해 발생한 리플을 완화하기

위해서 사용하며 대표적으로 Hanning, Hamming window 등이 있다. 그리고 McClellan 변환은 주어진 설계조건에 대하여 최적의 주파수응답을 얻기 위해, 천이대역 부근의 에러 에너지를 전 주파수 대역내에 균등하게 재분배하는 개념에 근거한 방법이다.

본 논문에서는 Bernstein 다항식을 이용하여 리플의 영향을 최소화시킨 2차원 Circular FIR 저역 통과 필터를 설계하였으며, AWGN이 중첩된 Lena 영상을 필터링하여 Hanning, Hamming window와 McClellan 변환에 의한 필터 성능과 비교하였다.

II. McClellan 변환

Odd의 차수의 길이를 갖는 1차원 영위상 FIR 필터의 주파수응답은 다음의 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n) \cos(n\omega) \quad (1)$$

여기서, $h(n)$ 을 1차원 필터의 임펄스 응답이라 할 경우, $a(n)$ 은 다음의 식 (2)와 같다.

$$a(n) = \begin{cases} h(0) & , n=0 \\ 2h(n) & , n \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

또한, 식 (1)의 $\cos(n\omega)$ 는 n 차 체비셰프 다항식 $T_n[\cos(\omega)]$ 으로 표현할 수 있으므로, 식 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[\cos(\omega)] \quad (3)$$

그리고, 식 (4)에 의해서 1차원 필터는 2차원 필터로 변환되며, $F(\omega_1, \omega_2)$ 는 식 (5)와 같다[2].

$$\cos(\omega) = F(\omega_1, \omega_2) \quad (4)$$

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L t_{ij} \cos(i\omega_1) \cos(j\omega_2) + \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L s_{kl} \sin(k\omega_1) \sin(l\omega_2) \quad (5)$$

여기서, $|F(\omega_1, \omega_2)| \leq 1$ 의 필요 조건이 성립해야 한다. 식 (5)로부터 첫 번째 \cos 항은 2차원 필터의 주파수 사분면에서 대칭부분에 대한 항이며, \sin 항은 비대칭에 관한 항이다.

즉, 사분면 대칭일 경우에는 첫 번째 \cos 항만이 필요하며, 2차원 주파수 응답은 다음과 같이

나타낼 수 있다.

$$\hat{H}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=0}^N a(n) T_n[F(\omega_1, \omega_2)] \quad (6)$$

III. 창함수 설계법

푸리에 급수에 의해 설계되는 FIR 필터는 차수 N 을 크게 할수록 이상적인 필터의 특성에 접근하지만, 주파수 특성상 불연속점 부근에서 깃스현상이 발생하게 된다.

따라서 시간축상에서 불연속이 없는 window 함수를 사용하여 그 영향을 완화할 수 있으며, 차수가 N 인 1차원 window 함수 $W(\omega)$ 은 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(\omega) = \sum_{k=0}^N w_k e^{j\omega k} \quad (7)$$

또한 주파수영역에서의 임펄스응답 $H(e^{j\omega})$ 와 창함수 $W(\omega)$ 의 콘벌루션은 시간영역에서 h_k 에 대응되는 ω_k 의 곱과 같으며, 최종적으로 $H(z)$ 는 다음의 식 (8)과 같다.

$$H(z) = \sum_{k=0}^N (\omega_k h_k) z^{-k} \quad (8)$$

또한, 2차원에서 창함수의 전달함수는 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$H(z_k, z_r) = \sum_{k=0}^M (\omega_k h_k) z^{-k} \sum_{r=0}^N (\omega_r h_r) z^{-r} \quad (9)$$

식 (9)에서 w_k 와 w_r 이 환상대칭이라면, 2차원 창함수 $w_{kr}(m, n)$ 은 식 (10)과 같다.

$$w_{kr}(m, n) = w_k(n) \Big|_{n=\sqrt{m^2+n^2}} = w_k(\sqrt{m^2+n^2}) \quad (10)$$

또한 Hanning window와 Hamming window는 다음의 두 식과 같다.

$$w_n(n) = 0.5(1 + \cos(2\pi n/N)), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (11)$$

$$w_m(n) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/N), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (12)$$

따라서, 창함수를 이용한 2차원 FIR 필터 설계는, 주파수영역에서 이상적인 값을 설정한 다음 적절한 창함수와와의 연산으로 설계할 수 있다.

IV. Bernstein 다항식을 이용한 설계

구간 [0,1]에서 $f_d(x)$ 가 정의된다면, Bernstein 다항식에 의해서 식 (13)과 같이 $f(x)$ 로 근사화할 수 있다[3].

$$f(x) = \sum_{i=0}^m f_d\left(\frac{i}{m}\right) \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i} \quad (13)$$

여기서 m 은 $f(x)$ 의 차수이며, $f(x)$ 는 [0,1]에서 고르게 분포된 $f_d(x)$ 에 의해 얻어진 가중치 계수와 커널 $x^i(1-x)^{m-i}$ 에 의해 합성된 것이다. 또한 $f_d(x)$ 가 [0,1]의 범위 내에 존재하고 연속일 경우, m 이 무한한 값을 가지게 되면 $f(x)$ 는 $f_d(x)$ 에 근접한다.

그리고 Bernstein 다항식을 이용한 FIR 저역통과 필터를 설계하기 위해서 주파수응답 $H_d(\omega)$ 는 다음의 관계에 의해서 시간영역의 $f_d(x)$ 로 변환된다.

$$x = \frac{1 - \cos \omega}{2} \quad (14)$$

따라서 $f(x)$ 는 주파수영역에서 다음의 식 (15)로 나타낼 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{i=0}^K \binom{m}{i} \left(\frac{1 - \cos \omega}{2}\right)^i \left(\frac{1 + \cos \omega}{2}\right)^{m-i} \quad (15)$$

여기서 K 는 $\omega = \pi$ 에서의 평탄차수이며, Herrmann에 의해 다음의 식으로 정의된다[4].

$$K = m - \lfloor mx_c + 0.5 \rfloor \quad (16)$$

여기서 $\lfloor \cdot \rfloor$ 는 floor 함수이다.

그리고 2차원 영역에서 함수 $f_d(x)$ 가 설정되었다고 가정하였을 경우, $m \times n$ 차 Bernstein 다항식은 다음의 식 (17)과 같다.

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} f_d\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) x^i (1-x)^{m-i} y^j (1-y)^{n-j} \quad (17)$$

이 때, 위의 식 (17)의 주파수 응답은 다음의 식 (18)과 같다.

$$H(\omega_1, \omega_2) = f(x, y) \Big|_{x=(1-\cos\omega_1)/2, y=(1-\cos\omega_2)/2} \quad (18)$$

또한 차단주파수를 ω_{c1}, ω_{c2} 라 할 때, Circular 필터의 이상적인 주파수 응답은 다음과 같다.

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & |\omega_1/\omega_{c1}|^2 + |\omega_2/\omega_{c2}|^2 \leq 1 \\ 0, & |\omega_1/\omega_{c1}|^2 + |\omega_2/\omega_{c2}|^2 \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

만약 $\omega_{c1} = \omega_{c2} = \omega_c$ 라 하고, 사분면 대칭일 경우 Circular 필터의 경계를 다음과 식 (20)과 같이 설정할 수 있다.

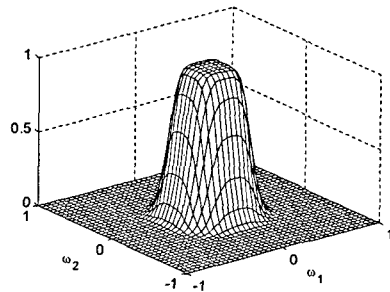
$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_c^2 \quad (20)$$

위의 과정으로부터 다음의 식 (21)과 같은 이차원 함수 $f_d(i/m, j/n)$ 를 얻을 수 있다.

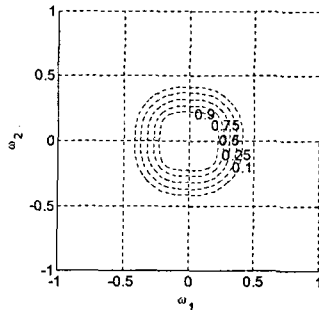
$$f_d(i/m, j/n) = \begin{cases} 1, & \arccos(1 - 2i/m) + \arccos(1 - 2j/m) \leq \omega_c \\ 0, & \arccos(1 - 2i/m) + \arccos(1 - 2j/m) \geq \omega_c \end{cases} \quad (21)$$

$0 \leq i, j \leq m$

그림 1은 Bernstein 다항식을 이용하여 설계된 차단주파수가 $\pi/3$ 인 41차 Circular 필터의 주파수 응답과 contour를 나타내고 있다.



(a) Circular 필터의 주파수 응답



(b) Circular 필터의 contour

그림 1. Circular 필터 ($\omega_c = \pi/3$)

IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서 제안한 Bernstein 다항식을 이용한 2차원 Circular 저역통과 필터를 시뮬레이션 하기



그림 2. 필터링 처리 후 결과 비교 ($\omega_c = \pi/3$)

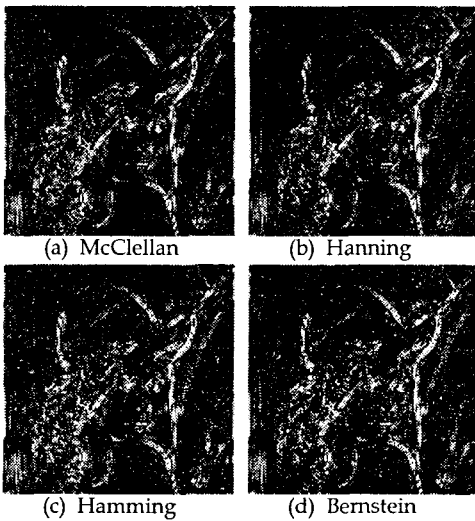


그림 3. 차영상의 비교 ($\omega_c = \pi/3$)

위해, 테스트 영상으로 AWGN이 중첩된 128 X 128의 Lena 영상을 사용하였다. 그림 2로부터 (a)는 원영상이며 (b)는 표준편차가 50인 AWGN에 의해 훼손된 영상이다. 그리고 (c), (d), (e), (f)는 차단주파수가 $\pi/3$ 인 각각의 방법에 의해 설계된 저역통과 필터로 필터링한 결과이다. 그리고 그림 3에서 원영상과의 차영상을 나타내었다.

표 1에서는 차단주파수와 AWGN의 표준편차에 따른 필터링 결과를 MSE로 나타내었다. 표로부터, Bernstein 다항식을 이용한 2차원 Circular 필터의 MSE가 가장 우수한 결과를 보였다.

표 1. 각 필터의 MSE 비교

ω_c	σ	McClellan	Hanning	Hamming	Bernstein
$\pi/3$	40	202.7483	206.4936	206.8825	195.4393
	50	206.1783	209.9245	210.305	198.529
	60	209.7335	213.4178	213.9296	202.0149
$\pi/2$	40	123.5645	125.0862	125.1981	120.5252
	50	131.6942	133.1383	133.2529	127.8048
	60	139.4523	140.5806	140.704	134.9349

IV. 결론

본 논문에서는 Bernstein 다항식을 이용하여 2차원 Circular FIR 저역통과 필터를 설계하였다. 그리고 시뮬레이션에서 McClellan 변환 및 창함수 설계법과 비교하였으며, 성능비교를 위한 판단기준으로 MSE를 사용하여 제안한 방법의 우수함을 증명하였다. 또한 평탄한 특성으로 인해 차영상에서의 어두운 영역이 다른 방법의 결과에 비해 일정하게 나타나고 있다. 따라서 제안한 방법은 잡음 제거 및 평탄 특성이 우수하여 신호처리의 많은 분야에 유용하게 적용되리라 사료된다.

참고문헌

- [1] R. W. Hamming, "Digital Filters", Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [2] H. Chen, G. E Ford, "A unified eigenfilter approach to the design of two-dimensional zero-phase FIR filters with the McClellan transform", IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process, vol. 41, 1994.
- [3] G. G. Lorentz, Bernstein Polynomials. Toronto, ON, Canada: Univ. of Toronto Press, 1953.
- [4] O. Herrmann, "On the approximation problem in nonrecursive digital filter design", IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, pp. 411-413, May, 1971.