

Affine Scaling Interior Point Method를 이용한 최적조류계산

김경민, 박중성, 한석만, 정구형, 김발호  
 홍익대학교

Optimal Power Flow Using Affine Scaling Interior Point Method

Kyung-Min Kim, Jung-Sung Park, Seok-Man Han, Koo-Hyung Chung, Balho H. Kim  
 Hong-ik University

**Abstract** - This paper presents an Optimal Power Flow (OPF) algorithm using Interior Point Method (IPM) to swiftly and precisely perform the five minute dispatch. This newly suggested methodology is based on Affine Scaling Interior Point Method (AS IPM), which is favorable for large-scale problems involving many constraints. It is also eligible for OPF problems in order to improve the calculation speed and the preciseness of its resultant solutions. Big-M Method is also used to improve the solution stability. Finally, this paper provides a relevant case study to confirm the efficiency of the proposed methodology.

1. 서 론

1960년대 초, 전력계통의 경제급전(economic dispatch, ED) 문제의 연장선상에서 최적조류계산 문제가 대두된 이래, 최적조류계산 문제는 현재 전력계통 분야에서 가장 연구가 활발한 분야 가운데 하나이다. 1962년 Carpentier에 의해 최적조류계산 문제가 처음으로 제안된 후, 이러한 최적조류계산 문제는 최적화 기법과 컴퓨터 기술의 발달에 힘입어 많은 연구가 활발히 진행되고 있다. 특히, 전력산업의 구조개편 논의가 활발히 진행되고 있는 우리나라의 경우, 전력계통의 운용과 계획 및 전력경제 분야 연구에 기초적이고 필수적인 도구를 제공하는 최적조류계산 문제에 대한 관심은 더욱 커지고 있는 것이 사실이다.

최적조류계산 문제는 제약 조건이 있는 최적화 문제로 기존의 경제급전문제가 목적함수로서 유효전력 발전비용의 최소화만을 고려하고 제약조건으로서 전력수급 조건만을 고려한 것과는 달리 다양한 종류의 목적함수와 제약조건들을 고려할 수 있는 일반적인 최적화문제로 정식화 될 수 있는데 이러한 제약조건들은 등식 제약조건과 부등식 제약조건으로 들어가게 된다. 과거에 이러한 최적조류계산 문제를 풀기위해 선형계획법으로 널리 사용된 심플렉스 기법을 사용하였다. 심플렉스 기법은 지수함수 시간(exponential time) 알고리즘으로 작은 문제에 대해서는 별 영향을 받지 않지만, 고려해야 될 제약식의 수 및 변수가 증가함에 따라 이를 푸는 속도가 매우 느리다는 단점을 가지고 있다. 1984년에 Karmarkar라는 수학자가 심플렉스 기법의 한 대안으로 Interior Point Method(IPM)했다. 이 기법은 심플렉스 기법에 비해 매우 복잡하여 매 반복마다 계산량이 많고 단순한 문제의 경우라도 다수의 반복이 필요하지만, 대형 문제에 대해서는 IPM을 사용하면 심플렉스 기법을 훨씬 능가한다. Karmarkar는 수천 개의 제약식과 변수를 포함하는 대형 문제에 대해서 IPM이 심플렉스 기법보다 100배 이상의 계산속도를 향상시킨다는 연구 결과를 보고했다.

본 연구에서는 위에 기술한 바와 같이 대형문제에 적합한 IPM을 최적조류계산 문제에 적용하고자 한다. 제

안된 기법은 Linear Transformation을 이용한 AS IPM 이고, 비선형 목적함수와 선형함수들로 구성된 최적조류계산 문제를 풀기위한 알고리즘을 제시한다. 또한 해의 수렴성 제고와 적절한 초기값 선정을 위해 Big-M Method를 이용하였다.

2. 본 론

2.1 OPF 정식화

일반적인 최적조류계산 문제는 다음과 같다.

$$\min \sum_{i=1}^{n_g} \alpha_i + \beta_i P_i^{gen} + \gamma_i P_i^{gen2} \quad (1)$$

$$s.t. P_n^{gen} - \sum_{n,m \in S} P_{n,m}^{line} = P_n^{load} \quad n = 1, \dots, n_{bus} \quad (2)$$

$$\frac{P_i^{gen}}{P_i^{gen}} \leq P_i^{gen} \leq \overline{P_i^{gen}} \quad i = 1, \dots, n_g \quad (3)$$

$$P_{n,m}^{line} \leq \overline{P_{n,m}^{line}} \quad (4)$$

여기서,  $n_{bus}$ : 모선의 수  $n_g$ : 발전기의 수

S: 연결된 모선 집합

$P_i^{gen}$ : 발전기 i의 발전량

$\overline{P_i^{gen}}$ : 발전기 i의 발전상한

$\frac{P_i^{gen}}{P_i^{gen}}$ : 발전기 i의 발전하한

$P_{n,m}^{line}$ : 선로(n,m)에 흐르는 유효전력

$\overline{P_{n,m}^{line}}$ : 선로(n,m)에 흐르는 유효전력상한

식(1)은 발전비용을 최소화하는 비선형 목적함수이고, 식(2)는 전력수급의 균형을 맞추기 위한 등식 제약이고, 식(3)은 발전량한계 부등식 제약이다. 식(4)는 선로의 과부하 방지를 위한 선로 제약부등식 조건이다.

2.2 Affine Scaling Method

제약식을 표준형으로 표현하기 위해 앞의 식(1)~(4)를 다음과 같이 표현하였다.

$$\min C(X) + M \cdot S_3^l \quad (5)$$

$$s.t. A_1 X = B_1 \quad (6)$$

$$A_2 X + S_1 = B_2 \quad (7)$$

$$A_3 X + S_2 - S_3^s = B_3 \quad (8)$$

$$X \geq 0 \quad (9)$$

여기서,  $S_3^i = \begin{cases} A_3 X - B_3, & \text{if } A_3 X \geq B_3 \\ \text{none}, & \text{otherwise} \end{cases}$

M:  $10^4$  이상의 충분히 큰 값

식(6)~(8)은 부등식 제약조건에 슬랙변수를 도입하여 등식 제약식으로 표현한 식이다. 또 초기값을 경제급전과 전력조류방정식을 이용하였을 때, 각 선로의 선로용량을 초과하는 선로에 대해서 인위변수  $S_3^i$ 을 추가시킨다.

OPF 모델을 표준형으로 표현한 식은 다음과 같다.

$$\min F(X) \quad (10)$$

$$\text{s.t. } AX = B \quad (11)$$

$$X \geq 0 \quad (12)$$

여기서,  $F(X) = C(X) + M \cdot S_3^i$

### 2.2.1 Search Direction

Search direction으로 단순히 목적함수의 gradient를 취하게 되면, feasible region을 벗어날 우려가 있기 때문에, 다음 식(13)과 같이 목적함수의 gradient에 projection matrix를 곱해서 search direction을 구한다.

$$G^k = M^k \nabla F(X^k) \quad (13)$$

여기서, k : iteration index

$G^k$ : search direction,  $G^k = [g_1^k, g_2^k, \dots, g_n^k]$

$M^k = [I - A^k T (A^k A^{kT})^{-1} A^k]$ : projection matrix

### 2.2.2 Scaling

AS IPM은 linear transformation 중의 하나인 affine scaling transformation을 이용하여,  $X^k$ 를 feasible region의 중앙 근처에 위치하도록 feasible region을 변환시킨다.

$$\tilde{X}^k = (D^k)^{-1} X^k \quad (14)$$

$$\tilde{A}^k = A^k (D^k) \quad (15)$$

$$\nabla \tilde{F}(X^k) = (D^k)^{-1} \nabla F(X^k) \quad (16)$$

$$\tilde{M}^k = [I - \tilde{A}^{kT} (\tilde{A}^k \tilde{A}^{kT})^{-1} \tilde{A}^k] \quad (17)$$

$$\tilde{G}^k = \tilde{M}^k \nabla \tilde{F}(X^k) \quad (18)$$

여기서,  $D^k$  : scaling operator (a square matrix with the components of  $X^k$  on its diagonal)

식(14)은 scaling operator를 이용해 매 iteration에서 구해진 해를 scaling하는 식이고, 식(15)~(18)은 각각 제약식, 목적함수의 gradient, projection matrix, search direction을 scaling 하는 식이다.

### 2.2.3 Step Size

$$\tilde{\alpha}^k = \min \left\{ \frac{\tilde{x}_i^k}{\tilde{g}_i^k} \right\} \quad \text{단, } \tilde{g}_i^k < 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

여기서,  $\tilde{\alpha}$  : a scaled step size

### 2.2.4 Affine Scaled version

앞의 과정을 수행한 후 다음과 같은 새로운 scaled iterative system을 구성할 수 있다.

$$\tilde{X}^{k+1} = \tilde{X}^k + \rho \tilde{\alpha}^k \tilde{G}^k \quad (20)$$

여기서,  $\rho$ : safety factor ( $0.9 \leq \rho < 1$ )

파라미터  $\rho$ 는 search direction이 실행 가능역의 boundary에 닿는 것을 막게 하는 safety factor이다. 그리고 식(20)을 수행한 후, 해를 결정하기 위해  $\tilde{X}^{k+1}$ 을 식(21)을 이용해 unscaled space로 되돌려야 한다.

$$X^{k+1} = (D^k) \tilde{X}^{k+1} \quad (21)$$

### 2.2.5 Starting Point

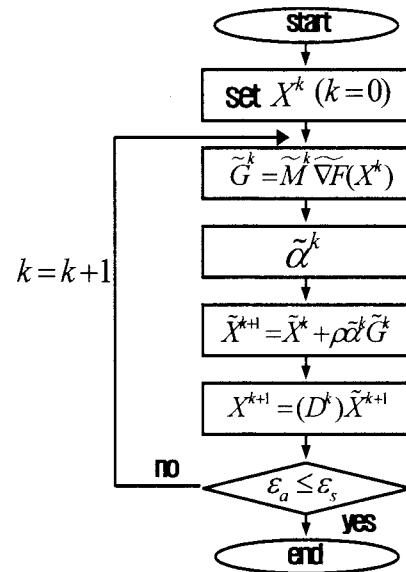
$D^0$ 의 역행렬이 존재해야 되므로  $X^0$ 의 모든 요소들이 non-zero이어야 하고, 초기값은 경제급전과 전력조류방정식을 이용한다.

### 2.2.6 Stopping Criterion

$$\frac{|F(X^{k+1}) - F(X^k)|}{|F(X^k)|} \leq \epsilon_s \quad (22)$$

여기서,  $\epsilon_s$  : 허용오차

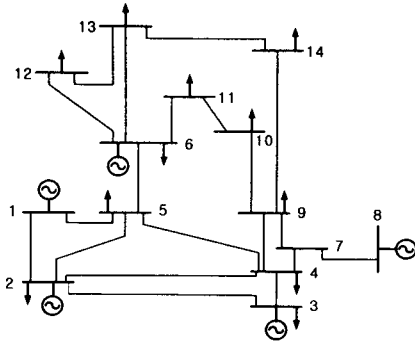
### 2.3 알고리즘



<그림 1> Affine Scaling Method 알고리즘

### 2.4 사례연구

사례연구를 위해 다음 그림과 같은 Modified IEEE 14-Bus를 이용하였다.



<그림 2> 사례연구 계통

[표1] 발전기 데이터 [단위: MW]

	Max	Min	a	b	r
G1(Bus 1)	600	150	450.0	13.4	0.00264
G2(Bus 2)	500	100	560.0	14.1	0.00249
G3(Bus 3)	500	100	570.0	17.1	0.00279
G4(Bus 6)	300	50	922.0	15.8	0.00382
G5(Bus 8)	400	50	620.0	15.7	0.00328

[표2] 선로 데이터 [단위: MW]

선로	선로용량	선로	선로용량
Line 1(1-2)	400	Line 11 (1-5)	500
Line 2(2-3)	300	Line 12 (2-4)	300
Line 3(3-4)	400	Line 13 (2-5)	700
Line 4(4-5)	600	Line 14 (4-7)	300
Line 5(5-6)	600	Line 15 (4-9)	500
Line 6(6-11)	300	Line 16 (6-12)	400
Line 7(7-9)	350	Line 17 (6-13)	600
Line 8(7-8)	500	Line 18 (9-14)	400
Line 9(9-10)	400	Line 19 (12-13)	500
Line 10(10-11)	300	Line 20 (13-14)	500

단, 모든 선로는 R=0이고, X=0.001이다.

[표3] 부하 데이터 [단위: MW]

부하 모선	부하량	부하 모선	부하량
BUS 2	30	BUS 10	200
BUS 3	70	BUS 11	100
BUS 4	100	BUS 12	200
BUS 5	50	BUS 13	200
BUS 6	200	BUS 14	500
BUS 9	200		

표1~3는 각 각 발전기, 선로, 그리고 부하 데이터를 나타낸다.

표4는  $E_s=10^{-5}$ ,  $M=10^5$ ,  $\rho=0.99$  조건으로 AS IPM을 이용해 수행한 14-Bus 최적조류계산 결과 값이다. 또한 AS IPM으로 도출된 결과값을 비교하기 위해 비교대상을 상용화된 최적화 프로그램인 GAMS MINOS5를 이용하였다.

[표4] 결과값 ( $E_s=10^{-5}$ ,  $M=10^5$ ,  $\rho=0.99$ )

	MINOS5 (Iter=31)	AS IPM (Iter=18)	Error(%)
Pg <sub>1</sub>	600.000000	599.999876	2.0667E-05
Pg <sub>2</sub>	444.660494	444.661310	0.00018351
Pg <sub>3</sub>	230.493827	230.492946	0.00038222
Pg <sub>4</sub>	300.000000	299.999981	6.3333E-06
Pg <sub>5</sub>	274.845679	274.846042	0.00013207
θ <sub>1</sub>	0.01308796	0.013087961	7.6406E-06
θ <sub>2</sub>	0.01123765	0.011237655	4.4493E-05
θ <sub>3</sub>	0.01054012	0.010540117	2.8463E-05
θ <sub>4</sub>	0.00823765	0.008237653	3.5204E-05
θ <sub>5</sub>	0.00893827	0.008938270	1.1188E-06
θ <sub>6</sub>	0.00368981	0.003689814	0.00011112
θ <sub>7</sub>	0.00748611	0.007486112	3.0724E-05
θ <sub>8</sub>	0.01023457	0.010234574	3.9083E-05
θ <sub>9</sub>	0.00398611	0.003986110	2.5087E-06
θ <sub>10</sub>	0.00222068	0.002220679	4.9534E-05
θ <sub>11</sub>	0.00245525	0.002455247	0.00012219
θ <sub>12</sub>	0.00135185	0.001351852	0.00013315
θ <sub>13</sub>	0.00101389	0.001013889	0.00011836
θ <sub>14</sub>	0.00000000	0.00000000	0.00000000

도출된 결과로 알 수 있듯이 허용오차를  $10^{-5}$  로 하였을 때의 결과값은 GAMS의 MINOS5 결과값과 비교해 볼 때, 최대오차  $3.8 \times 10^{-4}$ (%)로 거의 차이가 없고, iteration 수에서 MINOS5는 31번, AS IPM은 18번으로 훨씬 더 적다는 것을 알 수 있다.

### 3. 결론 및 향후연구

본 연구에서는 최적조류계산 문제를 풀기 위해 AS IPM을 제안하였고, 적절한 초기값 선정과 해의 수렴성을 위해 인위변수를 추가하여 Big-M Method를 이용하였다. 사례연구를 통해 제안된 기법이 해의 정확성 및 수렴속도 면에서 최적조류계산 문제에 대한 적합성 및 효율성을 보여주었다.

그러나, 대형 문제에 대해서 좀 더 다양한 사례연구를 수행하여 제안된 알고리즘을 검증해야 될 필요가 있고, 더 나아가 제약식 중 선로 방정식은 비선형이므로, 주어진 문제를 비선형 문제로 확장해야 할 필요가 있다.

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력공학 공동연구소(02-전-01) 주관으로 수행된 과제임.

### [참 고 문 헌]

- [1] Ronald E. Miller, "Optimization", JOHN WILEY & SONS, INC, pp. 491-510, 2000.
- [2] Ronald L. Rardin, "Optimization in Operations Research", Prentice-Hall International, Inc., pp. 251-274, 1998.
- [3] N. K. Karmarkar. "A new polynomial-time algorithm for linear programming," Combinatorics, vol.4, pp.273-295, 1984.
- [4] K. Ponnambalam, V.H. Quintana and A. Vannelli, "A Fast Algorithm for Power System Optimization Problems Using an Interior Point Method", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 7, No. 2, 1992, pp. 892-899.
- [5] 김발호, "최적조류계산의 이론과 응용", 홍익대학교, 2001.
- [6] 김경민 외, "Affine Scaling Interior Point Method를 이용한 계약금전에 관한 연구" 대한전기학회 하계학술대회, 2005년