

특이점이 고려된 비오-사바르법을 이용한 3차원 코일의 자계 해석

송호준, 이향범
 송실대학교 전기공학과

3-Dimensional Magnetic Field Analysis of Coil Using Biot-Savart Law
 Considering Singularity

Ho-jun Song and Hyang-beom Lee
 Department of Electricl Engineering, Soongsil University

Abstract - In this paper, 3-dimensional magnetic field of coil is analyzed by using biot-sarvart law considering singularity. The RMSP(reduced magnetic scalar potential) arc employed in order to reduce the number of unknown variables in FEM(Finte Element Analysis) or BEM(Boundary Element Method). It is necessary to calculate magnetic field of souce current when RMSP is used. Biot-savart law is generally used. it is difficult to calculate the field when the source point is in inside the coil. To integrate using gaussian quadrature, the cross section of coil is divided considering the position of field point when field point is inside coil. The proposed method shows good agreement of magnetic field compared with FEMLAB, OPERA3D.

1. 서 론

근래에 컴퓨터의 발달로 수치해석에 의하여 물리적 현상의 실제적이고 실용적인 계산이 가능해짐에 따라, 전기기기설계 및 해석 등에 수치해석이 많이 사용되고 있다. 컴퓨터를 이용한 전자계의 수치 해석방법은 유한 요소법(FEM)과 경계요소법(BEM)이 대표적인 방법이다[1]. 위의 두 가지방법에 사용하는 해석변수로는 MV P(magnetic vector potential), RMSP(reduced magnetic scalar potential), TMSP(total magnetic scalar potential)등이 사용되고 있다[2].

수치해석에서 전류원이 존재하는 전자기 문제를 계산할 경우 계수행렬의 차수를 낮추기 위하여 RMSP를 변수를 사용하여 계산하게 된다. 이 경우 일반적으로 비오-사바르법을 이용하여 전류전류에 의한 자계를 계산하게 된다. 비오-사바르법을 이용하여 자계를 계산 하는데 있어서 코일의 외부의 자계 계산은 문제가 없지만 코일 내부의 자계를 계산하는 경우에는 원천점(source point)과 측정점(field point)점이 같아지는 특이점(singular point)이 존재하여 수치적분의 어려움이 발생한다[3].

따라서 본 논문에서는 비오-사바르법을 이용하여 코일의 전류 전류에 대한 자계를 계산할 때, 특이점을 고려하여 계산하였으며 유한 요소법의 상용 프로그램은 FEMLAB와 OPERA3D를 이용하여 계산 결과를 검증하였다.

2. 본 론

2.1 RMSP를 이용한 지배방정식

RMSP를 이용한 정자계 지배방정식은 다음과 같은 맥스웰 방정식과 보조방정식으로 나타난다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2)$$

여기서 \vec{H} 는 자기장의 세기[A/m], \vec{B} 는 자속밀도 [Wb/m²], \vec{J}_s 는 외부에서 공급된 전류밀도 [A/m²], μ 는 투자율[H/m]이다.

식 (1)에서 자기장의 세기 \vec{H} 는 외부 인가 전류원에 의한 자기장의 세기 \vec{H}_s 와 유기된 자기장의 세기 \vec{H}_m 의 합으로 표현 할 수 있다[4].

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_m \quad (3)$$

여기서 유기된 자기장의 세기 \vec{H}_m 는 회전하지 않는 자계이므로 RMSP (reduced magnetic scalar potential) ϕ 를 적용하면 식 (3)은 다음과 같이 나타난다.

$$\vec{H} = \vec{H}_s - \nabla \phi \quad (4)$$

따라서 RMSP를 이용하여 자기장의 세기 \vec{H} 는 전류원에 의한 자기장 \vec{H}_s 의 계산이 필요하게 된다. 일반적으로 비오-사바르법을 이용하여 계산한다. 비오-사바르법은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{H}_s = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{J}_s \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV \quad (5)$$

$$\vec{R} = \vec{R}_{field} - \vec{R}_{source} \quad (6)$$

여기서 \vec{J}_s [A/m²]는 전류밀도, \vec{R} [m]은 원천점과 측정점의 거리이다. 식 (2)을 이용하여 자속 밀도를 구하면 식 (5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{B}_s = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}_s \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV \quad (7)$$

2.2 3차원 코일의 자속밀도 계산

3차원 코일의 자속밀도 계산은 식 (7)을 이용하여 계산하였다. 식 (7)을 이용하여 3차원 코일 계산을 하기 위하여 먼저 코일의 내부의 사각 단면을 요소로 생각을 하고 계산한 다음 원주방향의 길이를 곱하여 계산하였다. 사각단면의 적분방법으로는 수치적분법의 하나인

Gaussian Quadrature를 이용하여 계산하였다.

식 (6)의 원천점은 Gaussian Quadrature의 형상함수를 도입하여 계산하면 식(8)과 같게 된다.

$$R_{source} = \sum_{i=1}^m N_i R_i \quad (8)$$

N_i 는 형상함수고 R_i 은 각 절점의 R 의 값이 된다. 식 (7)과 식(8)을 Gaussian Quadrature를 적용하면

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{ig=1}^m \frac{(\vec{J} \times \vec{R})}{R^3} |G w_{ig} \quad (9)$$

가 된다. 하지만 코일의 내부에서는 측정점과 원천점이 같게 되어 $R=0$ 이 되어 자속밀도를 계산할 수 없게 된다. 이와 같은 점을 특이점이라 한다. 본 논문에서는 해결 방법으로 두 가지의 방법을 제시하였다. 첫 번째 방법으로는 그림 1의 (a)과 같이 코일의 단면적 중앙에 측정점을 놓고 x축과 z축에 따라 각각 4개로 나누어 총 16개의 요소망을 형성하여 각각의 요소에 대하여 계산하였다. 두 번째 방법으로 그림 1의 (b)와 같이 측정점에 인접한 요소의 크기를 동일하게 놓게 계산하였다. 두 가지 방법 모두 측정점에 따라서 요소망의 형태가 변하게 되고 이와 함께 코일 내부에 원천점과 측정점이 일치하는 점이 존재하지 않으므로 비오-사바르법을 이용하여 수치 적분을 할 수 있게 되었다.

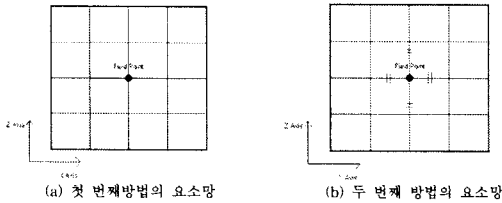


그림 1. 요소 분할

3차원 코일의 자속밀도를 계산하기 위하여 코일을 원주방향으로 곱하게 되는데 본 논문에서는 코일을 원주방향으로 여러 개로 자른 후 거리를 곱하여 계산하였다. 식 (9)를 정리하면

$$B_x = \frac{\mu}{4\pi} \frac{(J_y R_z - J_z R_y)}{R^3} \sum_{ig=1}^m |G w_{ig} \times N_i r \Delta\theta \quad (10)$$

$$B_y = \frac{\mu}{4\pi} \frac{(J_z R_x - J_x R_z)}{R^3} \sum_{ig=1}^m |G w_{ig} \times N_i r \Delta\theta \quad (11)$$

$$B_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{(J_x R_y - J_y R_x)}{R^3} \sum_{ig=1}^m |G w_{ig} \times N_i r \Delta\theta \quad (12)$$

이 된다. $\Delta\theta$ 는 코일을 조각하나가 이루는 원주방향의 각도이다.

2.3 해석결과

그림 1과 같이 요소를 형성하고 식 (1)을 이용하여 자속밀도를 계산하였다. 해석 대상에 대한 사양은 표 1에 나타내었다.

표 1. 해석대상의 사양

항목	값	항목	값
Coil 내경	0.5 [mm]	Coil 외경	1.5 [mm]
Coil 두께	1 [mm]	전류밀도	1000 [A/m^2]

해석 대상은 그림 2와 같이 코일 내부의 좌표는 X축으로 $0.5e-3$ 에서 $1.5e-3$ 이고 Z축의 좌표는 $-0.5e-3$ 에서 $+0.5e-3$ 으로 코일의 단면적이 $1mm \times 1mm$ 을 갖는다. 따라서 코일의 중심은 $xyz(0,0,0)$ 에 놓고 Z축을 중심으로 회전 하는 코일의 형상을 하고 있다. 이와 같은 형상은 2차원 축대칭 모델로 계산할 수 있다. 계산 결과를 효과적으로 검증하기 위하여 유한요소프로그램인 FEMLAB은 2차원 축대칭으로 모델링 하여 계산하였으며, OPERA3D는 3차원으로 모델링 하였으며 계산 결과와 비교하였다.

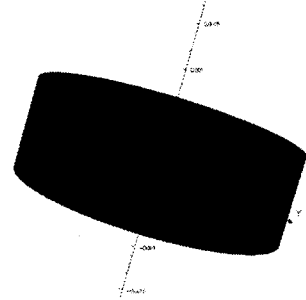


그림 2.코일의 좌표 및 형상

계산 속도와 결과의 오차를 고려하여 본 논문에서는 코일의 조각이 90개 일 때 $\Delta\theta=4$ 도 일 때를 선정하여 계산하였다. 그림 3에서 그림 5까지는 첫 번째 방법으로 측정점과 경계까지 거리의 중간 지점에 요소를 나누어 형성하여 계산하였을 때 X축에 따라 자속밀도의 분포를 나타내고 있다. 코일의 내경의 경계부분에서 가장 큰 자속밀도 값을 갖으며, 코일의 외경 경계부분에서 가장 작은 자속밀도 값을 갖는다. 코일의 중심에 측정점이 있을 때, 즉 X축이 1mm일 때의 자속밀도의 오차가 가장 작았다.

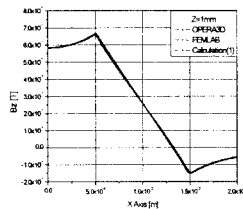


그림3. z=1mm 자속밀도[T]

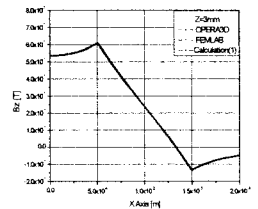


그림 4. z=3mm 자속밀도[T]

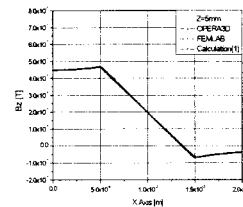


그림5. z=0mm 자속밀도[T]

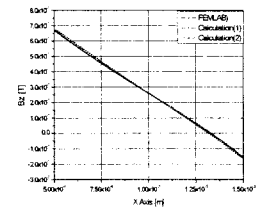


그림 6. 계산방법 비교

코일의 중심인 1mm지점으로 1mm보다 작은 구간에서는 비교 값보다 조금 더 큰 값을 갖으며 1mm보다

큰 구간에서는 비교 값보다 작은 값을 나타낸다. 오차는 X축방향으로 0에서 1mm까지 구간 보다 1mm에서 1.5mm까지 구간에서의 오차가 더 큰 것을 알 수 있다. 측정점이 코일의 외측으로 이동하면서 요소가 조밀해짐에 따라 결과가 오차가 1~4%로 나타났다. 그림 6은 Z=0일때 첫 번째 방법과 두 번째 방법의 결과를 비교하였다. 그림 7에서 그림 12은 두 번째 방법으로 측정점에 인접한 요소의 크기를 같게 하였을 때 X축에 따른 자속밀도값을 나타내고 있다. 첫 번째 방법에서 나타났던 오차가 발생하지 않은 것을 볼 수 있다.

는 Z축에 따라 0에서 5mm까지이고 코일 외부영역은 5mm이후부터 1.5mm까지는 코일 외부 영역이다. 코일의 전 영역에서 오차가 거의 발생하지 않은것을 볼 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 코일 내부에서의 특이점을 고려하여 biot-savar법을 이용하여 3차원 코일의 자계를 계산하였다. 계산결과는 FEM상용프로그램의 계산 결과와 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 첫 번째 방법으로 계산 하는 경우 요소가 코일의 중앙에 위치했을때 가장 정확한 계산이 되었으며 형상에 따라 계산오차가 발생하였다. 측정점에 인접한 요소의 크기가 동일 할 경우 오차발생이 감소하는것을 볼 수 있었다. 요소망의 형태에 따라서 특이점에 대한 영향이 다르게 나타나는것을 확인 할 수 있었다. 본 연구의 결과는 코일내부의 자계값을 이용하여 임피던스계산이 필요한 와전류탐상과 같은 분야에 도움을 줄 수 있으며 적분방정식을 사용하여 해석하는 경계적분법에서 활용 될 수 있을 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] K.Sawa, "AN EVALUATION OF THE COMPUTATIONAL ERROR NEAR THE BOUNDARY WITH MAGNETOSTATIC FIELD CALCULATION BY B.E.M.", IEEE TANSCTIONS ,VOL. 26, pp403~406,1990
- [2] Stephane Balac, "Cancellation Errors in an Intergral fo Calculating Magnetic Field From Reduced Scalar Potential", IEE TRANSACTIONS , VOL.39 NO.4, 1997~2003, 2003
- [3] M.Gyimesi and D.Lavers, "Biot-Savart Integration for Bars and Arcs", IEEE= TRANSACTIONS,VOL.29, NO.6,2389~2391, 1993
- [4] J.P.P, S. Salon and M.V.K.chari, "A comparison of finite element and boundary element formulation for three dimensional magnetostatic problems", IEEE TRANSACTIONS, Vol.MAG- 20,pp, 1950~1952,1984

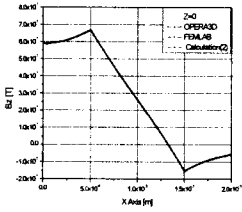


그림 7. Z=0mm 자속 밀도[T]

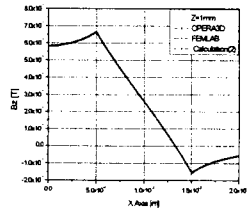


그림 8. Z=1mm 자속 밀도[T]

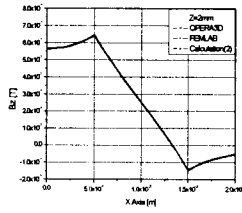


그림 9. Z=2mm 자속 밀도[T]

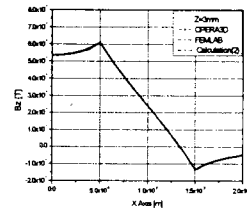


그림 10. Z=3mm 자속 밀도[T]

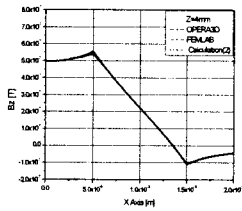


그림 11. Z=4mm 자속 밀도[T]

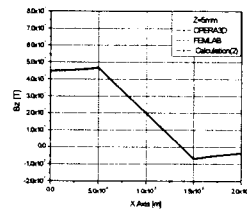


그림 12. Z=5mm 자속 밀도[T]

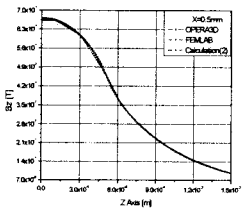


그림 13. X=0.5mm 자속 밀도[T]

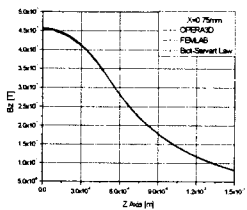


그림 14. X=0.75mm 자속 밀도[T]

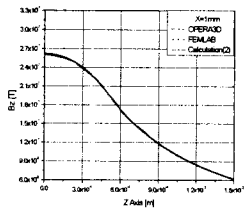


그림 15. Z=1mm 자속 밀도[T]

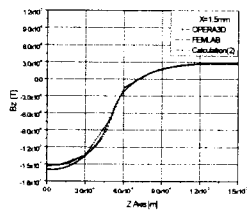


그림 16. Z=1.5mm 자속 밀도[T]

그림 13에서 그림 16까지는 코일 내부에서 Z축 방향에 따른 자속밀도 분포를 나타 내고 있다. 코일의 내부