

지진하중을 받는 대공간 구조물의 동적 거동 특성에 관한 연구

A Study on the Characteristics of dynamic Behaviors for the Spatial Structures under Seismic Load

김민식* 이 상 주** 이 동 우*** 한 상 을****
Kim, Min-Sik Lee, Sang-Ju Lee, Dong-Woo Han, Sang-Eul

Abstract

The earthquake-resistant structural systems have to ensure the sufficient stiffness and ductility for the stability. For those purposes, recently, the performance design concept to increase the degree of absorbed energy level of structures has been proposed. One practical way of the performance design in the spatial structures is to apply the isolation system to boundary parts of roof system and sub-structure to obtain the target performance. So, it is necessary to examine the characteristics of dynamic behavior of spatial structures governed by higher modes rather than lower modes different from the cases of high rise buildings. The objectives of this paper are to develop the equivalent model to simplify the analytical processes and to investigate the dynamic behavior of roof system according to the mass and the stiffness of sub-structures as a fundamental study of performance design for the spatial structures.

Keyword : Equivalent Model, Seismic Isolation, Performance Design

1. 서 론

구조물의 내진설계에서는 강성과 연성을 동시에 확보하고자 하는 성능설계의 개념에 기초하여 연구가 활발히 수행^[1]되고 있지만, 성능목표를 어떻게 설정할 것인가에 대해서는 아직 명확한 근거를 제시하지 못하고 있는 실정이다. 성능설계란 외력에 대해서 구조물의 연성 즉 소성변형능력을 증대 시킴으로써 구조물이 흡수 가능한 에너지를 증대시키는 것이라 정의할 수 있고, 목표성능에 대응하여 설계기준을 규정할 필요성이 대두되고 있다.

일반 구조물의 경우 내진성능을 향상시키기 위해 내진, 제진, 면진시스템의 도입이 실용화되고 있으며, 대공간 구조물의 내진설계에서도 내진성능

을 확보할 수 있는 구조시스템으로서 이들 시스템에 대한 관심이 증가되고 있다. 특히 면진시스템은 면진 층에서 지진입력에너지를 충분히 흡수함으로써 면진층보다 상부의 응답을 현저하게 저감시키는 것이 가능하므로, 상부 돔 구조와 하부구조 사이에 면진 층의 도입에 따른 거동특성과 및 적용성에 대한 연구가 진행되고 있다^{[2],[3]}. 또한 상부 돔 구조의 지진응답특성은 하부구조의 강성, 질량 및 소성화 등의 특성에 크게 영향 받을 것으로 예상되기 때문에, 이들을 고려하여 상부 돔 구조 지지부의 입력지진을 추정할 필요가 있다. 하부구조의 응답가속도는 저감시킬 필요가 없다하더라도 상부 돔 구조는 대지진에 대해서도 탄성을 유지하며, 붕괴되지 않는다는 성능목표를 설정하는 경우, 상부 돔 구조와 하부구조 사이에 면진층을 도입하는 것은 상호구조에의 영향을 최소화할 수 있고, 최소한의 비용으로 설계목표를 달성할 수 있다.

* 정회원 · (주)Plus구조기술사사무소 사원

** 정회원 · (주)Plus구조기술사사무소 선임연구원

*** 정회원 · (주)Plus구조기술사사무소 대표이사

**** 정회원 · 인하대학교 건축학부 교수

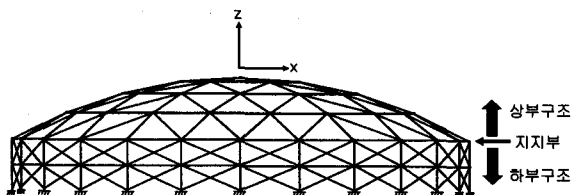
또한 일반 고층구조물의 내진해석에 있어서 접합부 등을 고려한 적절한 수평강성을 부여하는 경우, 구조물의 거동은 저차 모드에 크게 영향을 받는다. 그러나 대공간 구조물은 고차모드의 영향이 커서 이를 무시할 수 없으며, 또한 재료비선형 뿐만 아니라 기하학적 비선형 및 수평지진동에 의한 연직방향의 응답도 고려할 필요가 있다. 이로 인해 자유도수가 많은 대공간 구조물은 해석에 많은 시간이 소요된다.

본 연구는 상부 돔 구조와 하부구조 사이에 면진층을 도입함에 따른 구조물의 거동특성을 파악하기 위한 기초적인 연구로서 구조물의 등가모델화를 수행하고 다양한 지진파와 반개각을 파라미터로 하여 타당성을 검증한다. 또한 하부구조의 질량과 강성에 따른 상부 돔 구조의 거동특성을 규명한다.

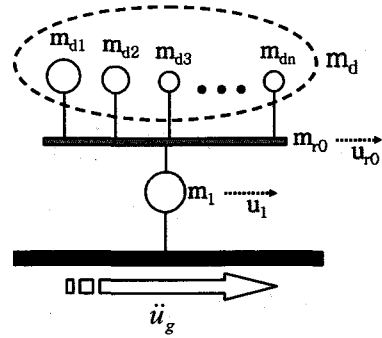
2. 대공간 구조물의 등가모델화

그림 1은 하부구조를 갖는 단층 래티스 돔으로, 지지부를 기준으로 상부 돔 구조와 하부구조로 구분한다. 여기에서 하부구조의 층수는 2층으로 가정하며, 서론에 서술한 것처럼 해석 시간의 단축과 해석의 단순화를 목적으로 구조물을 그림 2와 같이 모델화 한다.

하부구조는 다절점의 1축 모델로 가정할 수 있으며, 수평 두 방향에 변위가 발생하는 경우도 같은 방법으로 기술할 수 있기 때문에 여기에서는 단순화를 위하여 수평의 X방향으로 이동하는 경우를 다룬다. 이 하부구조 모델은 같은 높이에서는 같은 수평변위로 가정하고 있기 때문에 상부 돔 구조의 지지부에서는 X방향과 동일한 수평변위가 발생하는 것으로 한정한다.



<그림 1> 하부구조를 갖는 단층 래티스 돔



<그림 2> 등가 모델

입력위치 X방향의 입력지진가속도는 \ddot{u}_g 로 하고 하부구조 1층과 최상층의 변위는 u_1, u_0 로 한다. 최상층의 변위는 상부 돔 구조의 지지부 위치 수평변위이며, 각 층의 질량은 m_1, m_0 이다. 단, 최상층의 질량은 최상층과 동일한 변위가 발생하는 지지부의 질량도 포함한 질량이고, 상부 돔 구조의 질량은 m_d 로 한다.

상부 돔 구조는 트러스 부재로 구성되어 있고, 면진층 도입을 가정하여 탄성 선형거동을 전제로 한다. 지지부의 수평변위를 0으로 하고, 이것을 자유도로부터 제외한 경우의 운동방정식은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{\xi_x\} \ddot{u}_g \quad (1)$$

여기에서 $\{u\}, [M], [C], [K]$ 는 각각 변위 매트릭스, 집중질량 매트릭스, 감쇠 매트릭스, 강성 매트릭스이다. 또한, $\{\xi_x\}$ 는 X방향 지진동에 의한 지진영향계수이고, 지진하중을 직접 받는 X방향 변위성분에 대해서는 1, 그 이외의 성분에 대해서는 0이다. 따라서 $\{\xi_x\}$ 는 입력 지진동이 X방향의 성분만 존재하므로,

$$\{\xi_x\}^T = \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots\} \quad (2)$$

으로 표현되고, 비감쇠 자유진동모드와 진동수는

$$\omega_i^2 [M] \{u_i\} = [K] \{u_i\} \quad (3)$$

로부터 구하며, 여기에서 ω_i 는 i 차 모드의 고유진동수이다. 고유모드는 상부 돔 구조의 질량 m_d 를 기준으로 다음과 같이 정규화 한다.

$$\{u_i\}^T [M] \{u_i\} = m_d \quad (4)$$

하부구조의 응답 특성에 따른 상부 돔 구조의 영향을 고려하기 위해 상부 돔 구조의 변위, 가속도를 먼저 구한 n 개의 고유모드, $\{\xi_x\}$ 와 최상층의 변위 u_{r0} 를 이용하여 다음과 같이 표시한다.

$$\{u\} = \{\xi_x\} u_{r0} + \sum_{i=1}^n \eta_i q_i(t) \{u_i\} \quad (5)$$

$$\{\ddot{u}\} + \{\xi_x\} \ddot{u}_g = \{\xi_x\} \ddot{u}_g + \{\xi_x\} \ddot{u}_{r0} + \sum_{i=1}^n \eta_i (\ddot{q}_i(t)) \{u_i\} \quad (6)$$

여기에서, $q_i(t)$ 는 일반화변위이고, η_i 는 모드참여계수이며 다음 식으로 표현된다.

$$\eta_i = \{u_i\}^T [M] \{\xi_x\} / \{u_i\}^T [M] \{u_i\} \quad (7)$$

상부 돔 구조와 하부구조에 대하여 가상일의 원리를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta E_D + \delta E_B = 0 \quad (8)$$

단, δE_D 과 δE_B 는 각각 상부 돔 구조, 하부구조에 대한 가상일이며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta E_D = \delta \{u\} ([M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} + [M] \{\xi_x\} \ddot{u}_g) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta E_B = & \delta(u_{r0} - u_1) \{Q_{r0}\} + \delta(u_{r0}) m_{r0} \{ \ddot{u}_{r0} + \ddot{u}_g \} \\ & + \delta(u_1) \{Q_1\} + \delta(u_1) m_1 \{ \ddot{u}_1 + \ddot{u}_g \} \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서, Q_{r0} , Q_1 은 최상층과 1층의 복원력이다. 다시 식 (5)를 식 (9)에 대입하고, $y_i = q_i + u_{r0}$ 로 하여 식을 정리하면 다음과 같은 매트릭스 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \vdots \\ \delta y_n \\ \delta u_{r0} \\ \delta u_1 \end{Bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \eta_1^2 m_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2^2 m_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_n^2 m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{r0} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \eta_i^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 + \ddot{u}_g \\ \ddot{y}_2 + \ddot{u}_g \\ \vdots \\ \ddot{y}_n + \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_{r0} + \ddot{u}_g \\ \ddot{u}_1 + \ddot{u}_g \end{Bmatrix} + \\ \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \vdots \\ \delta y_n \\ \delta u_{r0} \\ \delta u_1 \end{Bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2h_1 \omega_1 \eta_1^2 m_d & 0 & 0 & 0 & -2h_1 \omega_1 \eta_1^2 m_d & 0 \\ 0 & 2h_2 \omega_2 \eta_2^2 m_d & 0 & 0 & -2h_2 \omega_2 \eta_2^2 m_d & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h_n \omega_n \eta_n^2 m_d & -2h_n \omega_n \eta_n^2 m_d & 0 \\ -2h_1 \omega_1 \eta_1^2 m_d - 2h_2 \omega_2 \eta_2^2 m_d \cdots - 2h_n \omega_n \eta_n^2 m_d & m_{r0} + \sum_{i=1}^n 2h_i \omega_i \eta_i^2 m_d + c_2 & -c_1 \\ 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ u_{r0} \\ u_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \vdots \\ \delta y_n \\ \delta u_{r0} \\ \delta u_1 \end{Bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \eta_1^2 \omega_1^2 m_d & 0 & 0 & 0 & -\eta_1^2 \omega_1^2 m_d & 0 \\ 0 & \eta_2^2 \omega_2^2 m_d & 0 & 0 & -\eta_2^2 \omega_2^2 m_d & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_n^2 \omega_n^2 m_d & -\eta_n^2 \omega_n^2 m_d & 0 \\ -\eta_1^2 \omega_1^2 m_d - \eta_2^2 \omega_2^2 m_d \cdots - 2\eta_n^2 \omega_n^2 m_d & \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \omega_i^2 m_d + k_2 - k_1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ u_{r0} \\ u_1 \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

상부 돔 구조는 그림 2에서 보는 바와 같이 2층 1축 모델의 최상층에 n 개의 집중질량으로 분해하여 모델화할 수 있다. 병렬 집중질량의 i 모드 유효질량 m_{di} , 유효강성 K_{di} , 유효감쇠계수 C_{di} 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

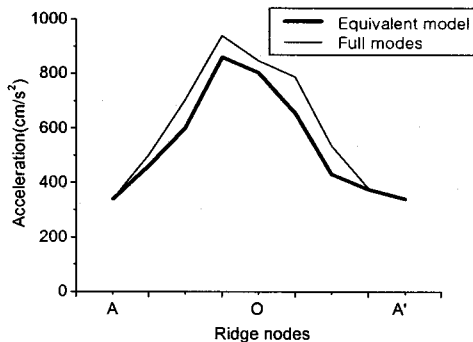
$$m_{di} = \eta_i^2 m_d, \quad k_{di} = \omega_i^2 m_{di}, \quad c_{di} = 2h_i k_{di} / \omega_i \quad (12)$$

여기에서 보인 바와 같이 모드분해법을 이용함으로써, 상부 돔 구조를 병렬 집중질량으로 모델화할 수 있다. 필요한 채용 모드 수는 구조시스템의 특성이나 정도에 따라 다르지만, 일반적으로 유효 질량비가 90퍼센트 이상이 되도록 선택한다.

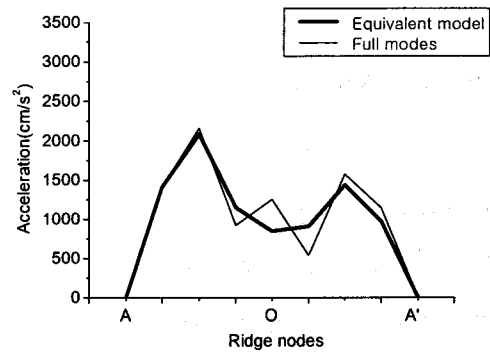
3. 등가 모델의 타당성 검증

등가 모델을 이용한 해석의 타당성을 검증하기 위하여, 전체 모드를 모두 사용한 해석의 결과를 기준으로 등가 모델의 해석과 비교하였다. 해석 모델은 그림 3과 같은 61개의 절점, 156개의 부재로 이루어진 단층의 패러렐 라멜라 돔으로 스패 20미터, 반개각 30°인 모델을 사용하였다.

입력 지진파로 El-Centro 지진파, Kobe 지진파, Northridge 지진파를 사용하여 해석하였을 때와, 반개각을 20°, 30°, 40°, 50°로 변화시키면서 해석하였을 때의 결과를 비교하여 수평 응답과 연직 응답의 정확성을 검증하였는데 결과는 표 1~2와 같다.



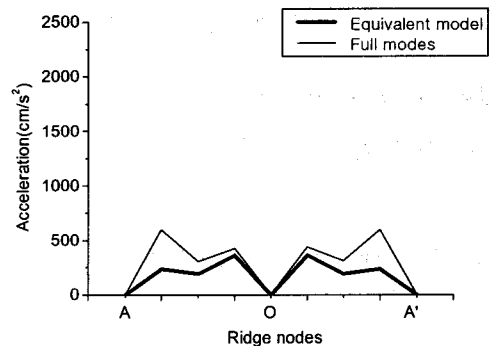
<그림 3> 수평 가속도 응답의 비교(Northridge)



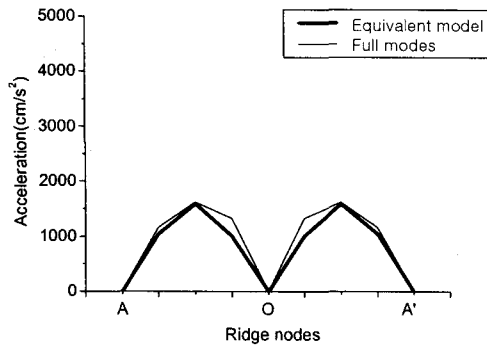
<그림 4> 연직 가속도 응답의 비교(Kobe)

<표 1> 지진파에 따른 오차의 변화

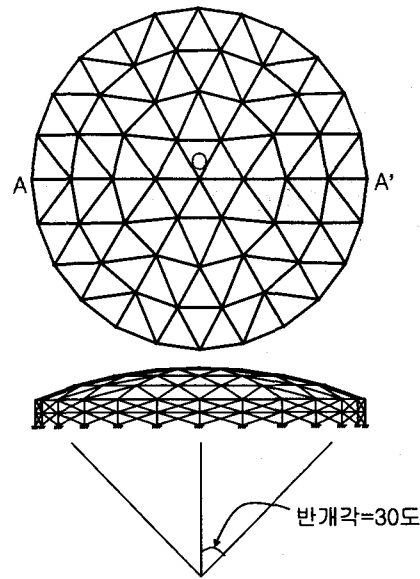
지진파	오		차	
	가속도(X)	가속도(Z)	변위(X)	변위(Z)
El-Centro	8%	11%	7%	10%
Kobe	6%	5%	2%	1%
Northridge	6%	3%	7%	1%



<그림 5> 연직 가속도 응답의 비교(반개각 20°)



<그림 6> 연직 가속도 응답의 비교(반개각 50°)



<그림 7> 해석 모델

<표 2> 반개각에 따른 오차의 변화

반 개 각	오 차			
	가속도(X)	가속도(Z)	변위(X)	변위(Z)
20°	4%	39%	3%	34%
30°	7%	12%	6%	10%
40°	12%	3%	6%	7%
50°	2%	2%	2%	1%

<표 3> 해석 모델의 제원

상부 돔 구조	
형 식	단층 패러렐 라멜라 돔
스 팬	20m
반개각	30°
절 점	61개
부 재	156개
지지점	24개

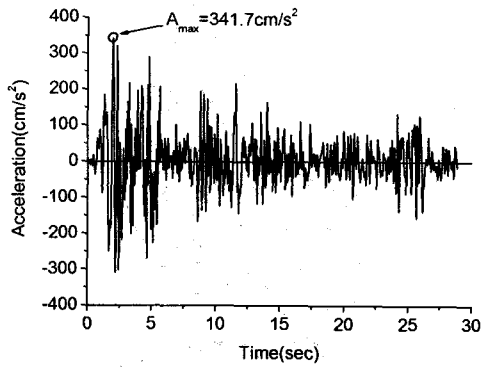
하부 구조	
절 점	72개
부 재	144개
지 점	24개

4. 해석 모델의 지진 응답 거동

4.1 해석 모델

해석 모델은 그림 7과 같이 상부 돔 구조는 단층의 패러렐 라멜라 돔으로 탄성계수는 2,100tf/cm², 부재는 단면적 12cm²인 원형 강관을 사용하였고 제원은 표 3과 같다.

X방향의 수평 입력 지진파로 그림 8의 El-Centro NS파(1940)를 사용하였는데, 입력 지진파는 0.01초 간격이고, 해석시간 증분은 0.01초, 해석 시간은 20초로 하였다.



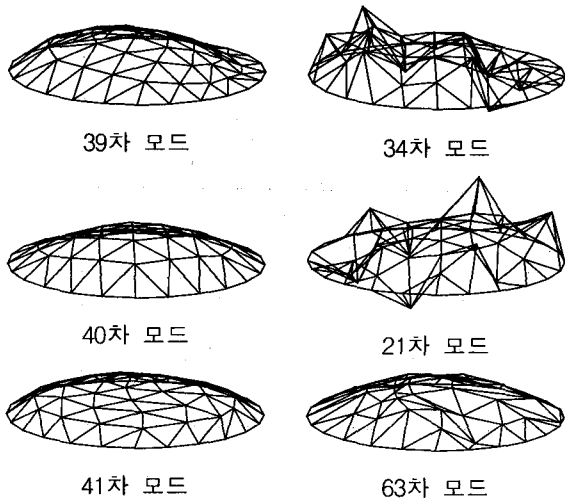
<그림 8> 입력지진파(EI-Centro NS)

<표 4> 고유치 해석에 따른 모드와 모드참여계수

i	모드참여계수 (η_i)	모드	유효질량비 ()
1	0.750	39	0.563
2	0.289	34	0.646
3	0.287	40	0.729
4	0.286	21	0.810
5	0.207	41	0.853
6	0.156	64	0.878
7	0.144	51	0.899
8	0.127	57	0.915

4.2 고유모드와 지진응답 특성

그림 9는 고유치 해석 결과 모드참여계수가 큰 순서대로 모드의 형상을 나열한 것이다. 모드참여계수가 가장 큰 39차 모드와 34차 모드, 21차 모드 등은 상하 역대칭인 형상을 보이고, 40차, 41차, 63차 모드 등은 절점이 Z축을 중심으로 회전하는 형상을 보이고 있다.



<그림 9> 해석 모델의 고유모드

<표 5> 등가 모델 구성을 위한 유효값

i	유효질량 (kg)	유효강성 (kgf/cm ²)	유효감쇠 (kg·sec)
1	1716.165	46271.602	891.121
2	254.713	6903.501	132.605
3	251.670	7094.214	133.619
4	249.223	7025.262	132.320
5	131.237	3726.375	69.931
6	73.835	2096.491	39.344
7	63.578	1830.637	34.116
8	49.064	1465.346	26.813

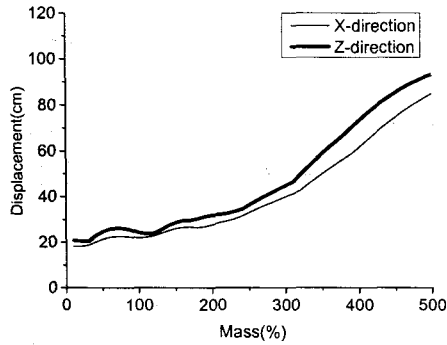
4.3 하부구조의 질량·강성의 변화에 의한 상부 돔 구조의 응답 특성

하부구조의 질량과 강성을 변화시키면서 그에 따른 상부 돔 구조의 응답 특성을 알아보았다. 해석 모델의 하부구조 질량을 기준으로 하고, 그 질량의 10퍼센트에서 500퍼센트까지 하부구조의 질량을 변화시켰을 때 상부 돔 구조의 응답 특성을 규명하였다.

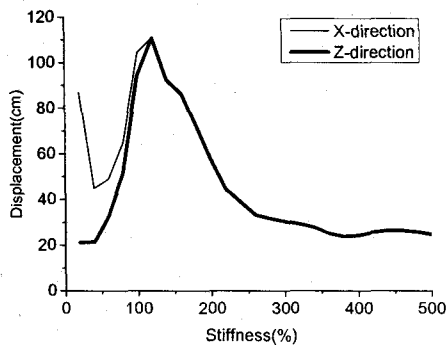
그림 10은 하부구조의 질량 변화에 의한 상부 돔 구조의 변위 응답을 나타낸 것인데, 하부구조의 질량이 증가함에 따라 변위 응답도 증가하였다.

하부구조의 질량 변화와 마찬가지로 하부구조의 강성을 변화시켰을 때, 그림 11과 같이 하부구조의 강성 변화에 의한 상부 돔 구조의 변위 응답은 일정한 패턴이 있다고는 할 수 없지만 하부구조의

강성 변화가 상부 돔 구조의 응답에 큰 영향을 미쳤다.



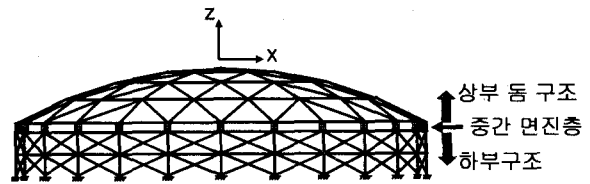
<그림 10> 면진층 도입 전 하부구조의 질량 변화에 의한 상부 돔 구조의 변위 응답



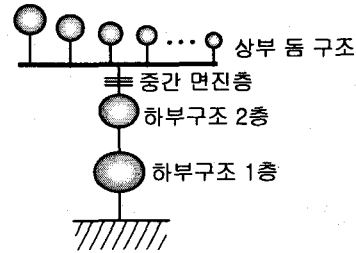
<그림 11> 면진층 도입 전 하부구조의 강성 변화에 의한 상부 돔 구조의 변위 응답

4.4 중간 면진층 도입

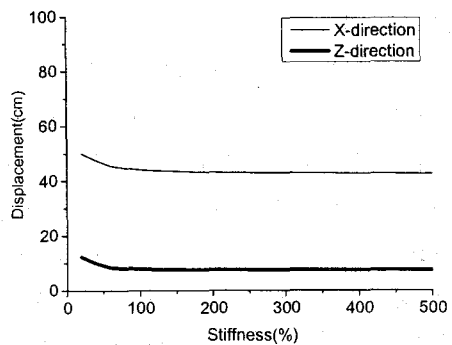
그림 12와 같이 상부 돔 구조와 하부구조 사이에 중간 면진층을 도입하고, 그림 13과 같이 등가 모델에 면진층을 적용하여 해석하였는데, 면진층 도입 시 하부구조의 질량과 강성의 변화에 의해 상부 돔 구조의 응답 특성을 알아보기 위해 비면진 시와 마찬가지로 하부구조의 질량과 강성을 10 퍼센트에서 500퍼센트까지 증가시키면서 상부 돔 구조의 응답 특성을 규명하였다.



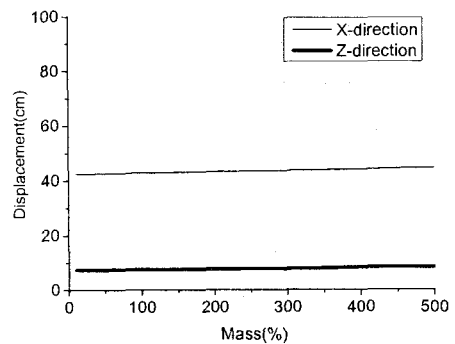
<그림 12> 중간 면진층을 도입한 대공간 구조 시스템



<그림 13> 중간 면진층 도입한 등가 모델



<그림 14> 면진층 도입 후 하부구조의 강성 변화에 의한 상부 돔 구조의 변위 응답



<그림 15> 면진층 도입 후 하부구조의 질량 변화에 의한 상부 돔 구조의 변위 응답

그림 14, 15에서 볼 수 있듯이 면진층을 도입하면 하부구조의 질량과 강성의 변화는 상부 돔 구조의 응답에 별 영향을 주지 못하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 지진하중을 받는 단층 래티스 돔 구조물을 등가모델로 치환하여 지진응답해석을 수행하였다. 또한 등가모델을 이용하여 구조물의 가속도와 변위 응답을 파악하였으며, 특히 하부구조의 질량과 강성 변화에 의한 상부 돔 구조의 거동 특성을 규명하였다. 얻어진 결과를 정리하면 다음과 같다.

1) 수평 방향의 입력 지진에 의한 대공간 구조 시스템의 응답은 일반 고층 구조물과는 달리 연직 방향의 응답이 매우 크게 됨을 확인할 수 있었고, 등가 모델을 이용한 해석의 타당성을 검증하기 위해서 전체 모드를 모두 사용한 해석의 결과를 기준으로 유효질량비 90퍼센트를 갖는 등가 모델의 해석과 비교하였다. 입력 지진파로 El-Centro 수평파, Kobe 수평·연직파, Northridge 수평·연직파를 사용하였을 때, 수평 지진파뿐만 아니라 연직 지진파에 대해서도 10 퍼센트 내외의 오차를 보였다. 또한 반개각을 20°, 30°, 40°, 50°로 변화시키면서 그 오차를 비교해 보았을 때, 반개각이 20°일 때는 오차가 30 퍼센트 이상으로 편평셀의 구조적 거동의 민감성으로 인하여 잘 맞지 않지만, 반개각이 커짐에 따라 오차가 10퍼센트 내로 생겨 공학적으로 인정할 수 있는 범위에서 수렴하였다.

2) 등가 모델을 이용한 해석 모델의 동적 해석 결과 전체 모드 111개 중 8개(8/111)의 모드만을 사용하여 해석이 가능하였고, 고유 모드는 상하 역대칭의 형상을 갖는 모드가 지배적이며, 지배 모드 중 Z축을 중심으로 회전하는 형상의 모드도 발생하였다.

3) 하부구조의 질량이나 강성을 변화시키면서 상부 돔 구조의 응답을 살펴본 결과 하부구조의 질량이 증가함에 따라 상부 돔 구조의 응답도 증가하는 경향을 보였고, 하부구조의 강성의 변화에 따라서 상부 돔 구조의 응답은 일정한 패턴을 보이지는 않았지만, 크게 변화하였다. 따라서 설계 시 상부 돔 구조는 같고, 하부구조의 질량이나 강성을 변화시킨 모델의 동적 해석이 필요하다.

4) 중간 면진층 도입 시 수평 변위 응답은 증가하지만, 수평 가속도와 연직 가속도·변위는 비면진 시에 비해 약 20~30퍼센트의 크기로 감소하는 것을 확인 할 수 있었다. 또한 하부구조의 질량이나 강성을 변화시키면서 해석한 결과 상부 돔 구조의 응답에는 거의 영향을 미치지 못하였다. 따라서 설계 시 중간 면진층을 도입하면 상부 돔 구조의 응답을 저감시킬 수 있고, 하부구조의 설계를 용이하게 할 수 있다.

이상과 같이 면진 시스템의 도입에 따른 구조물의 거동 특성을 규명하기 위한 기초적인 연구를 수행하였는데, 본 논문에서 제안한 등가 모델을 사용함으로써 대공간 구조 시스템의 능률적인 해석이 가능하며 설계 시 유효한 것으로 판단되며, 이를 이용하여 상부 돔 구조를 탄성 거동에 머물게 하기 위한 면진 시스템의 성능을 정량화하는 것이 향후의 연구 과제로 남아있다.

참고 문헌

1. 崔原豪, “等價應答을 利用한 建築構造物의 非彈性 地震舉動 分析 및 耐震性能 評價”, 成均館大學校 博士學位 論文, 2003.10
2. 加籾 史郎, “空間構造의 地震應答分析と設計法에 關する 研究”, 豊橋技術科學大學, 2003
3. 加籾 史郎, “免震ドーム의 動的舉動と設計法에 關する 基礎的 研究”, 豊橋技術科學大學, 2002
4. A. K. Chopra, Dynamics of Structures-Theory and Applications to Earthquake Engineering,

Prentice Hall, 2001

5. L. Meirovitch, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff, 1980
6. J. W. Tedesco, Structural Dynamics-Theory and Applications, Addison-Wesley, 1999
7. R. Levy, Analysis of Geometrically Nonlinear Structures, Chapman & Hall, 1994