
막 구조물의 측지선을 이용한 재단도 생성에 관한 연구

A Study on Cutting Pattern Generation of Membrane Structures by Using Geometric Line

안 상 길 * 손 수 덕 ** 김 승 덕 ***
Ahn, Sang Gil Shon, Su Deok Kim, Seung Deog

Abstract

Membrane structures, a kind of lightweight soft structural system, are used for spatial structures. The material property of the membrane has strong axial stiffness, but little bending stiffness. The design procedure of membrane structures are needed to do shape finding, stress-deformation analysis and cutting pattern generation. In shape finding, membrane structures are unstable structures initially. These soft structures need to be introduced initial stresses because of its initial unstable state, and it happens large deformation phenomenon. And also there are highly varied in their size, curvature and material stiffness. So, the approximation inherent in cutting pattern generation methods is quite different.

Therefore, in this study, to find the structural shape after large deformation caused by initial stress, we need the shape analysis considering geometric nonlinear term. And the geodesic line on surface of initial equilibrium shape and the cutting pattern generation using the geodesic line is introduced.

Keywords : Geodesic line, Cutting pattern, Membrane Structures, Geometric Nonlinearity, Shape Analysis

1. 서 론

대공간구조물은 20세기 중반에 신재료 및 신기술의 개발과 함께 점차 경량화해가기 시작하면서 비약적인 발전을 시작했다. 필요 최소한의 자중으로 최대의 적재하중을 지지하는 경량의 공간구조시스템은 대부분 경제적이며, 힘의 흐름이 그대로 구조물의 형태에 표현되므로 미적으로도 아름답다. 연성 구조물로서 대공간구조물의 시작은 1972년 Frei Otto에 의해 건설된 뮌헨 올림픽을 위한 케이블 네트 구조물이며, 압축과 휨을 주체로 하는 돔 구조물을 대신하여, 1950년대부터 막구조라는 장력을 주체로 하는 구조시스템이 등장하였다. 막 구조는 옛날부터 전해오는 유목민들의 텐트 구조의 이미지에서

벗어나지 못한 채 가설구조물이라는 개념을 가지고 있었고, 서커스단의 천막구조물에서부터 만국박람회 각종 전시장에 이르기까지, 일정한 기간동안 이용된 후 철거되는 형태를 취해 왔다. 그러나 불연성 막재료의 개발 및 막구조 시스템의 체계화와 함께, 종래의 가설구조물이란 개념에서 영구구조물로의 개념 전환이 이루어 졌다. 수많은 연구자 및 설계자로부터 막의 형태결정 및 구조해석에 관하여 연구 개발되어 왔고, 가볍고 경쾌한 미적 장점으로 인해 중소 규모의 구조물뿐만 아니라 각종 스포츠시설, 쇼핑센터, 문화예술의 공간 등, 건축 구조미를 살리는 대공간구조물에 널리 사용되고 있다. 오늘날 막 구조물은 크게 3종류의 기본 시스템, 즉 서스펜션식 막구조, 프레임식 막구조, 공기막구조 등으로 나뉘어 진다.

* 정회원 · 세명대학교 건축공학과 석사과정

** 정회원 · 세명대학교 건축공학과 시간강사

*** 정회원 · 세명대학교 건축공학과 부교수

막구조물은, 축강성은 강하고 휨 강성이 매우 작은 재료를 주 구조재로 사용하므로 초기강성에 매우 민감한 구조체이다. 따라서 막구조물의 해석과 설계는 기존의 강성구조물과는 다른 해석 및 설계과정을 거쳐야만 한다. 막구조물의 초기강성을 확보하기 위해서는 초기응력의 도입이 필수적이고, 초기 강성을 갖기 전에는 불안정 현상을 나타내지만, 초기강성의 도입과 함께 안정상태가 된다. 초기 불안정 구조물에 초기강성을 도입함으로써 대변형 현상이 나타나며, 이에 따른 초기형상을 결정하는 문제는 연성구조물의 설계에 있어서 매우 중요하다.

또 막구조물은 3차원 공간에서 곡면을 따라 형성되는 구조물이므로 막체의 제작을 위해 곡면을 평면에서 재현하는 재단도 작성과정이 필요하다. 공학적 관점에서 볼 때, 곡면은 전개 가능한 곡면과 전개 불가능한 곡면으로 나뉜다. 초기응력의 도입으로 평형 상태에 이르는 막구조물의 곡면은 일반적으로 전개가 불가능한 곡면이며, 곡면을 평면으로 재단하는 데에는 신축을 동반하는 가공이 필요하다.^{[9][7][10]}

막의 소비량을 줄여 시공성 개선을 도모하기 위해 재단도는 곡면의 두 점사이의 최단거리인 측지선을 이용하기 시작하였으며, 이에 관한 연구가 1970년대부터 본격적으로 시작되었다. 1972년 Ishii^[1]는 공기막구조의 곡면방정식을 이용한 두 점 사이의 경로를 연구한 바 있으며, 1980년 Haug^[2]의 가상케이블을 이용하여 측지선을 찾는 기법을 제시한데 이어, 1984년 Barnes와 Wakefield^[4]는 재단도 생성에 관하여 Dynamic relaxation 법을 이용하는 연구가 진행되었다. 일반적으로 재단도 생성에 관한 대부분의 기법들은 Dynamic relaxation이나 Force density 법에 기초를 둔 Unfolding 방법이나 Flating 방법이 주를 이룬다.^[3]

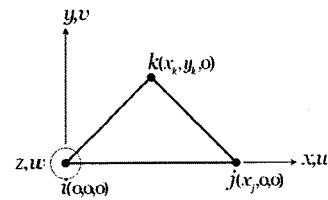
그러므로 막구조물의 구조설계는 다른 일반적인 구조설계와는 달리 형상해석, 응력변형해석 그리고 재단 및 시공해석 등의 일련의 과정을 필요로 하게 된다. 이때 연성구조물은 강성이 매우 작으므로 기하학적 비선형성을 고려한 해석이 필요하다. 따라서 일반적으로 이용되고 있는 범용 구조해석 프로그램은 막구조물의 해석에는 부적당하며, 이러한 특수구조물의 설계 및 시공을 위해 별도의 구조해석 프로그램 및 재단도 생성 프로그램이 필요하다.^{[10][11]}

본 연구에서는 비선형해석 프로그램인 NASSwin을 이용하여 카테나리 곡면에 대한 형상해석을 수행

하고, 초기형상데이터를 이용하여 곡면 위의 측지선과 이를 이용한 재단도를 작성한다. 재단도의 생성은 카테나리 곡면의 위선과 경선방향 두 가지 패턴과 유한요소해석에 사용된 막요소의 패턴을 이용하도록 하며, 모형을 통해 비교하도록 한다.

2. 막요소의 정식화

삼각형 평면 막요소의 요소좌표계를 그림 1에서와 같이 정의한다.



요소좌표계 : x, y, z
 <그림 1> 막요소의 요소좌표계

요소좌표계에서의 절점변위는 다음과 같다.

$$d_x = \begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \\ d_{xk} \end{Bmatrix}, d_y = \begin{Bmatrix} d_{yi} \\ d_{yj} \\ d_{yk} \end{Bmatrix}, d_z = \begin{Bmatrix} d_{zi} \\ d_{zj} \\ d_{zk} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

요소내 변위 u, v, w 를 x, y 의 1차 근사식으로 가정하여 절점변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 \cdot d_{xi} + (b_1 d_{xi} + b_2 d_{xj}) \cdot x \\ &\quad + (c_1 d_{xi} + c_2 d_{xj} + c_3 d_{xk}) \cdot y \\ v(x, y) &= a_1 \cdot d_{yi} + (b_1 d_{yi} + b_2 d_{yj}) \cdot x \\ &\quad + (c_1 d_{yi} + c_2 d_{yj} + c_3 d_{yk}) \cdot y \\ w(x, y) &= a_1 \cdot d_{zi} + (b_1 d_{zi} + b_2 d_{zj}) \cdot x \\ &\quad + (c_1 d_{zi} + c_2 d_{zj} + c_3 d_{zk}) \cdot y \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = -\frac{1}{x_j}, \quad b_2 = \frac{1}{x_j} \\ c_1 &= \frac{x_k - x_j}{x_j y_k}, \quad c_2 = -\frac{x_k}{x_j y_k}, \quad c_3 = \frac{x_j}{x_j y_k} \end{aligned}$$

변형도-변위 관계식을 다음과 같이 비선형항을 포함한 식으로 채택한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

변형도를 절점 변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}d + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} d^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} d \\ \frac{1}{2} d^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} d \\ d^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} d \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d^T = \{d_{xi} d_{yi} d_{zi} d_{xj} d_{yj} d_{zj} d_{xk} d_{yk} d_{zk}\},$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

중분 구간에서의 응력-변형도 관계식을 다음과 같이 평면 응력에 관한 식으로 채택한다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_m}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

현재의 상태를 초기 상태로 가정하고, 현상태에서의 중분에 관한 가상일을 고려하면, 다음과 같은 가상일의 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \varepsilon_x + (\sigma_y^{(0)} + \sigma_y) \delta \varepsilon_y \\ & \quad + (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}) \delta \gamma_{xy}] dV \quad (6) \\ & = (\mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{f})^T \delta \mathbf{d} \end{aligned}$$

식(4)로부터 $\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$, $\delta \gamma_{xy}$ 를 구하여 식(6)에 대입하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & A_m h_m [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)(\mathbf{A}_1 + d^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}) \\ & \quad + (\sigma_y^{(0)} + \sigma_y)(\mathbf{A}_2 + d^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \\ & \quad + (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy})(\mathbf{A}_3 + d^T [\mathbf{C}^T \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}])] \quad (7) \\ & = (\mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{f})^T \end{aligned}$$

식(5)를 이용하여 식(7)을 고차항을 생략하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{f} & = A_m h_m (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^{(0)}) \\ & \quad + A_m h_m [\sigma_x^{(0)} \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \sigma_y^{(0)} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \\ & \quad + \tau_{xy}^{(0)} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{B})] d \quad (8) \\ & \quad + A_m h_m [\mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A}] d \end{aligned}$$

고차항의 생략, 수치 해석의 오차 등으로 인하여 불평형력(residual force)이 발생한다. 이러한 불평형력 \mathbf{r} 을 아래와 같이 정의한다.

$$\mathbf{r} = A_m h_m \cdot \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \mathbf{f}^{(0)} \quad (9)$$

위 식을 이용하여 중분 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f} - \mathbf{r} = [\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G] d \quad (10)$$

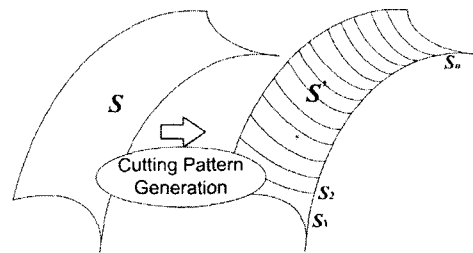
여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_E & = A_m h_m [\mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A}] \\ \mathbf{k}_G & = A_m h_m [\sigma_x^{(0)} \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \sigma_y^{(0)} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \\ & \quad + \tau_{xy}^{(0)} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{B})] \end{aligned}$$

3. 곡면의 하부평면과 측지선

이중 곡률을 가진 3차원 곡면의 경우 2차원 평면으로 전개하는 것은 불가능하다. 초기응력의 도입으로 안정화 되는 막구조물은 이러한 전개 불가능한 곡면이며, 구조물의 건조를 위해서는 최소의 오차를 가진 평면의 재단도를 구성해야만 한다.

재단도 생성의 문제는 일반적으로 다음과 같다. 그림 2와 같이 곡면 S가 주어졌을 때, n개의 스트립을 원소로 하는 집합 S'가 원래의 곡면 S와 최소의 오차를 가지도록 분할하는 것이다.

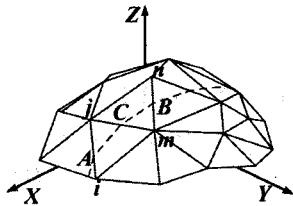


<그림 2> 재단도 생성 개념

스트립을 이루는 경계는 막재의 폭을 고려하여 결정한다. 목표형상의 3차원 절점좌표로 재단을 할 경우, 스트립의 경계곡선은 큰 곡률을 가지게 되며, 막재의 소비량 또한 커지게 된다. 따라서 곡면은 측지선을 이용하여 스트립을 나누는 것이 효율적이다.

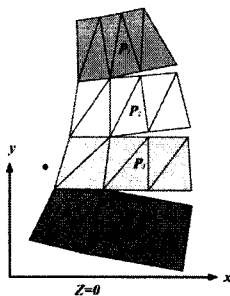
곡면상의 측지선은 곡면의 식을 구할 수 있으면 그것에 따라서 미분방정식으로 나타낼 수 있지만, 일반적인 막구조 곡면은 초기형태를 식으로 표현하는 것은 불가능하다. 따라서 곡면상의 측지선은 곡면상의 절점좌표만을 사용하여 구하게 된다.

곡면 위에 존재하는 두 점을 잇는 최단거리인 측지선은 평면으로 전개한 경우에 직선으로 되려는 성질이 있고, 삼각형 요소를 사용한 측지선의 조건은 그림 3에서 보는바와 같이 $\angle ACj$ 와 $\angle BCm$ 이 같다는 것이다.



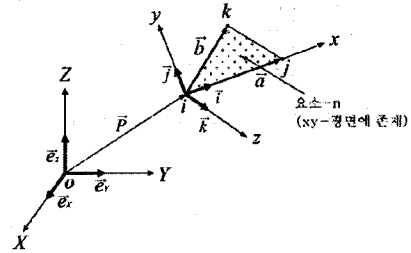
<그림 3> 곡면상의 측지선 조건

삼각형 요소로 구성된 곡면에서 한 요소는 평면을 이룬다. 이는 평면의 조합으로 구성된 곡면은 요소 경계면의 적절한 분리를 이용하여 기하학적으로 평면으로 펼칠 수 있다는 것을 의미한다. 즉 그림 4와 같이 삼각형으로 구성된 다면체의 전개도를 작성하는 것과 같은 방법으로 곡면을 적절히 펼칠 수 있으며, 경우의 수는 요소의 수에 따라 증가한다. 여기서 하나 이상의 요소로 이루어진 평면을 하부평면(P_n)이라 하면, 두 하부평면간의 연결은 구성요소 하나가 경계를 이룬다.



<그림 4> 삼각형 요소의 전개평면

삼각형 요소로 이루어진 곡면에서 하부평면의 구성은 요소 좌표계와 전체 좌표계 간의 관계가 필요하다. 각 좌표계 간의 관계를 살펴보기 위해 전체좌표계를 X, Y, Z , 요소좌표계를 x, y, z 라 하고, 그림 5와 같이 각 좌표계에서의 단위 벡터를 고려한다. 여기서 전체 좌표계에서 절점 i, j, k 의 좌표를 식(11)과 같이 나타낸다.



<그림 5> 삼각형 요소의 좌표계

$$X_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}, X_j = \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{Bmatrix}, X_k = \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix} \quad (11)$$

\vec{ij}, \vec{ik} 벡터를 a, b 로 하고, 식(11)을 이용하면,

$$a = X_j - X_i, b = X_k - X_i \quad (12)$$

윗 식을 이용하면 i, j, k 는 다음과 같다.

$$i = \frac{a}{|a|}, k = \frac{a \times b}{|a \times b|}, j = k \times i \quad (13)$$

식(12)를 이용하여, $a, b, a \times b$ 벡터를 다음과 같이 계산해 둔다.

$$a = (X_j - X_i)e_x + (Y_j - Y_i)e_y + (Z_j - Z_i)e_z \quad (14)$$

$$b = (X_k - X_i)e_x + (Y_k - Y_i)e_y + (Z_k - Z_i)e_z \quad (15)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ X_j - X_i & Y_j - Y_i & Z_j - Z_i \\ X_k - X_i & Y_k - Y_i & Z_k - Z_i \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$= \Delta_x e_x + \Delta_y e_y + \Delta_z e_z$$

여기서,

$$\Delta_x = (Y_j - Y_i)(Z_k - Z_i) - (Y_k - Y_i)(Z_j - Z_i)$$

$$\Delta_y = (Z_j - Z_i)(X_k - X_i) - (Z_k - Z_i)(X_j - X_i)$$

$$\Delta_z = (X_j - X_i)(Y_k - Y_i) - (X_k - X_i)(Y_j - Y_i)$$

계산을 간단히 표현하기 위해, 다음과 같은 기호를 도입한다.

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (17)$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$$

식(14)~(17)을 이용하면, 식(13)은 다음과 같다.

$$\mathbf{i} = \frac{1}{l_{ij}} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) = \lambda_x \mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_y + \lambda_z \mathbf{e}_z \quad (18)$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\Delta} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nu_x \mathbf{e}_x + \nu_y \mathbf{e}_y + \nu_z \mathbf{e}_z \quad (19)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mu_x \mathbf{e}_x + \mu_y \mathbf{e}_y + \mu_z \mathbf{e}_z \quad (20)$$

윗 식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ \nu_x & \nu_y & \nu_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \quad (21)$$

여기서,

$$\lambda_x = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}, \lambda_y = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}, \lambda_z = \frac{Z_j - Z_i}{l_{ij}}$$

$$\frac{\nu_x = \Delta_x}{\Delta}, \nu_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \nu_z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

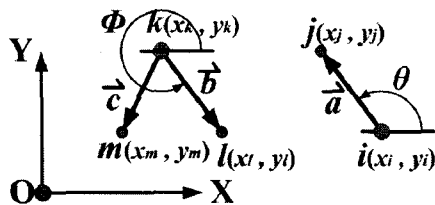
$$\mu_x = \lambda_z \nu_y - \lambda_y \nu_z$$

$$\mu_y = \lambda_x \nu_z - \lambda_z \nu_x$$

$$\mu_z = \lambda_y \nu_x - \lambda_x \nu_y$$

위의 관계를 이용하면 요소좌표계와 전체좌표계 간의 좌표 값을 변환할 수 있다. 즉 3차원 공간상에 표현되는 절점좌표를 2차원의 요소공간에 대한 값으로 다시 표현할 수 있다.

연결된 하부평면을 구성하기 위해서는 한 요소와 다른 한 요소간의 상대적인 2차원 좌표 값이 필요하다. 이때 평면상의 하나의 요소가 다른 하나의 요소와 경계면에서 만날 때 경계면 밖의 한점의 값을 알기 위해서는 요소가 접하는 면의 각도와 이동거리를 구하여야만 그 값을 알 수 있다. 따라서 한 요소를 기준으로 다른 한 요소에 대한 상대좌표를 고려하면 그림 6과 같이 표현할 수 있다.



<그림 6> 인접한 요소의 좌표값

그림에서 두 요소가 접하는 면의 기준 되는 요소 경계면을 벡터 \mathbf{a} , 인접요소의 접하는 면을 벡터 \mathbf{b} 라 하자. 이때 경계면 상에 존재하지 않는 점 m 이 기준 요소의 좌표계에서의 좌표 값은 식(22)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ y_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ -T_2 & T_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m - x_k \\ y_m - y_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서,

$$a + b = T_1, c - d = T_2$$

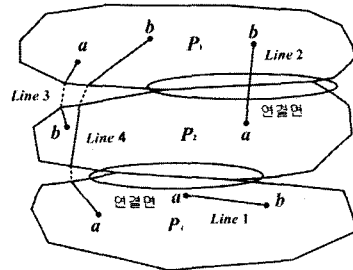
$$a = \cos \theta \cos \Phi = \frac{(x_i - x_j)(x_l - x_k)}{l^2}$$

$$b = \sin \theta \sin \Phi = \frac{(y_i - y_j)(y_l - y_k)}{l^2}$$

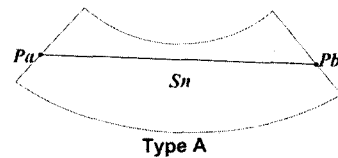
$$c = \cos \theta \sin \Phi = \frac{(x_j - x_i)(y_l - y_k)}{l^2}$$

$$d = \sin \theta \cos \Phi = \frac{(y_j - y_i)(x_l - x_k)}{l^2}$$

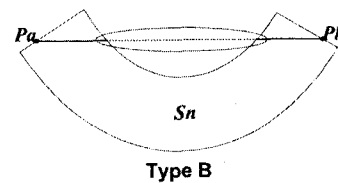
인접요소 좌표변환을 이용해 표현되는 삼각형 요소의 평면은 그림 7에서 보는 바와 같이 몇 개의 하부평면과 각 하부평면간의 연결면으로 구성된다. 이때 두 점 a, b 를 잇는 최단거리 직선은 그림 7과 8에서 보는 바와 같이 하부평면내부에 존재 하거나, 두 개 이상의 하부평면의 경계면을 통해 이어진다.



<그림 7> 전개평면과 전개평면상의 직선



Type A



Type B

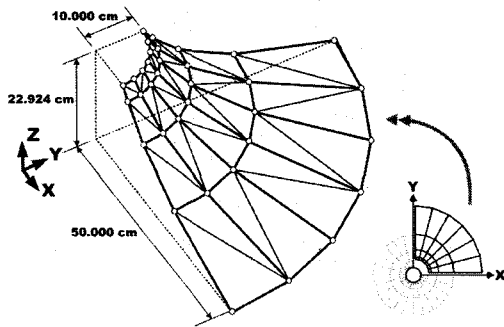
<그림 8> 하부평면과 측지선

만약, 측지선을 가진 하부평면이라면, 그림 8의 Type A와 같이 나타나고, 그렇지 않다면 Type B와 같다. 이때, Type A 평면내부의 한 직선은 측지선의 조건을 만족한다. 즉, 평면 내부의 한 직선은 그 직선과 만나는 다른 모든 직선과의 마주보는 각은 같다. 따라서 하부평면 내부에 존재하는 직선은 삼각형 요소로 구성된 곡면의 측지선이 된다.

4. 카테나리 곡면

막구조물을 설계하기 위해서는 우선 초기장력 도입으로 인한 구조물의 형상을 정확히 알아야 한다. 이를 위해 일반적으로는 모형제작에 의존하고 있으나, 보다 간편하고 경제적인 방법으로 컴퓨터를 이용한 형상해석이 요구된다. 따라서 본 절에서는 카테나리 곡면을 채택하여 형상해석을 수행하고, 하부평면 전개를 통한 측지선과 재단도를 작성해 본다.

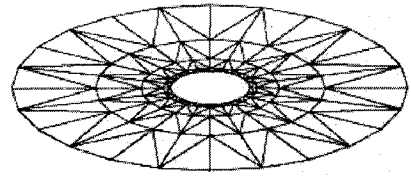
해석대상 예제는 바깥원의 반지름이 50cm, 내부원의 반지름이 10cm, 그리고 높이 22.924cm의 카테나리 곡면이다. 대칭성을 고려하여 1/4 만 해석영역으로 선택하며, 35개의 절점과 48개의 요소로 모델링 하였다.



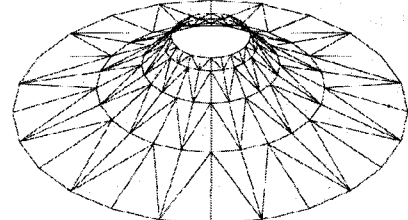
<그림 9> 카테나리 곡면

카테나리 곡면을 2절에서 나타낸 증분방정식을 이용하여 형상해석과 평형해석을 수행한 결과, 그림 10과 같은 형상을 얻을 수 있었다. 해석결과에 대한 검증은 위하여 카테나리 곡면의 이론적인 식(23)의 값과 비교 한 결과를 그림 11에 나타내었고, 해석결과와의 근사곡선은 이론식의 값과 매우 일치한다.

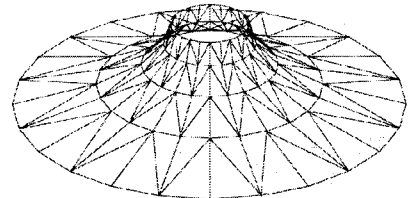
$$Z = a \ln(\sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{X^2 + Y^2 - a^2}) - \ln(a) \quad (23)$$



(a) 초기 단계

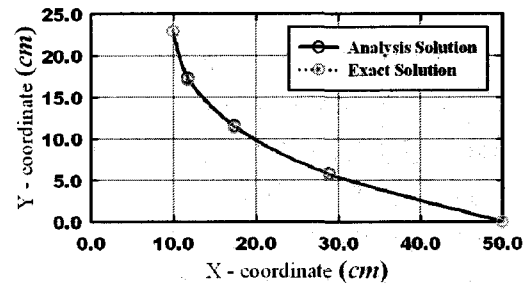


(b) 형상 해석



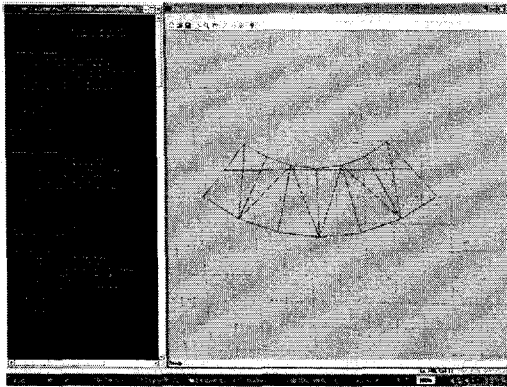
(c) 평형 해석

<그림 10> 카테나리 곡면의 형상해석

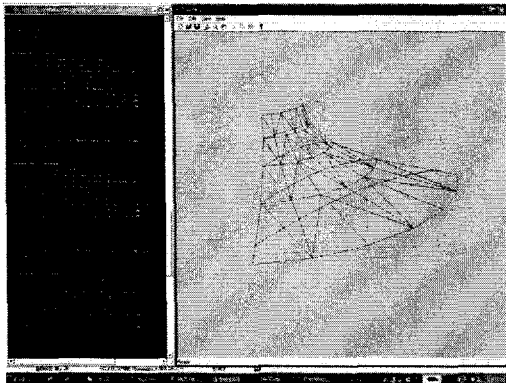


<그림 11> 형상해석 결과의 비교

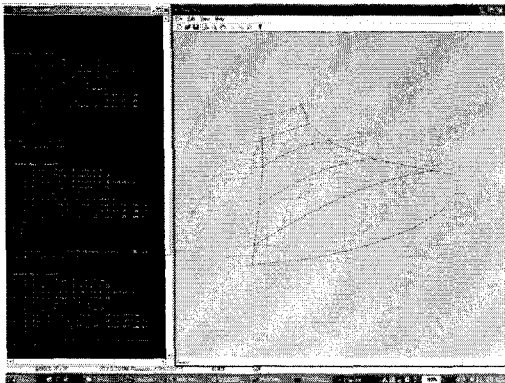
재단도 생성을 위해서 초기형상의 절점좌표를 이용하여 하부평면을 구성한다. 이때 하부평면은 구하고자 하는 측지선의 수와 일치하며, 그 평면은 중복되어도 측지선에 아무런 영향을 미치지 않는다. 그림 12는 측지선을 포함한 카테나리 곡면의 하부평면 중 하나를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 하부평면 내부에 측지선이 포함되어 있는 것을 볼 수 있다. 하부평면을 이용하여 구한 측지선을 요소면 위에 나타내면 그림 13과 같고, 앞에서 언급한 측지선의 조건을 만족한다. 그림 14는 그림 13를 측지선만으로 나타낸 것이다. 또 측지선을 이용하여 전개 가능한 스트립으로 분할하면 그림 15와 같다.



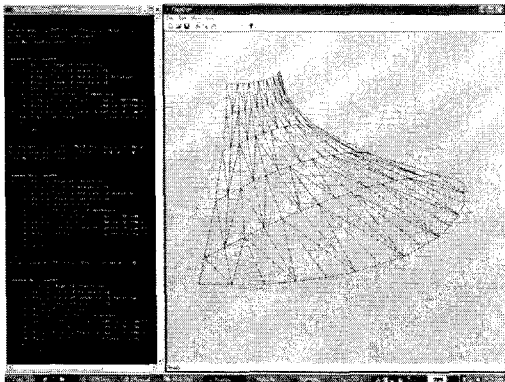
<그림 12> 카테나리곡면의 하부평면과 축지선



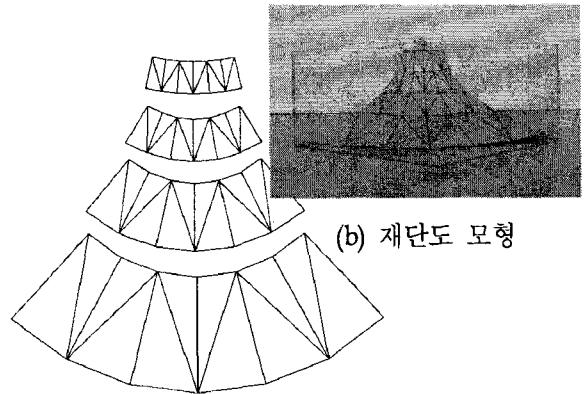
<그림 13> 카테나리 곡면과 곡면상의 축지선



<그림 14> 축지선을 이용한 카테나리곡면



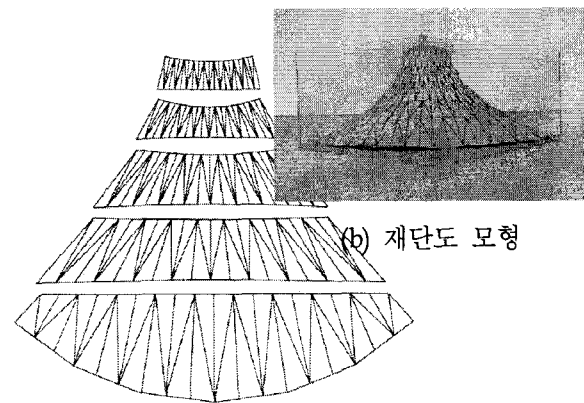
<그림 15> 곡면상의 축지선을 이용한 분할



(a) 재단도

(b) 재단도 모형

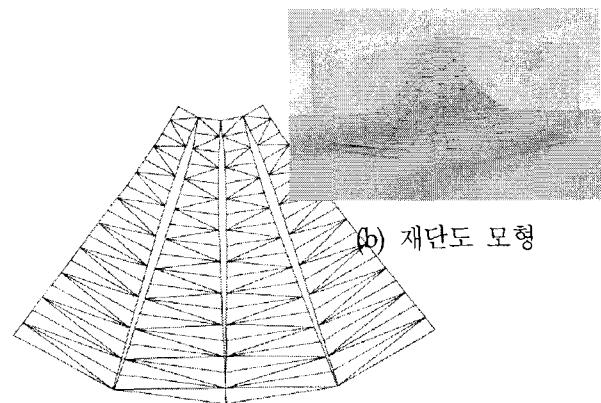
<그림 16> 해석요소를 이용한 재단도



(a) 재단도

(b) 재단도 모형

<그림 17> 위선방향 축지선을 이용한 재단도



(a) 재단도

(b) 재단도 모형

<그림 18> 경선방향 축지선을 이용한 재단도

그림 16은 해석요소를 이용하여 재단도를 작성한 것이고, 그림 17과 그림 18은 각각 카테나리 곡면의 축지선을 위선방향과 경선방향에 대해 구하여 재단

도를 작성한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 해석 요소를 이용할 경우, 경계면의 곡률은 측지선을 이용한 것과 비교할 때 더 큰 곡률의 경계면을 가지고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 막구조물의 형상해석과 측지선을 이용한 재단도 생성에 대해서 다루었다. 형상해석을 위해서 기하학적 비선형성을 고려한 증분방정식을 유도하였다. 또 삼각형 요소로 구성된 곡면의 측지선을 구하는 방법을 제시하였으며, 측지선을 이용한 재단도 생성 프로그램을 개발한 결과 아래와 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 본 연구에서는 비선형 증분방정식을 이용해 막구조물의 초기형상에 대해서 정해에 가까운 근사해를 얻을 수 있었다.

2) 삼각형 요소로 이루어진 하부평면에서 평면내부의 직선은 곡면상의 두 점을 최단거리로 잇는 측지선의 조건을 만족한다. 따라서 측지선을 포함하는 하부평면을 구하여 측지선을 얻을 수 있다.

3) 측지선을 이용하여 구한 재단도 경계면의 곡률은 해석요소를 이용한 재단도 경계면보다 완만한 곡률을 나타낸다.

참고 문헌

1. Ishii K., "On developing of curved surfaces of pneumatic structures", Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures(IASS), Delft, Netherlands, 1972
2. Haug, E., "Numerical design and analysis of lightweight structures", Air-supported structures, The state of the Art, Inst. Struct. Engineers, 1980
3. E. Moncrieff and B. H. V. Topping, "Computer methods for the generation of membrane cutting patterns", Computer & Structures Vol.37, No.4, 1990, pp.441-450
4. Ong C. F., Wakefield D. and Barnes M. R.

- "Interactive graphic CAD for tension structures", Computer and Structures, Vol.41, No.6, 1991, pp.1305-1312
5. L. Grundig, L. Ekert and E. Moncrieff, "Geodesic and semi-geodesic line algorithms for cutting pattern generation of architectural textile structures", Proc. Asia-Pacific Conference on Shell and Spatial Structures, May21-25, China, IASS, 1996, pp.435-443
6. C. Y. Lai, Z. You and S. Pellegrino, "Shape of deployable membrane reflectors", Journal of Aerospace Engineering, July, 1998, pp.73-80
7. Guoxin Yu, Nicholas M. Patrikalakis and Takashi Maekawa, "Optimal development of doubly curved surface", Computer Aided Geometric Design, 17, 2000, pp.545-577
8. J. I. Alvaro and C. Otero, "Designing optimal spatial meshes : Cutting by parallel trihedra procedure", Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures(IASS), Vol.41(133), 2000, pp.101-110
9. M. Ohsaki and K. Uetani, "Shape-stress trade-off design of membrane structures for specified sequence of boundary shapes", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 182, 2000, pp.73-88
10. Jae-Yeol Kim and Jang-Bog Lee, "A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures", Engineering Structures, 24, 2002, pp.745-756
11. 김승덕, 손수덕, 조병욱, 손승철, "비선형 해석 프로그램 NASS-98을 이용한 연성 막구조물의 구조설계에 관한 연구", 대한건축학회학술발표논문집, 제18권 제2호, 1998, pp.27-32
12. 배종효, 한상을 "측지선 알고리즘을 이용한 막구조물의 재단도 생성", 대한건축학회논문집, 구조계, 제16권 12호, 2000.12, pp.33-40