
막구조물의 파손단면에서의 응력집중 현상에 관한 연구

A Study on the Stress Concentration at Crack of Membrane Structures

전진형* 정을석** 김승덕***
Jeon, Jin-Hyung Jeong, Eul-Seok Kim, Seung-Deog

Abstract

Membrane structures, a kind of lightweight soft structural system, are used for spatial structures. The material property of the membrane has strong axial stiffness, but little bending stiffness. Therefore membrane structures are unstable structures initially. These soft structures need to be introduced initial stresses first because of its initial unstable state, and it happens large deformation phenomenon. To find the structural shape after large deformation caused by initial stiffness introduced, we need the shape analysis considering geometric nonlinearity in structural design procedure.

In this study, we investigate into the stress concentration at crack of membrane structures. Therefore, using the nonlinear analysis program that NASS (Nonlinear Analysis for Spatial Structures) perform nonlinear analysis, and stress distribution for crack length investigate for using linear elastic fracture mechanics.

Keywords : Membrane Structures, NASS, Initial Stress, Crack Tip, Stress Concentration

1. 서론

대공간 구조물 중에서도, 연성구조물의 일종인 막구조물의 비약적인 발전은 최근 우리들의 주목을 끌고 있다. 이는 종래의 건축 재료보다 매우 가벼운 재료를 이용하므로 대공간 구조물을 보다 효과적으로 구축할 수 있기 때문이다.

막구조물(Membrane Structures)은 구조적인 측면에서 구조체가 휨강성을 갖고 있지 않거나 이를 무시할 수 있는 부재로 구성되며, 외부하중에 대하여 막응력 상태, 즉 막면내의 인장, 압축 그리고 면내 전단력만으로 평형을 유지하는 구조물이라고 할 수 있다.[4,5]

이러한 연성 막구조물은 막재료의 발달과 함께 현재는 영구적인 건축물로 자리 잡고 있다. 국내에서는 1988년 서울올림픽과 2002년 월드컵을 위한 경

기장의 건설로 인해 그 관심은 한층 증대되었으며 체조경기장의 지붕 붕괴 사고와 월드컵 경기장의 지붕 막 파손사례를 계기로 연성구조물의 붕괴 메커니즘에 관한 연구 또한 활발히 진행되고 있다.^[6]

이에 본 연구에서는 막의 균열 전진(Crack propagation) 상황을 예측하기 위해 균열 선단(Crack Tip)에서의 응력 집중 현상을 해석적 방법으로 조사하여 분석한다. 즉 막의 초기장력 및 균열의 크기에 따른 응력 집중도의 변화를 조사하여 막재의 균열 진행 상황을 추정한다. 이때 연성구조물은 초기강성이 매우 약하므로 강성을 확보하기 위해서는 초기응력의 도입이 필수적이며 초기강성을 도입함으로써 야기되는 대변형 현상을 파악하기 위해서는 기하학적 비선형성을 고려한 비선형해석이 요구된다.^[5] 따라서 비선형 해석 프로그램인 NASS (Nonlinear Analysis for Spatial Structures)를 이용하여 비선형 해석을 수행하고, 선형 탄성 파괴역학(LEFM) 이론을 이용하여 균열 길이에 대한 응력분포를 검토한다.

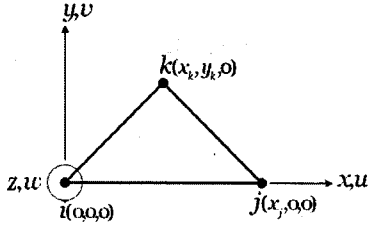
* 정희원 · 세명대학교 건축공학과 석사과정

** 정희원 · 세명대학교 건축공학과 공학석사

*** 정희원 · 세명대학교 건축공학과 부교수

2. 막요소의 비선형 강성방정식

삼각형 평면 막요소의 요소좌표계를 그림 1에서와 같이 정의한다.



<그림 1> 막요소의 요소좌표계

요소내 변위 u, v, w 를 x, y 의 1차 근사식으로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ w(x, y) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y \end{aligned} \quad (1)$$

변위 u, v, w 를 각 절점좌표로 표현하여 정리하면 계수 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 를 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 \cdot d_{xi} + (b_1 d_{xi} + b_2 d_{xj}) \cdot x \\ &\quad + (c_1 d_{xi} + c_2 d_{xj} + c_3 d_{xk}) \cdot y \\ v(x, y) &= \alpha_1 \cdot d_{yi} + (b_1 d_{yi} + b_2 d_{yj}) \cdot x \\ &\quad + (c_1 d_{yi} + c_2 d_{yj} + c_3 d_{yk}) \cdot y \\ w(x, y) &= \alpha_1 \cdot d_{zi} + (b_1 d_{zi} + b_2 d_{zj}) \cdot x \\ &\quad + (c_1 d_{zi} + c_2 d_{zj} + c_3 d_{zk}) \cdot y \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\alpha_1 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{x_j}$, $b_2 = \frac{1}{x_j}$

$$c_1 = \frac{x_k - x_j}{x_j y_k}, \quad c_2 = -\frac{x_k}{x_j y_k}, \quad c_3 = \frac{x_j}{x_j y_k}$$

변형도-변위 관계식을 다음과 같이 비선형항을 포함한 식으로 채택한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

식(2)를 식(3)에 대입하여 변형도를 절점 변위로 표현하면 다음과 같은 매트릭스 식으로 나타낼 수 있다.

$$\{\epsilon\} = [A] \{d\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} d^T B^T B d \\ \frac{1}{2} d^T C^T C d \\ d^T B^T C d \end{array} \right\} \quad (4)$$

증분 구간에서의 응력-변형도 관계식을 다음과 같이 응력에 관한 식으로 채택한다.

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (5)$$

현재의 상태를 초기 상태로 가정하고, 현상태에서의 증분에 관한 가상일을 고려하면, 다음과 같은 가상일의 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f^{(0)} + f &= A_m h_m (A^T \sigma^{(0)}) \\ &\quad + A_m h_m [\sigma_x^{(0)} B^T B + \sigma_y^{(0)} C^T C \\ &\quad + \tau_{xy}^{(0)} (B^T C + C^T B)] d \\ &\quad + A_m h_m [A^T E A] d \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$ 는 초기 응력이고, $f^{(0)}$ 와 평형 상태를 이루고 있다.

고차항의 생략, 수치 해석의 오차 등으로 인하여 불평형력(residual force)이 발생한다. 이러한 불평형력을 r 라고 하면, 식(10)의 오른쪽 제 1항으로부터 다음과 같이 정의한다.

$$r = A_m h_m \cdot A^T \sigma^{(0)} - f^{(0)} \quad (7)$$

윗 식을 이용하여, 증분 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$f - r = [k_E + k_G] d \quad (12)$$

여기서,

$$k_E = A_m h_m [A^T E A] \quad \text{: 요소의 탄성 강성행렬}$$

$$\begin{aligned} k_G &= A_m h_m [\sigma_x^{(0)} B^T B + \sigma_y^{(0)} C^T C \\ &\quad + \tau_{xy}^{(0)} (B^T C + C^T B)] \\ &\quad \text{: 요소의 기하 강성행렬} \end{aligned}$$

3. 선형 탄성 파괴 역학 (Linear Elastic Fracture Mechanics)

균열 선단의 응력은 2차원 응력상태(평면응력 또는 평면변형률)에서 고려되어진다.

체적력을 고려하지 않을 때, 균질, 등방 및 선형 탄성재료로 되어있는 물체에 대하여 Westergaard 응력 함수를 이용하면, 수직응력 및 전단응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

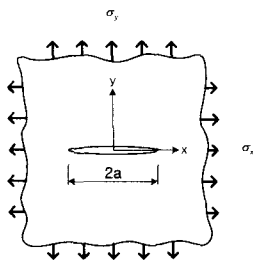
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' \\ \sigma_{yy} &= \text{Re } Z + y \text{Im } Z' \\ \tau_{xy} &= -y \text{Re } Z' \end{aligned} \quad (13)$$

2축 인장응력을 받는 무한평판내의 균열은 그림 1과 같이 나타낼 수 있으며, 균열의 중심부에서 원점이 정의될 때, Westergaard 응력함수는 다음과 같이 정의된다.

$$Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{\sigma z}{\sqrt{(z+a)(z-a)}} \quad (14)$$

여기서, σ 는 초기 응력이고 a 는 균열 폭의 절반이다. $y=0$ 인 균열 평면을 고려할 때 $z=x$ 이며, Z 는 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z = \frac{\sigma x}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}} \quad (15)$$

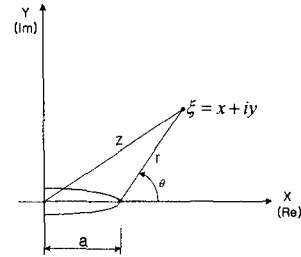


〈그림 2〉 2축 인장응력을 받는 무한평판내의 균열

식(15)에서 $-a < x < a$ 의 경우에 Z 는 순수 허수이고, 반면 $|x| > |a|$ 일 때 Z 는 실수임을 알 수 있다. 그림 2에서 처럼 균열 선단으로부터 임의의 거리 $\xi = z - a$ 를 고려하면, 식(14)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z = \frac{\sigma(\xi+a)}{\sqrt{2a+\xi}\sqrt{\xi}} = \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi}} \quad (16)$$

여기서, $f(\xi) = \frac{\sigma(\xi+a)}{\sqrt{2a+\xi}}$



〈그림 3〉 균열선단에서의 좌표계 정의

$f(\xi)$ 는 해석함수이며, 이때 다음과 같은 다항함수로 고려될 수 있다.

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots \quad (17)$$

여기서, a_n 은 a_0 를 제외하고는 복소수인 계수이다.

균열 선단(즉, $\xi \rightarrow 0, Z \rightarrow \infty$)에서 식(16)과 (17)를 고려하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$Z = \frac{a_0}{\sqrt{\xi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad (18)$$

여기서, K 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$K = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z = \sqrt{2\pi} a_0 \quad (19)$$

또는 식(16)를 식(19)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$K = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} \frac{\sigma(\xi+a)}{\sqrt{2a+\xi}\sqrt{\xi}} = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (20)$$

위 식에서, K 는 초기 응력 σ 와 균열 길이 a 에 의해 결정되며, 이를 응력확대계수(Stress intensity factor)라고 한다.

균열 선단 부재의 응력을 나타내기 위해 그림 2로

부터 다음과 같은 관계를 이용한다.

K를 이용해서,

$$\xi = z - a = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (21)$$

식(21)를 식(18)에 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$Z = \frac{K}{\sqrt{2\pi r} e^{i\frac{\theta}{2}}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

그리고 식(22)을 ξ 에 대해서 미분하면 식(23)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} Z' &= -\frac{K}{2\sqrt{2\pi} \xi^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{K}{2\sqrt{2\pi} r^{\frac{3}{2}}} (\cos \frac{3}{2}\theta - i \sin \frac{3}{2}\theta) \end{aligned} \quad (23)$$

균열 선단 부근에서 상이한 각도에 대한 특이응력은 식(22)과 식(23)을 식(13)에 대입함으로써 구할 수 있다. x축 방향의 수직응력 σ_{xx} 에 대하여,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - (r \sin \theta) \frac{K}{2\sqrt{2\pi} r^{\frac{3}{2}}} \sin \frac{3}{2}\theta \\ &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta \sin \frac{3}{2}\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

여기서, $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ 이므로,

$$\sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) \quad (24)$$

유사한 과정을 이용하면, σ_{yy} 와 τ_{xy} 에 대해서도 다음 식들과 같이 구할 수 있다.

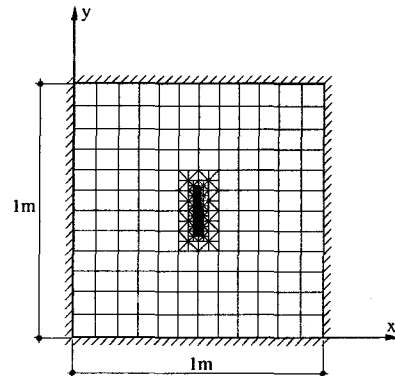
$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta) \quad (25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

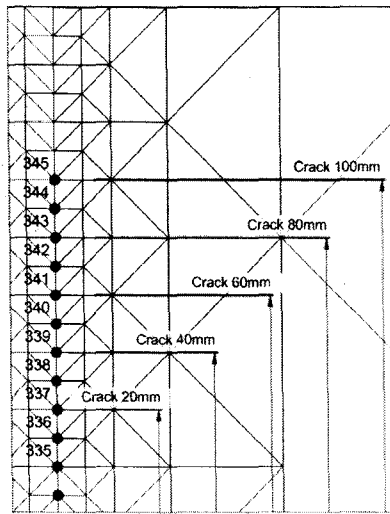
4. 해석모델

4.1 해석모델

균열선단(Crack tip)에서의 응력집중현상을 파악하기 위해 1m×1m 크기의 막구조물을 해석모델로 채택하며, 그림 4와 같다. 초기응력은 100kgf/m, 300kgf/m, 500kgf/m, 700kgf/m를 작용시키고, 각 응력에 초기균열 20mm, 40mm, 60mm, 80mm, 100mm를 주어 비선형 수렴해석한다. 이때 균열 선단에서의 최대 응력을 측정하여 응력집중도를 조사한다. 해석방법으로는 유한요소법과 선형탄성 파괴역학을 이용한 이론해를 이용한다. 균열 선단부의 절점번호를 그림 5에 나타내고, 재료의 물성치를 표 1에 각각 나타낸다. 막재의 물성치는 편의상 Shearfill-II로 하였다



〈그림 4〉 해석모델 요소분할



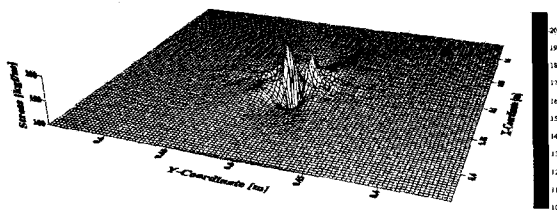
〈그림 5〉 Crack Tip 주변 절점 번호

〈표 1〉 물성치

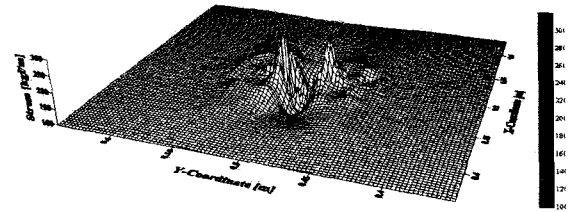
	Et1	Et2	v21	v12	Gt	t
Shearfill-II	1400 kN/m	875 kN/m	0.8854	0.5534	58 kN/m	1

4.2 해석결과

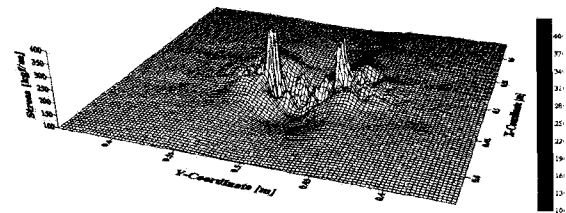
초기응력 $\sigma_0 = 100 \text{ kgf/m}$ 인 경우, 균열 선단에서의 응력분포도는 그림 6~그림 10과 같다. 이때, 초기 균열은 각각 20mm, 40mm, 60mm, 80mm, 100mm로 설정하여 해석을 수행하였다. 초기 균열에 따른 응력 분포값을 비교해 보면, 균열이 커짐에 따라 응력의 집중현상이 나타남을 알 수 있으며, 그림 11과 같다.



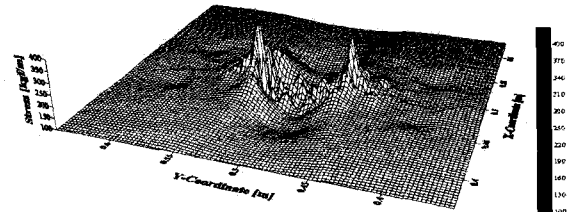
〈그림 6〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 100 \text{ kgf/m}$, $2a = 20 \text{ mm}$)



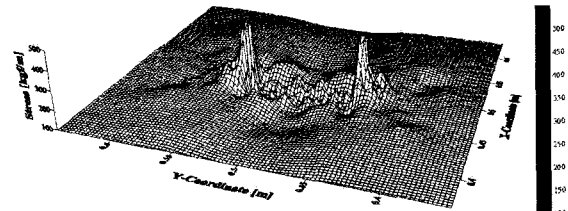
〈그림 7〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 100 \text{ kgf/m}$, $2a = 40 \text{ mm}$)



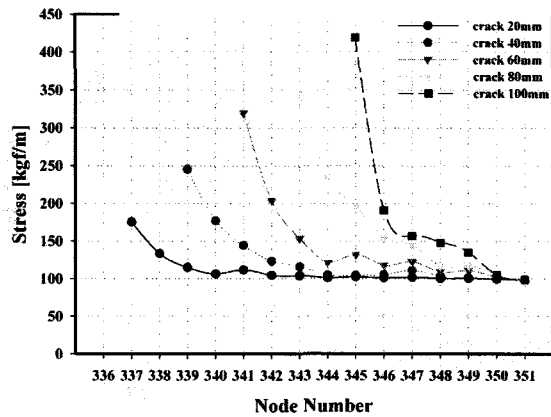
〈그림 8〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 100 \text{ kgf/m}$, $2a = 60 \text{ mm}$)



〈그림 9〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 100 \text{ kgf/m}$, $2a = 80 \text{ mm}$)

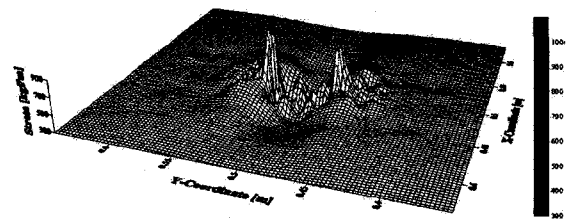


〈그림 10〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 100 \text{ kgf/m}$, $2a = 100 \text{ mm}$)

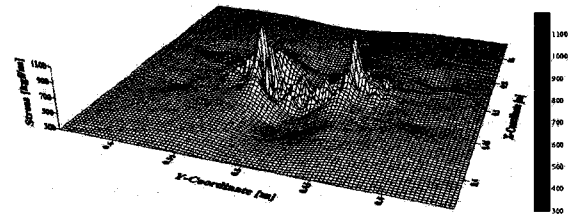


〈그림 11〉 응력의 비교도 ($\sigma_0 = 100kgf/m$)

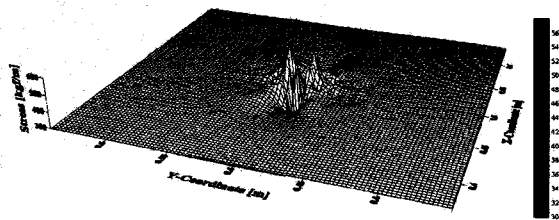
초기응력 $\sigma_0 = 300kgf/m$ 인 경우, 균열 선단에서의 응력분포도는 그림 12~그림 16과 같다. 이때, 초기 균열은 각각 20mm, 40mm, 60mm, 80mm, 100mm로 설정하여 해석을 수행하였다. 초기 균열에 따른 응력 분포값을 비교해 보면, 균열이 커짐에 따라 응력의 집중현상이 나타남을 알 수 있으며, 그림 17과 같다.



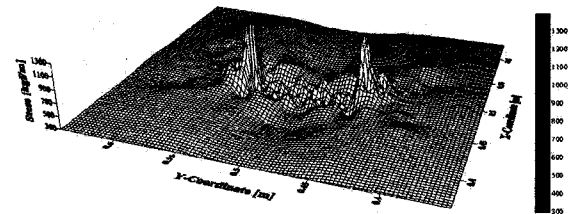
〈그림 14〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 300kgf/m, 2a = 60mm$)



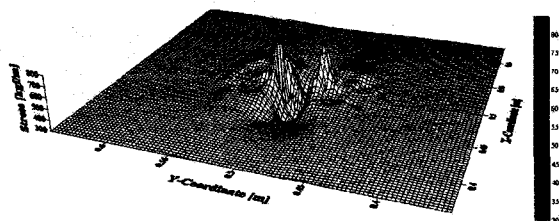
〈그림 15〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 300kgf/m, 2a = 80mm$)



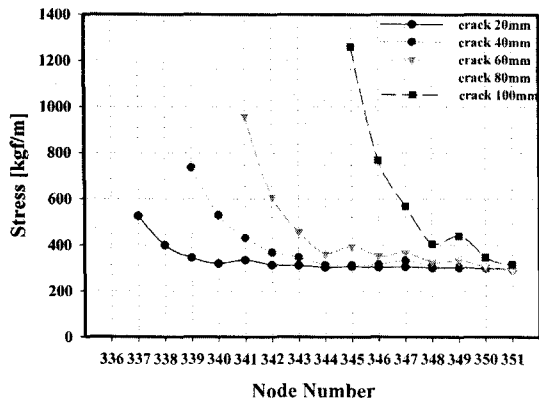
〈그림 12〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 300kgf/m, 2a = 20mm$)



〈그림 16〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 300kgf/m, 2a = 100mm$)

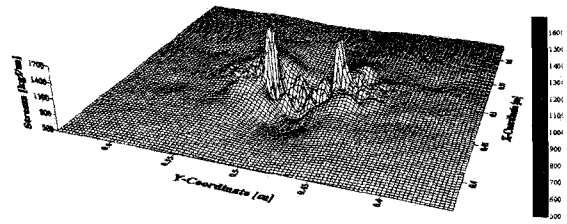


〈그림 13〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 300kgf/m, 2a = 40mm$)

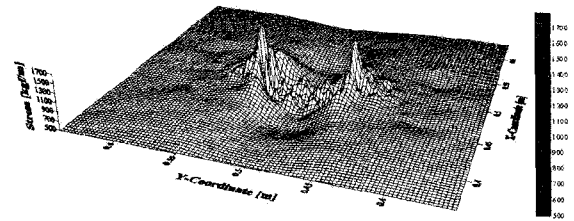


〈그림 17〉 응력의 비교도 ($\sigma_0 = 300\text{kgf/m}$)

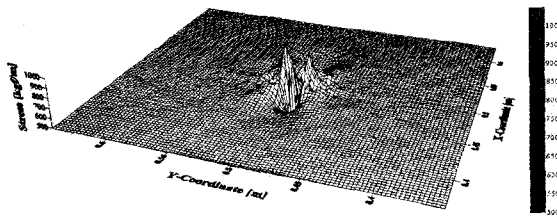
초기응력 $\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$ 인 경우, 균열 선단에서의 응력분포도는 그림 18~그림 22와 같다. 이때, 초기 균열은 각각 20mm, 40mm, 60mm, 80mm, 100mm로 설정하여 해석을 수행하였다. 초기 균열에 따른 응력 분포값을 비교해 보면, 균열이 커짐에 따라 응력의 집중현상이 나타남을 알 수 있으며, 그림 23과 같다.



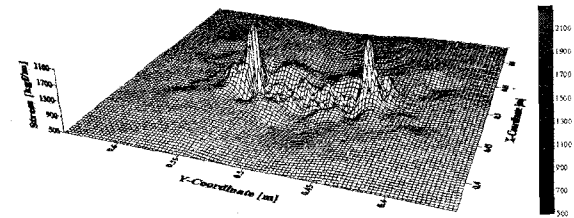
〈그림 20〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$, $2a = 60\text{mm}$)



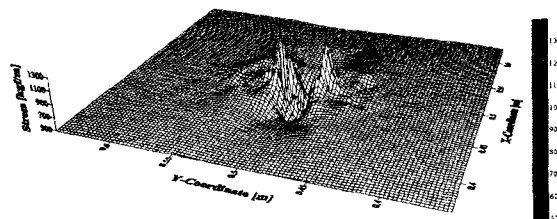
〈그림 21〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$, $2a = 80\text{mm}$)



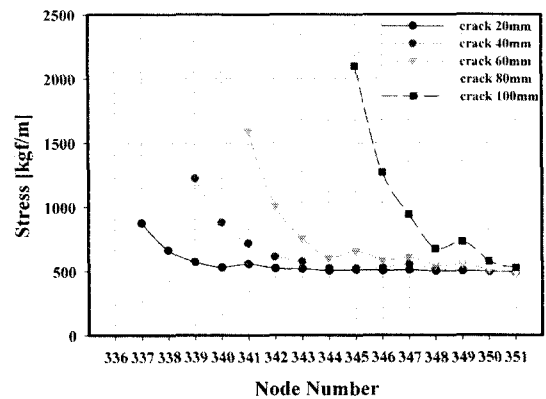
〈그림 18〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$, $2a = 20\text{mm}$)



〈그림 22〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$, $2a = 100\text{mm}$)

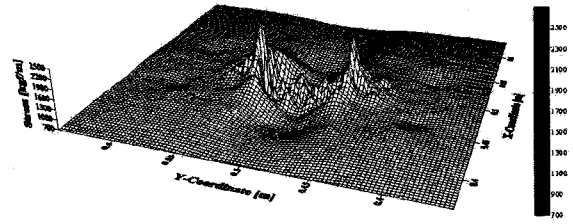


〈그림 19〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$, $2a = 40\text{mm}$)

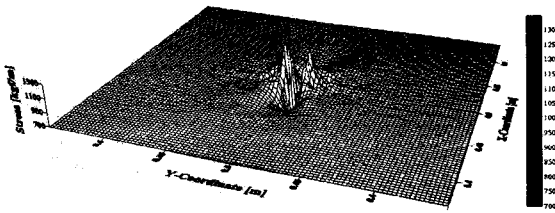


〈그림 23〉 응력의 비교도 ($\sigma_0 = 500\text{kgf/m}$)

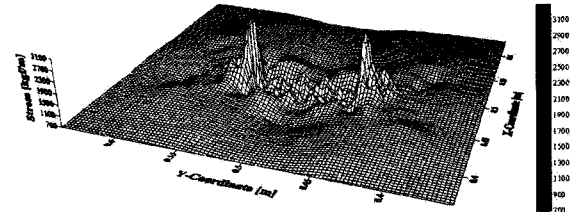
초기응력 $\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$ 인 경우, 균열 선단에서의 응력분포도는 그림 24~그림 28과 같다. 이때, 초기 균열은 각각 20mm, 40mm, 60mm, 80mm, 100mm로 설정하여 해석을 수행하였다. 초기 균열에 따른 응력 분포값을 비교해 보면, 균열이 커짐에 따라 응력의 집중현상이 나타남을 알 수 있으며, 그림 29와 같다.



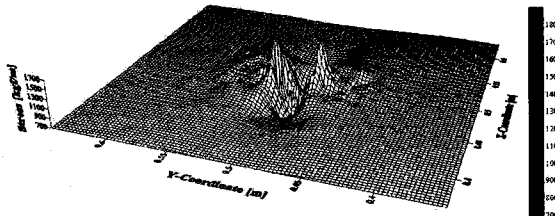
〈그림 27〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$, $2a = 80 \text{ mm}$)



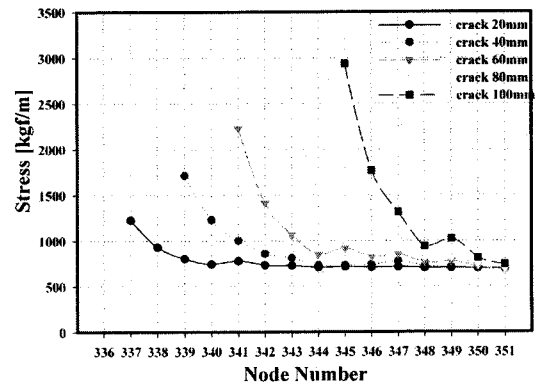
〈그림 24〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$, $2a = 20 \text{ mm}$)



〈그림 28〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$, $2a = 100 \text{ mm}$)

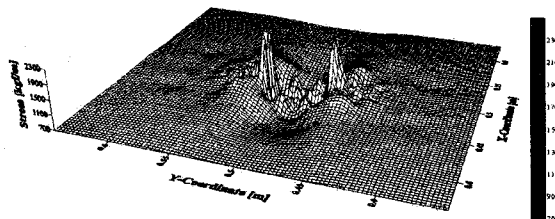


〈그림 25〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$, $2a = 40 \text{ mm}$)

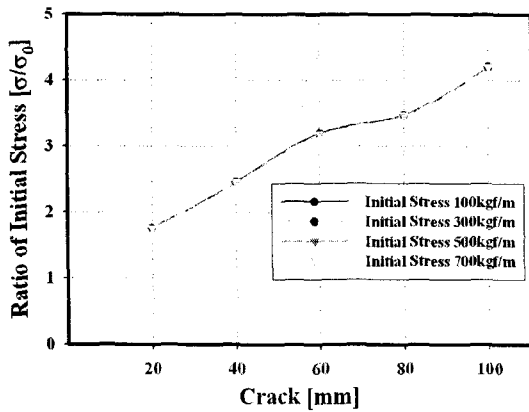


〈그림 29〉 응력의 비교도 ($\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$)

Crack tip에서의 최대응력을 초기장력으로 무차원화하여 나타내면 그림 30에서와 같이 된다. Crack의 길이가 길어짐에 따라, 응력값 또한 비례적으로 증가함을 보이고 있다.



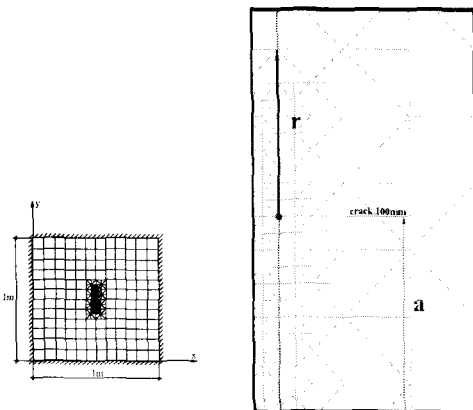
〈그림 26〉 응력 분포도
($\sigma_0 = 700 \text{ kgf/m}$, $2a = 60 \text{ mm}$)



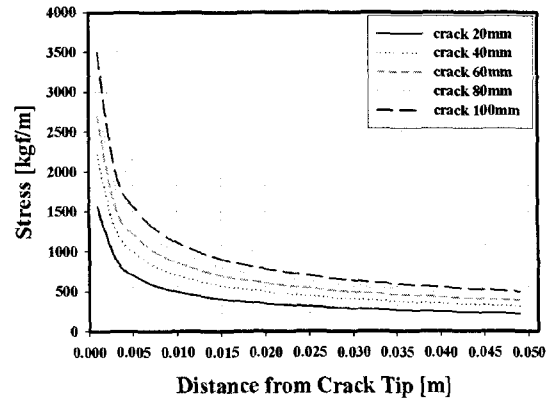
〈그림 30〉 무차원화된 최대응력의 비교

선형 탄성 파괴역학(LEFM) 이론으로부터 유도된 응력 성분을 이용하여 다양한 균열 길이에 대해 균열 선단 부근의 x 축의 수직응력(σ_{xx})의 분포를 나타낸다. 여기서 사용된 변수 r 및 a 값을 그림 31에 나타낸다. 또 균열선단부근의 singular point를 제외하기 위한 r 값은 0.01로 선정하였다.

응력분포를 유한요소해석(FEA)의 해와 비교해 보면, 균열 선단에 발생되는 상당히 큰 국부응력의 값과 균열 선단으로부터의 거리에 따른 응력의 감소율이 적절히 일치하고 있음을 알 수 있으며, 그림 32와 같다.



〈그림 31〉 해석 변수 (a, r)
(LEFM, $\sigma_0 = 700\text{kgf/m}$)



〈그림 32〉 균열폭에 따른 수직응력 σ_{xx} 의 분포 (LEFM, $\sigma_0 = 700\text{kgf/m}$)

5. 결론

본 연구에서는 막의 균열 진전 상황을 예측하기 위해 막의 초기응력 및 균열의 크기에 따른 균열선단에서의 응력집중현상을 해석적 방법으로 조사 분석 하였으며, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

1. 유한요소 해석결과와 선형 탄성 파괴역학으로부터 유도된 결과 값을 비교해보면, 균열선단에서 큰 국부응력이 발생되며, 이후 선단에서 멀어짐에 따른 응력 감소율은 이론해와 잘 일치하고 있다.
2. Crack이 발생되면 균열 길이에 따른 응력집중 현상이 다르게 나타난다. 즉 균열 선단(Crack Tip)의 응력집중도는 초기응력 값의 배수로 나타나며, 균열의 크기가 커짐에 따라 그 비율은 비례적으로 증가함을 알 수 있다.

따라서, 최대응력점에서 일단 막의 균열이 발생하면 균열 선단(Crack Tip)에는 응력이 집중되고, 태풍과 같이 장시간에 걸쳐 큰 하중을 반복하여 계속 받게 되면 균열 선단부에서는 균열 진전(Crack Propagation) 현상이 일어나게 되며 이로 인해 전체 막 구조물에 영향을 미칠 수 있다.

참고 문헌

1. Max Irvine, Cable Structures, Dover, 1981
2. H. A. Buchholdt, An Introduction to Cable Roof Structures, Cambridge University Press, 1985
3. Peter Broughton & Paul Ndumbaro, The analysis of Cabel & Catenary Structures, Thomas Telford, 1994
4. 김승덕, 서일교, 최옥훈, 서삼열, 한상을, 대공간 구조물의 해석 및 설계, 교재 15-2, 한국전산구조공학회, 1997
5. 김승덕, "대공간 구조물의 비선형 해석기법," 한국전산구조공학회 특집기사, 1997.3, pp.7-18
6. 김승덕, 정을석, 전진형, "비선형 해석프로그램 NASS를 이용한 제주월드컵경기장 지붕 막구조물의 안전성 검토에 관한 연구," 대한건축학회 학술발표논문집, 제24권 2호, 2004.10., pp.257-260
7. 김승덕, 손수덕, 조병욱, 손승철, "비선형 해석 프로그램 NASS-98을 이용한 연성 막구조물의 구조설계에 관한 연구," 대한건축학회 학술발표 논문집, 제18권 2호, 1998.10., pp.27-32