ℓ^1/ℓ^2 norm IRLS 방법을 사용한 강인한 탄성파자료역산

지 준[1)]

[1)]한성대학교 정보시스템공학과, jun@hansung.ac.kr

Robust inversion of seismic data using ℓ^1/ℓ^2 norm IRLS method

Jun Ji[1)]

[1)]Dept. of Information System Eng., Hansung University

요약 : 탄성파 역산에 있어서 최소자승(ℓ^2-norm)해는 큰 오차에 매우 민감하게 반응하는 경향이 있다. 이에 반해서 ℓ^p-norm ($1 \leq p < 2$)을 최소화하는 해는 잡음에 강인한 해를 보이나 보통은 좀 더 많은 계산이 요구된다. 반복적가중의 최소자승법(Iteratively reweighted least squares [IRLS] method)은 이러한 ℓ^p-norm 문제의 근사해를 효율적으로 구할 수 있도록 해준다. 본 논문에서는 작은 크기의 잔여분은 ℓ^2-norm으로 큰 크기의 잔여분은 ℓ^2-norm으로 적용되는 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 최소화를 IRLS 방법에 쉽게 적용하는 기법을 소개한다. 모의 자료와 실제 현장자료에의 적용결과 큰 잡음이 포함된 경우 최소자승해보다 하이브리드 방법의 경우에 개선된 결과를 보임을 확인할 수 있었다.
주요어 : IRLS, Hybrid norm, ℓ^1/ℓ^2-norm

Abstract : Least squares (ℓ^2-norm) solutions of seismic inversion tend to be very sensitive to data points with large errors. The ℓ^p-norm minimization for $1 \leq p < 2$ gives more robust solutions, but usually with higher computational cost. Iteratively reweighted least squares (IRLS) gives efficient approximate solutions of these ℓ^p-norm problems. I propose a simple way to implement the IRLS method for a hybrid ℓ^1/ℓ^2 minimization problem that behaves as ℓ^2 fit for small residual and ℓ^1 fit for large residuals. Synthetic and a field-data examples demonstrates the improvement of the hybrid method over least squares when there are outliers in the data.
Keywords : IRLS, Hybrid norm, ℓ^1/ℓ^2-norm

1. 서론

대부분의 탄성파 자료 역산문제는 실제로 측정된 자료와 모델로부터 구해지는 이론적인 자료사이의 차이인 잔여분(residual)을 최소화시키는 모델을 구할 목적으로 최적화문제로 구성된다. 이러한 최적화 문제는 대부분 최소자승문제로 구성되며 이때 최소화되어야 할 대상은 잔여분의 ℓ^2 norm에 해당된다. 이러한 최소자승해는 큰 오차를 갖는 자료, 즉 이상치(outlier)에 매우 민감하게 반응을 하는 경향이 있다. 이상치에 덜 민감한 해는 잔여분의 ℓ^p norm ($1 \leq p < 2$)을 최소화함으로써 구할 수 있는데, 이때 p 가 1에 근접할수록 이상치에 덜

민감하게 반응하게 된다. 이러한 ℓ^p norm의 해를 구하는 데는 반복적가중의 최소자승법 (Iteratively reweighted least squares [IRLS] method) ()이 효율적으로 사용될 수 있다. IRLS방법의 구현에 있어서 작은 잔여분을 배제하는 가중치를 사용하기 때문에 결국에는 ℓ^2 norm의 해에 근사한 값을 구하게 되고, 결과적으로 큰 잔여분 뿐만 아니라 작은 잔여분에 대해서도 덜 민감하게 작용하는 경향을 보이게 된다.

이러한 ℓ^1 norm의 적용에 있어서 문제점을 해결하기 위해서 큰 잡음은 ℓ^1 norm으로 처리하고 작은 잡음은 ℓ^2 norm으로 처리하는 복합적인 방법이 시되 되고 있으며 이들을 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 norm 밥법이라 한다. 예를 들어 Bube 와 Langan (1997)은 토모그래피에 있어서 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 norm을 최소화하기 위해 IRLS방법을 적용하였으며 최근에 들어서 Guitton and Symes (2003)는 quasi-Newton방법으로 Huber norm을 최소화시키는 기법을 소개하기도 했다.

본 논문에서는 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 norm의 최소화를 IRLS방법으로 적용할 경우 쉽게 구현할 수 있는 기법을 소개하고자한다.

2. 최소자승역산(Least Squares Inversion)

역산문제를 풀기 위해서는 우선 모델벡터(m)를 자료벡터(d)로 변환하는 선형연산자H 와 그것의 어드조인트(adjoint) 연산자인 H^T를 구성해야한다.

$$d = Hm$$

이와 같이 주어지는 연산자의 관계에서 일반적인 최소자승역산은 다음과 같이 실제 자료와 모델링된 자료의 차이인 잔여분(residual)의 ℓ^2 norm 크기를 최소화 시킬 수 있는 모델을 찾는 방법으로

$$\bar{m} = min_m \| d - Hm \|_2$$

실제적인 계산은 다음과 같은 정규방적식(normal equation)을 풀어서 수행된다.

$$\bar{m} = \frac{H^T d}{H^T H}$$

이러한 정규방정식을 행렬역산법으로 직접 풀기도 하지만, 연산자 H의 크기가 큰 대부분의 경우에는 conjugate grandient(CG) 방법과 같은 반복적 방법으로 풀게 된다.

2. 반복적가중의 최소자승역산(Iteratively Reweighted Least Squares [IRLS] Inversion)

최소자승역산의 한계는 역산을 위해서 최소화시키는 값이 잔여분(residual)의 ℓ^2 norm이기 때문에 생기는 현상으로, 이러한 문제점은 잔여분의 ℓ^1 norm 을 최소화시킴으로써 개선될 수 있다 (Claerbout and Muir, 1972). 이러한 ℓ^1 norm의 잡음에 강한(robust) 성질에도 불구하고, ℓ^1 norm을 최소화시키는 역산법이 널리 사용되고 있지 못했던 주된 이유는 최소자승역산에 CG 방법과 같이 적용이 쉬운 역산법이 부재했던 것이 주 원인이었다. 하지만 최근에 들어서는 반복적가중의 최소자승(Iteratively Reweighted Least-squares: IRLS)역산법 (Scale and Gersztenkorn, 1987; Scales et al. 1988)을 선형역산에 적용하여 임의의 ℓ^p norm을 최소화 시키는 방법이 개발되어 이러한 방법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

최소자승역산법에 있어서 잔여분에 적절한 가중치를 주어서 해를 구하게 되면, 그 결과 얻어지는 해는 잔여분의 ℓ^2 norm 이 아닌 또 다른 norm의 해에 해당하게 된다. 즉 다음과 같이 최소화시키고자하는 잔여분에 가중치 행렬 W_r 을 곱한 후에 최소자승역산을 적용하게 되면

$$\bar{m} = min_m | W_r(d - Hm) |_2$$

결과적으로 얻어지는 해는 변형된 식인 $W_r d = W_r Hm$ 에 대한 최소자승의 해로써 정규방정식에 의한 해는

$$\bar{m} = \frac{H^T W_r^T W_r d}{H^T W_r^T W_r H}$$

로 주어지며, 만약에 가중치로 사용된 행렬 W_r 이 다음과 같이 일반적인 최소자승역산 결과의 잔여분(r)에 해당하는 값들로 구성된 대각행렬(diagonal matrix)이라 하면,

$$diag(W_r) = |r|^{(p-2)/2}$$

가중된 최소자승역산은 결과적으로 다음과 같이

$$r^T W_r^T W_r r = r^T |r|^{(p-2)} r = |r|^p = |r|_p$$

잔여분의 ℓ^p norm을 최소화시키는 해를 구한 것이 된다. 이때, 최종 잔여분을 처음부터는 알 수 없는, 반복적 역산법인 CG 방법으로 역산을 풀 경우에는, 각 반복 단계마다 이전 반복단계에서 얻어진 잔여분을 사용하여 가중치를 주게 되며, 반복과정이 진행됨에 따라 해에 수렴하는 과정에서 가중치 또한 적절한 최종 잔여분의 값으로 수렴하게 된다.

한편 반복적 역산법인 CG 방법을 사용하여 IRLS 방법을 구현하는데 있어서 두 단계의 반복이 중첩되게 된다. 하나는 주어진 가중치에 대한 최소자승해를 구하는 CG방법 적용을 위한 내부 반복이고, 또 다른 하나는 가중치 변화를 반영하는 외부 반복이다. 이러한 알고리즘을 Claerbout(1992)에 의해서 제안된 Conjugate Gradient 알고리즘을 사용하여 표현하면 다음과 같이 pseudo code 로 요약될 수 있다.

```
        r = Hm − d                          # residual for an initial model
iterate {
        diag(W_r) = f(r)                    # compute residual weighting
        r = W_r(Hm − d)                     # compute residual
        iterate {
                Δm = H^T W_r^T r            # compute gradient
                Δr = W_r H Δm               # compute conjugate gradient
                (m, r) = cgstep(m, r, Δm, Δr)   # update model and residual
                }
        }
```

여기에서 서브루틴인 cgstep()는 이전 반복시의 conjugate 영역에서 gradient 벡터 $\Delta s = H(m_i - m_{i-1})$를 기억하고 있으며, Δr(conjugate gradient)과 Δs(이전반복의 감소 벡터)로부터 감소(descent)벡터를 구하게 된다. 또한 중첩된 반복의 경우 내부/외부 반복 회수의 결정에는 적절한 이론적 배경이 존재하고 있지 않으며, 대부분은 실험적/경험적인 방

법이 사용되게 된다. 본 연구에서는 IRLS 방법의 구현에 있어서, 내부 반복의 경우 CG방법의 장점인 평면탐색을 이용할 수 있는 최소한의 회수인 2회만 수행하는 방법을 사용하였다.

3. 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 norm을 위한 가중치

IRLS 방법에서 ℓ^pnorm의 적용은 사용되는 가중치에의 해서 결정되며, 잔여분의 ℓ^1norm이 최소화가 되도록 하는 해를 구하기 위해서 $diag(W_r) = |r|^{-1/2}$ 을 사용하게 된다. 이 경우 잔여분에 지수승 부분이 음수 (−1/2) 이므로 실제 구현 시에는 적절히 작은 양수 값으로 임계 값(ϵ)을 주어 잔여분의 절대 값이 그 값보다 작은 경우에는 임계 값이 대신 할당되도록 다음과 같이 가중치를 주게 된다.

$$diag(W_r) = \begin{cases} |r|^{-1/2} & when|r| \geq \epsilon \\ \epsilon & when|r| < \epsilon \end{cases}$$

이러한 임계 값을 결정하는 데는 자료가 갖고 있는 가장 큰 값의 일정배수, 예를 들면 0.01 x 최대값, 또는 자료의 일정 percentile에 해당되는 값이 사용되곤 한다. 후자의 경우에는 이미 자료의 통계학적 분포가 임계 값 결정에 반영되어 있어 보다 안정적인 임계값 결정 방법이라 할 수 있다. 본 연구에서는 이러한 임계 값으로 자료에 5 percentile 에 해당하는 값을, 즉 자료를 크기대로 정렬한 후에 자료의 최소값으로부터 자료의 5%가 포함되는 위치에 존재하는 값, 임계 값으로 사용되었다.

결과적으로 임계 값의 존재는 정확한 ℓ^1norm대신에 다음과 같이 주어지는 잔여분의 크기는 최소화 시키는 해를 구한 결과를 갖게 된다.

$$M_e(r) = \begin{cases} |r| & when|r| \geq \epsilon \\ \epsilon|r|^2 & when|r| < \epsilon \end{cases}$$

이를 극복하기위해서 Guitton and Symes (2003)는 다음과 같이 주어지는 Huber norm을 quasi−Newton 방법으로 최소화시키는 기법을 소개하였다.

$$M_e(r) = \begin{cases} |r| - \frac{\epsilon}{2} & when|r| \geq \epsilon \\ \frac{r^2}{2\epsilon} & when|r| < \epsilon \end{cases}$$

Bube 와 Langan (1997)은 토모그래피에 있어서 다음과 같이 주어지는 잔여분의 크기를 최소화시키는 하이브리드 $\ell^{1/}\ell^2$norm을 IRLS방법을 적용하였으며

$$M_e(r) = \sqrt{1 + (r/\epsilon)^2} - 1$$

이러한 잔여분의 크기는 양의 상수인 ϵ의 크기에 대한 상대적인 r의 크기에 따라서 다음과 같이

$$M_e(r) = \begin{cases} \frac{|r|}{\epsilon} & when|r| \geq \epsilon \\ \frac{1}{2}(\frac{r}{\epsilon})^2 & when|r| < \epsilon \end{cases}$$

$\ell^{1/}\ell^2$ norm 으로 작용하게된다.

본 연구에서는 최소화시키는 잔여분의 크기를 다음과 같이

$$M_e(r) = \begin{cases} |r| & when|r| \geq \epsilon \\ r^2 & when|r| < \epsilon \end{cases}$$

직접적으로 주어진 임계값 ϵ을 기준으로 이 보다 작으면 ℓ^2norm 으로 그리고 이 보다 크면 ℓ^1norm으로 잔여분이 적용되도록 하고자 한다. 이를 위해서는 우선 역산의 대상이 되는 자료를 주어진 임계값 ϵ 으로 나누어준 후에, 다음과 같이 주어지는 가중치를 IRLS방법에 적용함으로써 구현될 수 있다.

$$diag(W_r) = \begin{cases} |r|^{-1/2} & when\,|r| \geq \epsilon \\ 1 & when\,|r| < \epsilon \end{cases}$$

즉 잔여분이 임계값 ϵ 보다 크게 되면 적용된 가중치에 의해서 ℓ^1norm의 크기로 적용되게 되며, 임계값 ϵ 보다 작게 되면 가중치가 적용되지 않아 CG방법에서 구하고자하는 ℓ^2norm의 크기로 적용되게 된다. 연산이 종료된 후에는 다시 임계값 ϵ을 곱해주어 자료의 원래의 크기로 다시 회복시키게 된다. 이러한 다양한 norm들을 잔여분의 크기에 대하여 도시해보면 그림 1과 같다.

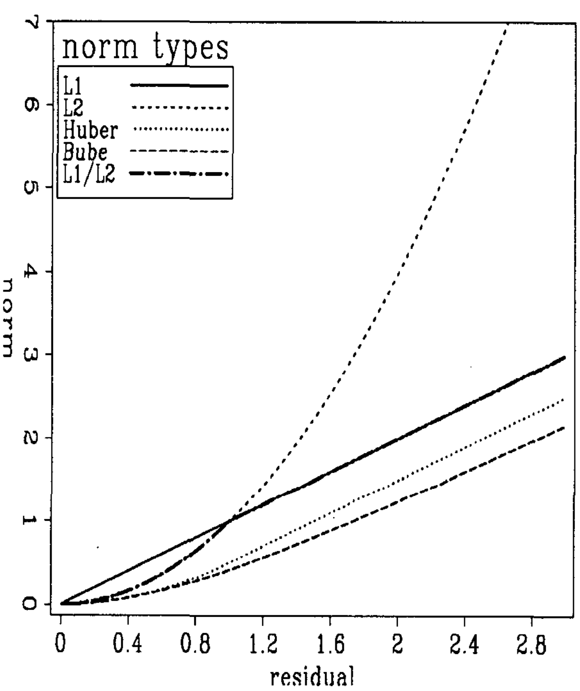

Fig. 1 Various norms' magnitude with respect to residual.

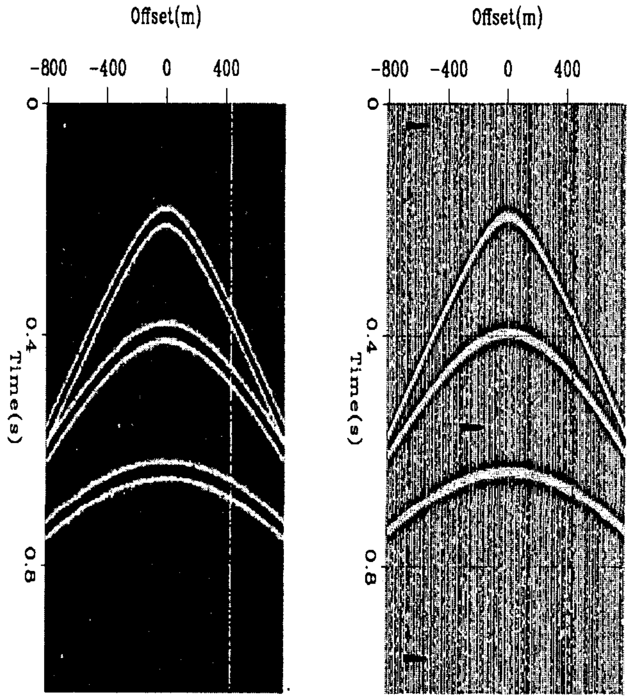

Fig. 2 Synthetic data for testing in raster format (Left) and in wiggle format (Right).

3. 모의자료 적용사례

본 논문에서 소개하고 있는 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2norm을 최소화하는 역산을 속도스택역산에 적용해 보았다. 그림 2에서는 최소자승역산의 실험에 사용된 모의자료를 보여주고 있다. 여기에서 사용된 모델링 자료는 다양한 종류의 잡음들을 묘사하기 위해서 가우시안 잡음(최대 크기가 신호의 최대 크기의 0.2배에 해당하며 분산(σ^2) 값이 0.1인), 잡음만 있는 트레이스(최대 크기가 신호의 최대 크기의 2배에 해당하는), 그리고 스파이크 형태의 잡음(신호의 가장 큰 크기의 10배에 해당하는 크기를 갖는)이 포함된 것을 볼 수 있다.

그림 3에는 최소자승 역산의 결과와 그 결과에 대한 모델링을 통해서 재현된 CMP자료로서, 배경에 산재한 가우시안 잡음은 대체적으로 잘 제거되었으나, 스파이크 형태의 크기가 큰 잡음들은 완전히 배제하지 못하는 최소자승역산법의 한계를 볼 수 있다. 그림 4는 본 논문에서 소개하고 있는 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2norm을 최소화하는 역산을 IRLS 방법으로 적용한 결과

로서 가우시안 잡음뿐만 아니라 이상치(outlier)도 아주 잘 제거하고 있음을 볼 수 있으며, 속도스택의 결과도 매우 선명하게 얻어내고 있음을 알 수 있다.

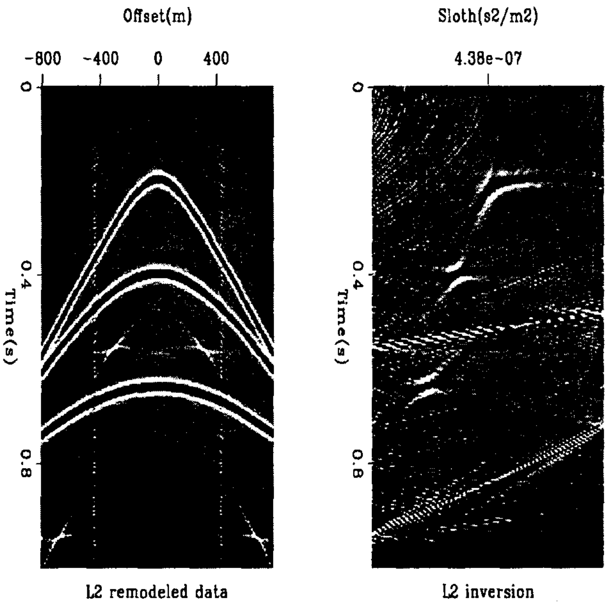

Fig. 3 LS inversion result (Right) and it's remodelled data (Left).

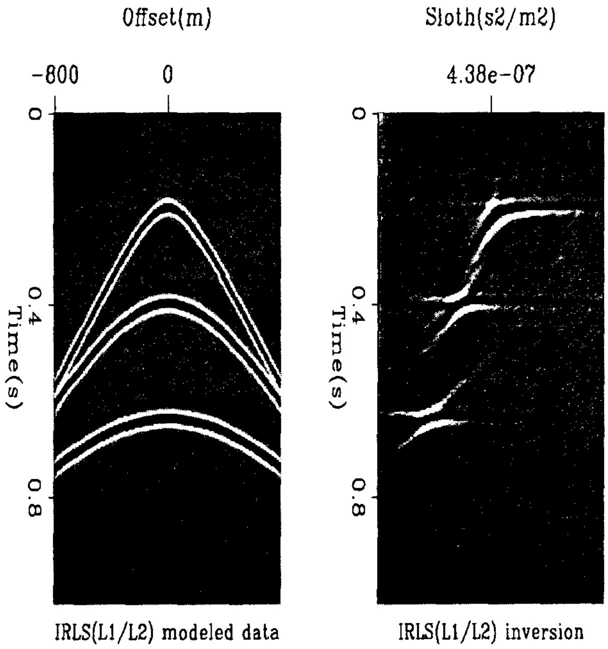

Fig. 4 ℓ^1/ℓ^2 IRLS inversion result (Right) and its remodelled data (Left).

5. 결론

본 논문에서는 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 norm을 최소화하는 역산을 IRLS 방법에 쉽게 적용하는 기법을 소개하였다. 모의 자료와 실제 현장자료에의 적용결과 이상치(outlier)가 포함된 경우 ℓ^2 norm을 최소화시키는 최소자승해보다 하이브리드 ℓ^1/ℓ^2 IRLS 방법의 경우에 개선된 결과를 보임을 확인할 수 있었다.

참고문헌

Bube, K. P., and Langan, R. T., 1997, Hybrid ℓ^1/ℓ^2 minimization with applications to tomography, Geophysics, Vol. 62, No 4, 1183-1195.

Claerbout, J., and Muir, F., 1973, Robust modeling with erratic data: Geophysics, 38, 826-844.

Claerbout, J., 1992, Earth sounding analysis: Processing versus inversion: Blackwell Scientific Publ. Inc.

Guitton, A. and Symes, W. S., 2003, Robust inversion of seismic data using the Huber norm, Geophysics, Vol. 68, No. 4, 1310-1319.

Scales, J. A., and Gersztenkorn, A., 1987, Robust methods in inverse theory, Scales, J. A. Ed., Geophysical imaging, symposium of geophysical society of Tulsa: SEG, 25-50.

Scales, J. A., Gersztenkorn, A., Treitel, S., and Lines, L. R., 1988, Robust optimization methods in geophysical inverse theory: SEG 58th Ann. Internat. Mtg., Session:S7.1.