

철도 가선시스템의 감쇠 특성 파악에 관한 연구

박 성용¹⁾, 전 병욱¹⁾, 이 응신¹⁾, 조 용현²⁾

A study on identification of the damping ratio in a railway catenary system

Sungyong Park, Byunguk Jeon, Eungshin Lee, Yonghyeon Cho

Key words : Catenary-pantograph system(가선판토시스템), Contact wire(전차선), Contact loss(이선), Damping ratio(감쇠계수), Mode decoupling(모드비연성화), CWT(연속웨이블릿변환)

Abstract : A railway catenary system which supplies a train with electric power is an important system in determining the maximum speed of an electric train. However, a pantograph could be separated from a contact wire because of reciprocal action between a pantograph with constant upward force and a catenary system. The contact loss of a pantograph-catenary system is mainly affected by the dynamic characteristics of damping and wave propagation velocity of contact wire. For increasing speed of an electrical train, it is necessary to establish the techniques to identify the modal parameter of a catenary system through experiment. However, it is difficult to decouple each mode and to extract respective damping ratio since a catenary system has an extremely high modal density. For this reason, mode decoupling process to identify modal parameters is a principal technique in analyzing a catenary system. In this paper, the damping extraction method for a catenary system using the continuous wavelet transform is discussed.

Nomenclature

ζ_i : damping ratio of each mode
 $W_\psi x(u, s)$: continuous wavelet transform
 $\widehat{\psi}(w)$ Fourier transform of $\psi(t)$

Abbreviations

CWT : continuous wavelet transform
LSE: least square error method

1. 서론

전기철도에서 전차선 가선시스템은 전기차량에 전력을 공급하는 설비로서 전기철도의 속도를 결정하는 중요한 설비이다. 전기철도 차량의 지붕에 설치된 판토그래프(pantograph)는 일정한 압상력으로 전차선을 밀면서 주행하게 되며 이들의 동적 상호작용에 의하여 전

차선과 판토그래프 사이에는 이선(contact loss)이 발생할 수 있으며, 이로 인해 전력공급 장애, 아크 발생, 전차선 및 습동판의 이상마모와 더불어 전자파가 발생된다. 이러한 이선 현상은 판토그래프 뿐만 아니라 전차선의 감쇠 및 파동전파 특성 등 전차선의 동특성에 의하여 크게 영향을 받게 된다. 따라서 기존 일반철도 구간에 서의 속도 향상에 대비한 이선 대책을 수립하기 위해서는 가선시스템의 동특성을 실측에 의하여 정확히 분석할 수 있는 기술을 개발해야 한다.

특히 가선시스템에서 감쇠는 시스템의 안정성을 결정짓는 중요한 인자이기에 실험적인 방법을 통해 정확하게 분석해야 한다. 하지만 가선시스템의 고유진동수는 수 헤르츠(Hz)로 상당히 낮으며 모달밀집도(modal density) 또한 매우 높은 시스템이기 때문에 기존의 방법으로는 모드 비연성화 과정(mode

1) 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : psy0202@lycos.co.kr
Tel : (02)880-7152 Fax : (02)876-9493

2) 한국철도기술연구원

decoupling process)이 어려워 감쇄를 추출하는데 많은 어려움이 따른다.

본 논문에서는 모드 비연성화 과정을 쉽게 수행할 수 있으며 주파수 분해능을 쉽게 조절할 수 있는 연속웨이블릿변환을 통해 감쇄와 고유진동수를 추출하는 방법을 제시하고자 한다. 웨이블릿을 이용해서 모드 비연성화 과정을 거쳐 시간영역에서의 대수감소율(logarithmic decrement)을 이용하여 가선시스템의 모달감쇄비를 쉽게 추출할 수 있다.

2. 연속웨이블릿 이용 감쇄 측정 기술

2.1 연속웨이블릿의 이론적인 배경

유한 에너지(L2 space)를 가진 신호 $x(t)$ 의 연속웨이블릿변환은 식 (1)과 같다.

$$W_\psi x(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

여기서 $\psi(t)$ 는 모웨이블릿함수(mother wavelet)로서 식 (2)와 같고, 식 (3)과 같은 허용조건과 식(4)와 같은 조건을 만족하는 함수이다.

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (3)$$

$$\hat{\psi}(0) = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4)$$

연속웨이블릿변환은 시간영역의 원신호 $x(t)$ 를 웨이블릿 창함수 $\psi(t)$ 에 스케일 파라미터(scaling parameter: s)와 이동 파라미터(translation parameter: w)를 이용하여 웨이블릿 영역으로의 사상변환을 의미하는 것이다. 스케일 파라미터와 이동 파라미터의 사용으로 인하여 사상변환된 함수의 주파수와 스케일 파라미터 사이에는 일대일 대응 함수로서 Fig. 1에서와 같이 반비례 관계를 가진다. 또한 주파수 분해능과 시간 분해능 역시 반비례 관계를 갖는다. 무엇보다도 연속웨이블릿변환을 통해서 얻을 수 있는 가장 중요한 특성은 한 번의 사상변환으로 신호의 시간정보와 주파수정보를 한 번에 파악할 수 있는 시간-주파수 관계(TFR)를 알아낼 수 있다는 것이다.

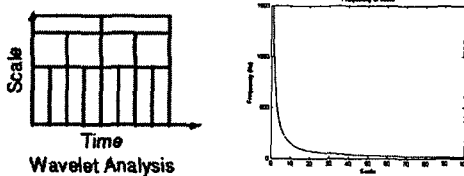


Fig. 1 Relation between frequency and time resolution

Fig. 1에서와 같이 가선시스템처럼 저주파수 대역에서 모드가 밀집되어 있는 시스템에 높은 주파수 분해능을 보이기 때문에 연속웨이블릿변

환을 이용하여 가선시스템 모드 해석을 하는 것은 적절한 방법임을 알 수 있다.

2.2 다자유도 시스템에서 감쇄 추출

2.2.1 Morlet 웨이블릿 함수

식 (1)은 식 (5)와 같이 전개할 수 있다.

$$W_\psi x(u, s) = \sqrt{s} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}(sf) e^{j2\pi fu} df \quad (5)$$

복소웨이블릿변환의 시간 분해능과 주파수 분해능은 모웨이블릿함수의 분해능과 관련이 있다. 이 관계는 Fig. 1과 식 (6)과 같다.

$$\Delta t = s \Delta t_\psi, \Delta f = \Delta f_\psi / s \quad (6)$$

여기서 수정된 복소 Morlet 웨이블릿(modified complex Morlet wavelet, 이하:MCMW)⁹⁾ 함수 (7)를 사용하여 Fourier 변환을 구하면 식 (8)과 같다.

$$\psi(t) = e^{j(w_0 t)} e^{-\frac{t^2}{N}} \quad (7)$$

$$\psi(sw) = \sqrt{N\pi} e^{-\frac{N}{4}(sw - w_0)^2} \quad (8)$$

식 (8)은 $w = w_0/s$ 에서 최대값을 가지는 것을 알 수 있다. 여기서 MCMW를 사용하는 것은 모달밀집도가 높은 시스템에서 주파수 분해능을 아주 좋게 하는 역할을 한다. 하지만 시간 분해능은 낮아지기 때문에 적당한 MCMW의 파라미터 N 과 w_0 를 찾아야 한다.

2.2.2 각 모드별 감쇄계수 추출

연속웨이블릿변환은 선형변환이기 때문에 선형 중첩된 신호에 대해서도 각각의 신호에 웨이블릿변환을 한 후 선형중첩 했을 때와 동일한 결과를 얻는다.

$$\left(W_\psi \sum_{i=1}^n a_i x_i \right) (u, s) = \sum_{i=1}^n a_i (W_\psi x_i) (u, s) \quad (9)$$

여기서 다자유도 시스템에서 운동방정식은 식 (10)과 같으며 이 선형 시스템에서 나타나는 응답은 각각의 모드에 대한 충격응답함수의 선형 중첩으로 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다. 만약 충격응답함수가 해석함수(analytic function)라면 식 (12)와 나타낼 수 있다.

$$m_i \ddot{x}_i(t) + c_i \dot{x}_i(t) + k_i x_i(t) = f_i(t) \quad (10)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\zeta_i w_n t} \sin(w_d t + \phi_i) \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^n A_i(t) e^{\pm j w_d t} = \sum_{i=1}^n A_i(t) e^{j \phi_i(t)} \quad (12)$$

여기서 A_i 는 각 모드의 기여도(residue)이며 ζ_i 는 모달감쇄비이다.

식 (7), (9), (11)을 이용하여 다자유도 시스템의

연속웨이블릿변환을 구하면 식 (13)과 같고 고차항을 무시하고 웨이블릿변환의 크기(modulus)를 구하면 식 (14)와 같다.

$$\left(W_\psi \sum_{i=1}^n x_i(t) \right) (s, u) \quad (13)$$

$$= \sum_{i=1}^n A_i(u) \psi^* (s_i \tilde{\phi}_i(u)) e^{j\phi_i(u)} + O(|A_i|, |\tilde{\phi}_i|)$$

$$\left| \left(W_\psi \sum_{i=1}^n x_i(t) \right) (s, u) \right| \quad (14)$$

$$\cong \sum_{i=1}^n A_i(u) e^{-\zeta_i w_n u} |\psi^*(\pm j s_i w_{di})|$$

식 (14)는 Morlet 웨이블릿의 특성이 시간과 주파수에 영역에 있어서 컴팩트 서포트(compact support)를 가지기 때문에 그 모드를 제외한 다른 모드들은 사라지는 특성을 가진다. 즉, 다음 식 (15)와 같다.

$$|\psi^*(\pm j s_i w_{di})| \cong 0 \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

따라서 최종적으로 각각의 모드 성분으로 분리된 웨이블릿변환은 1자유도 시스템의 웨이블릿변환처럼 되며 식 (16)과 같다. 여기에 자연대수를 취하면 이동 파라미터 u 를 독립변수로 갖는 직선의 방정식 형태가 되며 이 직선이 기울기가 모달감쇄비가 된다.

$$\ln |(W_\psi x_i)(s_i, u)| \cong -\zeta_i w_n i u + \ln (A_i |\psi^*(\pm j s_i w_{di})|) \quad (16)$$

최종적인 다자유도 시스템에서 모달감쇄 추정 순서도는 Fig. 2와 같다.

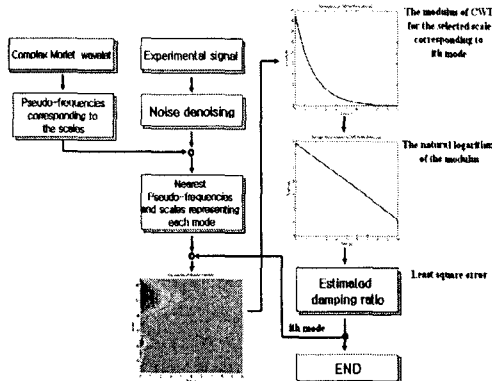


Fig. 2 Procedure of the damping ratio extraction

2.2.3 릿지를 통한 고유진동수 파악

웨이블릿변환의 제곱은 시간-주파수 평면에서 에너지 밀도 분포로 해석될 수 있다. 특히 어떤 신호의 에너지는 주로 웨이블릿변환의 릿지(ridge)²⁾라고 하는 시간-주파수 평면상에 주로 집중되어 있다. 이러한 릿지와 웨이블릿변환의 위

상을 파악함으로써 신호에 포함되어 있는 각각의 고유진동수를 얻어낼 수 있다.

3. 3자유도 감쇄 추출 시뮬레이션

앞 절에서 논의한 다자유도 시스템에서 웨이블릿을 이용한 감쇄 추출 기법을 저주파수 대역에서 모드밀집도가 높은 3자유도 스프링-댐퍼-질량 시스템에 적용시켜 보았다. 시뮬레이션된 3자유도 시스템의 모달파라미터는 Table. 1과 같고, 자유진동의 응답은 Fig. 3과 같다.

Table. 1 Specifications of the 3 DOF model

Mode No.	Natural freq. (Hz)	Damping ratio
1	1.8	0.02
2	2.3	0.035
3	3.2	0.025

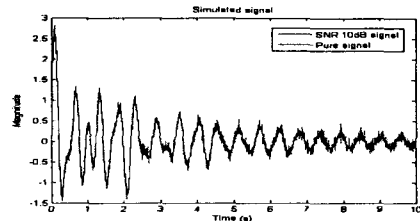


Fig. 3 Free response of the 3 DOF model

노이즈에 의해 오염되지 않은 신호와 오염된 신호를 각각 연속웨이블릿변환을 수행하였다. 웨이블릿변환의 크기는 Fig. 4와 같으며 릿지를 통해 고유진동수를 파악한 후 각각의 고유진동수에 대응되는 스케일 파라미터를 찾아서 시간영역에 대해 웨이블릿 크기를 커브피팅(LSE) 과정을 통해 모드별 감쇄를 추출할 수 있다(Fig. 5).

Table. 2와 같이 노이즈가 있는 신호의 모달감쇄 추출 결과 오차 3% 미만으로 잘 맞는 것을 알 수 있다.

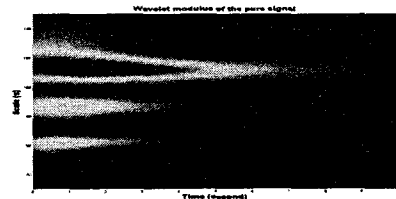


Fig. 4 Wavelet modulus of the pure signal

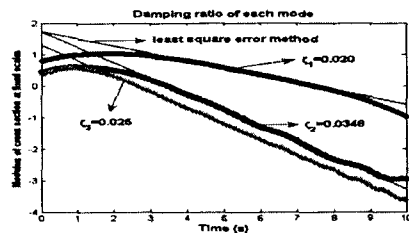


Fig. 5 Damping ratio of each mode

Table. 2 Error estimation of each mode

Mode	Pure	Error(%)	10dB noise	Error(%)
1	0.0200	0	0.0203	-1.47
2	0.0348	0.57	0.0341	2.63
3	0.0251	-0.39	0.0256	-2.34

4. 철도 가선시스템의 감쇄 특성

앞에서 3자유도 모델의 경우에 연속웨이블릿변환을 통해 모달감쇄 추정 방법을 검증하였다. 노이즈가 있는 모델에 대해서 웨이블릿 축소과정(wavelet shrinkage)⁹⁾을 거쳐 노이즈 제거(denoising)를 거친 후 감쇄를 구하였을 때 오차가 3%미만인 것을 알 수 있었다.

가선시스템 또한 앞 절의 3자유도 모델과 같이 저주파대역에서 높은 모달밀집도를 가지기 때문에 웨이블릿을 이용한 감쇄 추출 방법은 적절한 방법이라 하겠다. 또한 실험으로 측정된 신호의 노이즈제거를 위하여 웨이블릿 축소과정을 거치고 이 신호로부터 가선시스템의 감쇄를 추출 할 수 있다.

본 실험은 한국철도기술연구원(KRRI) 내의 가선시스템을 이용하였으며 실험 방법은 가선시스템의 저주파수 대역을 충분히 가진할 수 있도록 관성력이 큰 부가질량과 고무팁을 장착한 임팩트 해머를 사용하였다. 또한 저주파수 대역에서 응답 감도가 좋은 스트레인 게이지 타입의 가속도계를 사용하여 응답을 측정하였다.

시간영역에서의 응답은 Fig. 6과 같으며 웨이블릿 크기는 Fig. 7에 나타나있다. 각 모드별 웨이블릿 크기를 보면 알 수 있듯이 고차의 모드가 빨리 감쇄가 이루어지는 것을 알 수 있다. Fig. 8은 웨이블릿 축소과정을 거쳐 노이즈를 제거한 후 가선시스템의 각 저주파모드에 대한 감쇄비를 나타낸 그림이다. 고차모드로 갈수록 응답이 빨리 감쇄하는 것으로 보아 결과가 타당하다고 사료된다. 물론 커브피팅 과정에서 모서리효과(edge effect)를 고려한 구간 설정에 따라 다소 모달감쇄의 차이가 있을 수 있다.

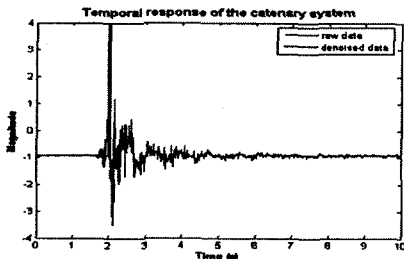


Fig. 6 Temporal response of the contact wire

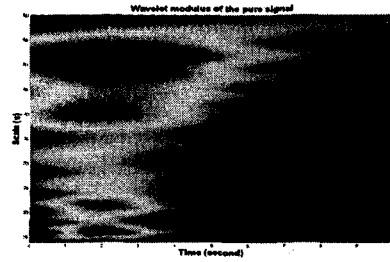


Fig. 7 Wavelet modulus of the denoised signal

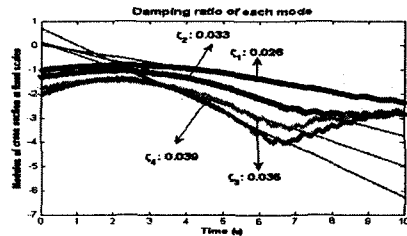


Fig. 8 Damping ratio of each mode for the catenary system

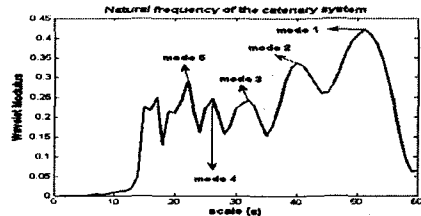


Fig. 9 Natural frequency of the catenary system

Fig. 7과 Fig. 9에서 보듯이 고유진동수가 존재하는 스케일에서 멧지가 존재하는 것을 볼 수 있으며 웨이블릿 평면상에서도 고차모드로 갈 수록 빠른 감쇄가 이루어지는 것을 볼 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 연속웨이블릿변환을 통해 저주파수 대역에서 모드밀집도가 높은 가선시스템에서 모달감쇄를 추출하는 방법을 연구하였다. 간단한 3자유도 모델에서 웨이블릿변환을 통한 감쇄추출이 타당하다는 것을 증명하였고 신호에 노이즈가 포함되었을 때에도 3% 미만의 오차를 가지고 잘 일치 하는 것을 알 수 있었다. 이를 바탕으로 해서 실제 가선시스템의 모달감쇄를 구하는 방법을 연구 하였으며 그 결과 고차모드로 갈 수록 응답의 감쇄가 빨리 일어나는 것으로 보아 그 결과는 상당히 타당성이 있다고 할 수 있다.

후기

이 연구는 건설교통부의 철도기술개발사업의 일환으로 수행되었습니다.

References

- [1] J. Lardies, 2004, "Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 73, 718-733
- [2] W.J. Staszewski, 1997, "Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 203, 283-305
- [3] Stephane Mallat, 1999, "A wavelet tour of signal processing", second edition, 92-107, Academic press
- [4] Donoho, D and Johnstone, 1994, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", *Biometrika*, 81, 425-455