

3차원 경계요소법을 이용한 방사 음압 분포 해석

김홍석, 주현우, 정현교
서울대학교 전기컴퓨터공학부

Analysis of acoustic pressure by 3-dimension Boundary Element Method

Hong-suk Kim, Hyun-woo Joo and Hyun-kyo Jung
Seoul National University

Abstract - 본 논문에서는 3차원 경계요소법을 이용한 헬름홀츠 방정식의 해석을 통해 수중에 있는 디스크형 압전 진동자의 방사 음압 해석을 수행하였다. 이 같은 디스크형 모델의 수치해석적 결과를 기준의 이론적 결과와 비교하여 본 논문의 경계요소법 해석의 타당성을 검증하였다.

1. 서 론

압전 진동자를 이용한 센서는 군사용, 측정용 등으로 널리 활용되고 있다. 특히, 압전 진동자는 초음파를 방사하고, 그 응답을 수신하는데 사용되고 있는 핵심 부분이다.

이러한 압전 진동자의 해석은 설계나 성능 평가 시에 필수적으로 요구되는 것으로, 그 해석 방법에는 유한요소법과 경계요소법 같은 수치해석법, 실험을 통한 방법, 동가회로로 근사화하는 등가회로법 등이 있다.

이중 압전체를 해석하는 데는 주로 수치해석법인 유한요소법이 사용되나, 유한요소법을 통해서는 외부의 영역에 대한 해석이 불가능하다. 압전 진동자 및 센서의 성능을 평가하기 위해서는 방사체의 표면뿐만 아니라, 외부 영역에서의 해석이 요구된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 도입된 경계요소법은 외부의 영역에 대해 해석 가능한 특징을 가진다.

그러므로 우리는 방사체의 표면으로부터 발생하는 음압과 방사체 외부의 음압 분포를 해석하기 위해서, 경계요소법을 사용하고자 한다. 경계요소법은 헬름홀츠 적분영역을 임의의 유체에 포함되어 있는 경우의 방사체 표면에 한정하고, 그 표면을 2차 형태의 경계요소들로 분할한다. 그 후 이산화 된 헬름홀츠 적분 방정식을 각 표면 노드들에 적용하면 표면 압력(Ψ)과 변위량($u_{m,j}$) 사이의 관계식을 구할 수 있다[1]. 이것을 경계요소법 프로그램을 이용하여, 방사체 표면 음압 및 외부의 방사 음압을 구함으로써 방사 음압 분포 해석을 수행하였다.

제안된 경계요소법은 무한한 유체 영역과 유한한 고체 영역 사이를 결합할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 하지만 경계요소법은 특이점이 발생할 수 있다는 단점을 가지지만, 여러 가지 방법을 통해 특이점 문제를 해결할 수 있다.

본 연구의 결과는 실제와 같이 복잡한 형태를 가지는 압전 진동자의 방사 음압 분포를 알 수 있게 하여, 압전 진동자의 체계적인 설계에 활용될 수 있을 것이다.

2. 본 론

2.1 경계 요소 기법(Boundary Element Method)

2.1.1 경계요소법의 개요

경계요소법은 기본적으로 헬름홀츠 적분 방정식을 토대로 한다. 헬름홀츠 적분 방정식을 이산화 과정을 거치면 헬름홀츠 적분 방정식을 표면 요소를 구성하는 각각의 노드들에 적용할 수 있다. 그 결과 각 노드에 대해서 표면 음압과 변위량 사이의 관계식을 구할 수 있는데[1], 변위량은 유한요소법 해석을 통해서 알 수 있으므로 방사체 표면 노드에서의 음압을 구할 수 있다. 다시 표면 음압으로부터 헬름홀츠 적분 방정식을 이용하여, 외부에서의 음압을 구함으로써 전체 유체 영역에 대한 방사 음압 분포를 해석할 수 있고, 이 방법을 경계요소법이라고 한다.

2.1.2 헬름홀츠(Helmholtz) 파동 방정식

정상 상태에서의 유체 운동은 식 (1)와 같은 헬름홀츠 파동 방정식을 근간으로 한다.

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (1)$$

여기서 Ψ 는 표면 음압, $k = \frac{\omega}{c}$ 는 파수(wave number)이고, c 는 유체에서의 음파 속도이다. 방사체 표면 S 에 대해 다음과 같은 헬름홀츠 적분 방정식으로 그 해를 구한다.

$$C(p)\Psi(p) = \int_S \left(\frac{\partial G(p,q)}{\partial n_q} \Psi(q) - G(p,q) \frac{\partial \Psi(q)}{\partial n_q} \right) dS_q \quad (2)$$

여기서 q 는 방사체 표면의 한 점이고, p 는 방사체 표면의 내부 또는 외부의 점이다. $G(p,q)$ 는 3차원 상의 그린 함수이며, $G(p,q) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$, $R = |p - q|$ 과 같다. $C(p)$ 는 유체에서의 입방체의 각도를 의미하며, 일정한 상수값을 가진다. $C(p)$ 는 표면 밖의 p 에 대해서 1, 표면 내의 p 에 대해서 0, 표면의 p 에 대해서

$$C(p) = 1 - \int_S \frac{\cos \beta}{4\pi R^2} dS(q) \text{이다.}$$

2.1.3 헬름홀츠 파동 방정식의 이산화

식 (2)를 이산화하면 다음과 같다. p_i 의 i는 1부터 총 표면노드의 개수까지의 값을 가진다.

$$\begin{aligned} C(p_i)\Psi(p_i) &= \int_S \left(\Psi(q) \frac{\partial G(p_i, q)}{\partial n_q} - G(p_i, q) \frac{\partial \Psi(q)}{\partial n_q} \right) dS_q \\ &= \sum_{m=1}^{\text{elem}} \int_{S_m} \left(\Psi(q) \frac{\partial G(p_i, q)}{\partial n_q} - G(p_i, q) \frac{\partial \Psi(q)}{\partial n_q} \right) dS_q \quad q \in S_m \\ &= \sum_{m=1}^{\text{elem}} \int_{S_m} \left(\sum_{j=1}^3 N_j(q) \Psi_{m,j} \frac{\partial G(p_i, q)}{\partial n_q} \right) dS_q \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\text{elem}} \int_{S_m} \left(G(p_i, q) \sum_{j=1}^3 N_j(q) \frac{\partial \Psi_{m,j}}{\partial n_q} \right) dS_q \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \int_{S_m} \left(N_j(q) \frac{\partial G(p_i, q)}{\partial n_q} \right) \Psi_{m,j} dS_q \\ &\quad + iw\rho \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \left(\int_{S_m} N_j(q) G(p_i, q) n_q dS_q \right) v_n(q) \quad (4) \end{aligned}$$

여기서 elem은 전체 표면 요소의 개수이다.

경계에서 $\frac{\partial \Psi}{\partial n_q} = -iw\rho v_n(q) = w^2 \rho u(q)$ 관계를 식 (3)과 식 (4)에 적용하면, 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \int_{S_m} \left(N_j(q) \frac{\partial G(p_i, q)}{\partial n_q} \right) \Psi_{m,j} dS_q \\ &\quad - w^2 \rho \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \left(\int_{S_m} N_j(q) G(p_i, q) n_q dS_q \right) u_{m,j} \quad (5) \end{aligned}$$

그린함수와 그린함수의 미분을 p점과 q점사이의 거리 R로 표현하면, 아래의 식 (6)과 같다.

$$G_k(p, q) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}, \quad \frac{\partial G(p_i, q)}{\partial n_q} = -\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \cos \beta \quad (6)$$

여기서 β 는 노멀벡터 n과 벡터 R사이의 각으로 정의된다.

식(6)을 식(5)의 그린 함수와 관계된 부분에 대입하면, 다음 식(7)와 같다.

$$\begin{aligned} C(p_i)\Psi(p_i) &= - \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \int_{S_m} N_j(q) \left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \cos \beta \right) dS_q \Psi_{m,j} \\ &\quad - w^2 \rho \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \int_{S_m} \left(N_j(q) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \cos \beta \right) dS_q u_{m,j} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \int_{S_m} - \left[N_j(q) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{-ksin(-kR)}{4\pi R} + \frac{\cos(-kR)}{4\pi R^2} \right) \\ + i \left(\frac{kcos(-kR)}{4\pi R} + \frac{\sin(-kR)}{4\pi R^2} \right) \end{array} \right\} \cos \beta dS_q \right] \Psi_{m,j} \\ &w^2 \rho \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 \int_{S_m} \left[N_j(q) \left\{ \begin{array}{l} \cos(-kR) \\ + i \sin(-kR) \end{array} \right\} \cos \beta dS_q \right] u_{m,j} \quad (8) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 A_{m,j}^i \Psi_{m,j} - w^2 \rho \sum_{m=1}^{\text{elem}} \sum_{j=1}^3 B_{m,j}^i u_{m,j} \quad (9)$$

여기서, $A_{m,j}^i$ 와 $B_{m,j}^i$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_{m,j}^i &= -N_j(q) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{-ksin(-kR)}{4\pi R} + \frac{\cos(-kR)}{4\pi R^2} \right) \\ + i \left(\frac{kcos(-kR)}{4\pi R} + \frac{\sin(-kR)}{4\pi R^2} \right) \end{array} \right\} \cos \beta dS_q \\ B_{m,j}^i &= N_j(q) \left\{ \begin{array}{l} \cos(-kR) \\ + i \frac{\sin(-kR)}{4\pi R} \end{array} \right\} \cos \beta dS_q \end{aligned}$$

결국 헬름홀츠 방정식 (2)를 이산화하면 식 (8)와 같이 정리된다. 여기서 m은 표면 요소의 개수이고, j는 각 요소를 구성하는 표면 노드이며, $v_n(q)$ 은 노멀 속도, ρ 는 유체의 밀도, $u_{m,j}$ 는 방사체 표면 각 노드(m번째 요소의 j번째 노드)의 변위를 의미한다.

식 (8)을 A와 B를 사용하여 식 (9)로 표현하였고, 식 (9)을 이항하고, 전체 노드들에 관해 행렬을 조립함으로써 음압과 변위 관계의 행렬식 (10)으로 표현할 수 있다.

$$([A] - \beta[I])[\Psi] = w^2 \rho [B][u] \quad (10)$$

여기서 $[A] - \beta[I]$ 는 표면노드 개수*표면노드 개수인 행렬이고, $w^2 \rho [B][u]$ 는 표면노드 개수*1인 행렬이다. 압전 진동자가 잡기어있는 유체로서 물을 선택하였고, 물의 특성에 대한 값은 $\rho=1000[Kg/m^3]$, $c=1481.2[m/s]$ 을 사용하였다.

2.1.4 그린 함수의 특성으로 인한 특이점

헬름홀츠 적분방정식의 계산과정에 특이점이 존재한다. 그 특이점은 헬름홀츠 적분 방정식을 구성하는 그린 함수의 특이점으로서, p점이 q점에 매우 근접하게 될 때 R이 0이 되므로 발생한다.

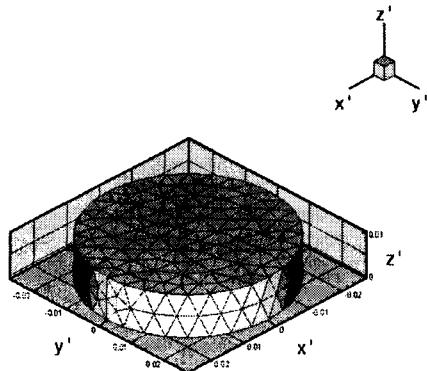
특이점이 해결하기 위해 여러 가지 방법이 있지만, 본 논문에서는 p점과 q점이 매우 근접하는 경우에 q점을 무게 중심점으로 간주하고 계산하는 근사화 방법을 사용하였다.

외부 영역에 대해서는 표면 헬름홀츠 적분 방정식이 더 이상 특이점을 갖지 않는 것이 중요하다. p점이 방사체 외부에 존재함으로써, 표면에 있는 q점과의 거리가 0이 되는 경우가 없기 때문이다.

2.2 디스크형 압전 진동자 모델

1팀 1은 본 연구에서 이용된 압전 진동자 시험 모델의 경계 요소 분할을 나타낸다. 모델의 반지름은 0.025m, 높이는 0.01m이고, 해석 모델의 중심은 해석 모델의 아래면 중심에 위치한다.

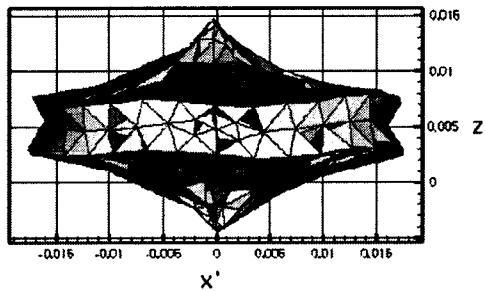
1팀 1에서 알 수 있듯이, 본 연구에서는 삼각형 요소를 이용하였으며, 경계면에서는 총 514개의 삼각형 요소로 분할되었다. 또한 압전체는 z'축 방향으로 분극된 모델을 이용하였다.



<그림 1. 해석에 사용된 디스크형 압전 진동자 모델>

3. 결 과

3.1 변위를 구하기 위한 유한요소법 해석



<그림 2. 유한요소법을 이용한 공진주파수에서의 변위>

그림 2는 유한 요소법을 이용하여 해석한 경계 요소법 시험 모델의 진동 패턴을 나타낸다. 그림 2에서 해석된 변위량(u)은 압전 진동자와 유체면에서의 normal 방향에 대한 음압의 변화를 해석하기 위해 이용되었다. 그림 2의 해석은 60[kHz]의 입력 주파수를 인가하였을 때의 진동량을 나타낸 것으로 이는 유한 요소법을 이용한 주파수 해석을 통해 구현되었다. 그림 2에 나타난 것과 같이 압전 진동자는 압전 진동자의 중심에서 z' 방향으로 가장 큰 변위량을 나타내는 것을 알 수 있으며, 이는 임의의 축정점에서의 음압 패턴이 진동자의 변위량 패턴과 일치할 것임이 예측된다.

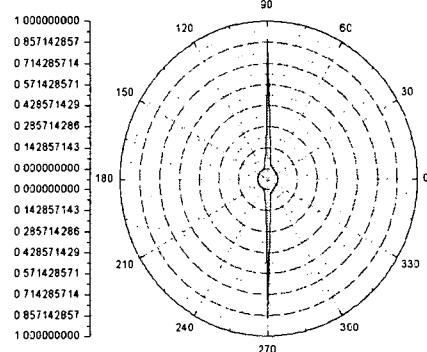
3.2 경계요소법에 의한 방사 음압 해석 결과

그림 3은 경계요소법 프로그램을 통하여 구한 음압을 이용하여 그린 방사 음압 분포 패턴이다. 그래프의 원점에 압전 진동자가 놓여있는 상태이다. 그림 3의 원쪽의 숫자들은 가장 큰 음압을 1로 정규화 한 후의 각 음압의 상대적인 값을 나타낸다. 원주 상의 숫자들은 방사체의 $x'-z'$ 평면상에서 원점으로부터의 x' 축의 방향을 0도로 기준으로 놓고 반시계방향으로 각이 증가한다고 가정했을 때, 축정점이 위치한 각도를 의미한다.

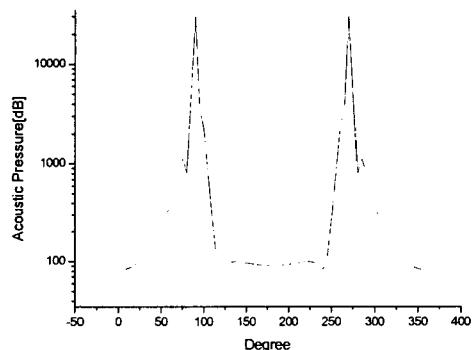
그림 3에서 보듯이 90도와 270도 근처에서의 음압이 매우 큼을 알 수 있다. 0도와 180도 근처에서는 상대적으로 작은 음압을 보인다. 그 이유는 그림 2에서 압전 진동자의 변위가 윗면과 아랫면에서 크고, 옆면에서는 작기 때문이다. 이 결과는 다른 실험 결과[1]과 비슷한

경향성을 보인다.

그림 4에서는 세로축이 방사체 외부 영역에서의 음압의 크기[dB]를 의미하고, 가로축은 x' 축의 방향을 0도로 기준 삼았을 때, 반시계 방향으로 각이 증가한다고 가정한 축정점이 위치한 각도를 의미한다. 90도와 270도 근처에서 큰 음압과 나머지 각도에서 상대적으로 작은 음압은 앞에서 기술했던 것처럼 진동자의 변위 차이로 인한 현상이다.



<그림 3. 음압 분포 해석 결과 1>



<그림 4. 음압 분포 해석 결과 2>

4. 결 론

본 논문에서는 경계요소법 프로그램을 통해 디스크형 압전체의 표면 노드 음압을 구했고, 그 표면 노드의 음압을 이용하여 방사체 외부영역에서의 음압 또한 구하였다. 해석을 위한 프로그램의 타당성은 실험결과를 통해 검증하였다. 경계요소법을 이용하여 외부 음압 분포를 해석하는 방법은 압전 진동자 및 센서 설계에 직접적으로 응용 가능할 것이고, 더 복잡한 형태의 방사체에 대해서도 음압 분포 해석을 가능하게 할 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] 장순석, “결합형 유한요소-경계요소 기법을 사용한 삼차원 압전형 유연성 쏘이나 트랜스듀서의 구조 설계”, 센서학회지, 제8권 제5호, 24-34쪽, 1999년
- [2] Sheng Li, “An efficient technique for multi-frequency acoustic analysis by boundary element method”, Journal of Sound and Vibration, 283호, 971-980쪽, 2005년