Bipartite graph 의 신뢰도 특성 연구

이광원 · 김태훈 · 김종민
호서대학교 안전시스템공학과

1. 서론

1.1 연구의 배경 및 목적

어떤 system의 신뢰도를 관찰하기 위하여는 관찰하는 시스템을 graph[1,2,5-12]나 FT(fault tree)[3], network[4], 신뢰도 block diagram등으로 신뢰도의 특성을 표현한 후에 신뢰도를 계산한다.

지금까지 많은 논문들이 시스템을 graph로 표현하고, 표현된 graph에서 minimal cutset 이나 minimal path를 찾고, 이를 이용하여 신뢰도 계산을 하는 방법에 대하여 많은 연구가 진행되었다. 이중에서 domination 이론을 이용하여 빠른 신뢰도 계산을 하고자하는 노력이 있었으며 이중에서 A. Satyanarayana와 동료들은[5-12]에서 minimal path를 이용한 연구를 하였고, m.cutset을 이용한 방법연구에는 [1-4]가 있다.

하지만 시스템의 신뢰도 계산 시 "왜 정상인가?" 보다는 "왜 고장인가?"가 관심 대상이 되며 이 경우 m.cutset을 이용한 계산이 정성적 안전성평가에 필요하게 된다.

m.path를 기초로 한 경우는 A. Satyanarayana가 [5]에서 밝혔듯이 다음과 같이 아주 쉽게 찾을 수 있다.

$$d(G,\ P(G)) = \begin{cases} (-1)^{b-n+1} & : \text{G가 p-graph 인 경우} \\ 0 & : \text{G가 p-graph 가 아닌 경우} \end{cases} \qquad (1)$$

하지만 m.cutset을 기초로 한 경우에는 아직까지도 식(1) 과 같이 규명하고 있지 못하고 있다. 본 논문에서는 m.cutset을 기초로 할 경우 domination 값을 왜 쉽게 결정할 수 없는지 그 경우를 밝히고 대안을 제시하고자 한다.

1.2 이론적 배경

본 논문에서 사용하고 있는 그래프 이론의 용어들은 참고문헌 [1,2]에서 설명된 것들을 그대로 사용하고자 한다.

Bipartite graph는 다음과 같이 정의된다. 어떤 그래프 G=(V, E)에서 임의의 내부 절점 부분집합 X 와 Y(단 $X \cap Y = \varnothing$) 존재하고, e는 edge E 의 부분집합이며 e에 속하는 모든 edge 들이 내부절점 X에서 출발하여 내부절점 Y에 도착하는 경우 bipartite 구조를 갖는 graph 라 정의 한다(그림1 참조).

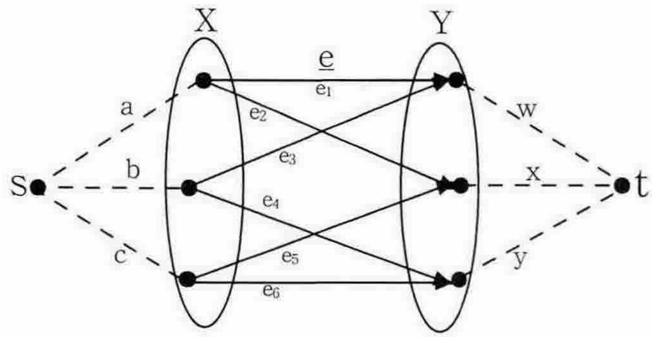

Fig 1. An example of bipartite structure

2. 본 론

본 장에서는 m.cutset을 기초로 한 어떤 그래프 G의 subgraph G-$\underline{e}$ 의 domination값 d(G-$\underline{e}$, C(G))을 결정하는 것은 다음과 같은 경우에는 간단하지 않음을 보여준다. 즉 $\underline{e}$가 bipartite structure를 구성하는 경우에는 m.cutset과 같이 topological 한 특성을 갖지 않는 일반적인 family M(B)를 기초로 했을 때 임의의 집합B의 domination값 d(B, M(B))와 같다. 이는 G-$\underline{e}$의 domination 결정이 np-hard problem이며 polynomial하게 풀 수 없음을 의미하게 된다.

Theorem 1.

Bipartite structure가 존재하는 그래프 G에서 bipartite Structure를 구성하는 모든 edge의 집합 $\underline{e}$가 포함되지 않은 subgraph G-$\underline{e}$ 의 domination값은 d(B, M(B))와 같다.

증명:

우선 $M(B) = \{M_i \mid M_i \subseteq B\}$, 즉 M(B)는 집합 $B=\{b_1, b_2,\cdots,b_e\}$의 subset들로 구성되며 topological character가 존재하지 않는 임의의 family라 하자.

만약 M(B) 중에 최소가 아닌 M_i가 있다면 이들을 제거한 family를 $M^*(B) = \{M(B) - \{M_i\}\}$라 할 때 $d(B, M(B)) = d(B, M^*(B))$가 된다.[1)]

그러므로 지금부터 M(B)가 모두 minimal set들로 구성된 family인 경우를 관찰하자. $\underline{M}_i$를 M(B)의 임의의 부분집합들의 합이라 하고 P(M(B))를 M(B)의 모든 부분집합들의 Family라 하자. 그러면 P(M(B))는 다음과 같이 두 개의 family로 나눌 수 있다. 즉,

$F(B) = \{{}^\forall\underline{M}_i \subseteq M(B) \mid \underline{M}_i$의 합집합이 B의 formation인 경우$\}$

$KF(B) = \{{}^\forall\underline{M}_i \subseteq M(B) \mid \underline{M}_i$의 합집합이 B의 formation이 아닌 경우$\}$

ℓ_o를 F(B)에 속하는 $\underline{M}_i$중에서 $|\underline{M}_i|$의 개수가 홀수인 경우의 개수라 하고 ℓ_e는 $|\underline{M}_i|$의 개수가 짝수인 경우의 $\underline{M}_i$ 개수라 하면 domination의 정의에서

$$d(B, M(B)) = \ell_o - \ell_e \qquad \text{(A)}$$

가 된다.

이런 M(B)로 다음과 같은 bipartite 구조를 갖는 그래프 G를 만들 수 있다.

1) $X = \{x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot x_e\}$, 여기서 x_i 는 B에 속하는 모든 element b_i에 대응된다.

2) $Y = \{y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot y_r\}$, 여기서 y_j 는 M(B)에 속하는 모든 element M_i에 대응된다.

3) X와 Y를 bipartite구조의 절점들이라 생각하고 Mi에 속하는 모든 element들은 X의 해당 절점들에서 출발하여 M_i에 해당하는 절점 y_i에 도착하도록 모든 M_i에 대하여 edge를 $\underline{e}$를 연결시킨다. (예제1 참조)

4) 출발절점 s와 도착절점 t를 그림과 같이 s에서 X에 속하는 모든 절점들로, 또 Y에 속하는 모든 절점에서 절점 t로 연결시킨다.

위의 theorem에 대한 증명은 결국 $d(G-\underline{e},C(G)) = d(B,M(G))$임을 증명하는 것이며 문헌[2]에서 증명한 식에 의하면 C(G)를 기초로 한 $G-\underline{e}$의 domination값은

$$d(G-\underline{e},\ C(G)) = \sum_{\forall x \subseteq X,\, O_x \not\subset I_x} (-1)^{|x+Y|} d(G,C(G)) \qquad \text{(B)}$$

로 쓸 수 있다. 여기에서 I_x는 $\underline{e}$에 속하는 edge들만을 갖는다. 한편 그래프 G는 $|X| + |Y| + 2$개의 절점수를 갖는 acyclic p-graph이므로 $d(G,C(G)) = (-1)^{|X|+|Y|+2}$ 가 된다.

n_o를 I_x의 개수(단 $I_x \not\supseteq D_y$, $y \in Y$, $|\underline{x}|$ = 홀수)라 하고

n_e를 I_x의 개수(단 $I_x \not\supseteq D_y$, $y \in Y$, $|\underline{x}|$ = 짝수)라 하면

식(B)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} d(G-\underline{e},\ C(G)) &= (n_e - n_o) \cdot (-1)^{|Y| \cdot (-1)|X|+|Y|+2} \\ &= (n_e - n_o) \cdot (-1)^{|X|} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

P(M(B))의 임의의 원소인 $\underline{M_i}$를 관찰하자.

1) $\underline{M_i}$가 B의 formation을 이루는 경우

$\underline{M_i}$가 B의 모든 원소를 포함하므로 $\underline{M_i}$에 속하는 모든 절점 y_i는 최소한 X에 속하는 모든 절점으로부터 출발하는 edge를 하나씩 포함하고 있으며 이 경우 그래프 G에서 $I_{\underline{y}}'$는 outcut O_x($x \in X$)를 포함하지 못한다. (단, $\underline{y}' = Y - \underline{y}$)

만약 $\underline{M_i}$가 홀수 formation이면 $|\underline{y}|$ 역시 홀수이고 $\underline{M_i}$가 짝수 formation이면 $|\underline{y}|$ 역시 짝수이며 결국 n_o와 n_e에 해당하는 $\underline{y}'$가 1:1로 존재하므로 $n_e = \ell_e$, $n_o = \ell_o$ 가 된다.

2) $\underline{M_i}$가 B의 formation이 아닌 경우

$\underline{M_i}$는 B의 모든 원소를 포함할 수가 없다. 임의의 $b \in B$가 $\underline{M_i}$에 포함되지 않는다면 그래프 G에서는 $I\underline{y}'$가 절점 b에서 나오는 모든 edge(즉 O_b)를 포함하게 된다. 즉 $\underline{M_i}$가 B의 fomation이 아닌 경우에는 $n_e = 0_e$, $n_o = 0$ 이 된다.

즉, 1)과 2)에서 M(B)를 기초로 한 B의 짝수나 홀수 formation 개수 (ℓ_e 나 ℓ_o)는 그래프 G에서 outcut을 포함하지 않는 $I_{\underline{x}}$의 $|\underline{y}|$의 개수(n_e 나 n_o)와 1:1로 대응하게 되며 결국 $\ell_o = n_o$, $\ell_e = n_e$ 가 성립한다.

결국 식(A)와 (C)를 사용하여 식(B)를 고쳐쓰면

$d(G-\underline{e},\ C(G)) = (n_e-n_o)(-1)^{|X|}=(\ell_e-\ell_o)(-1)^{|X|}=d(B,M(B))(-1)^{|X|}$

가 성립하고 결국

$n_e-n_o = d(B,M(B))$

가 되며 theorem은 증명된다■

예제 1)

$B = \{b_1,\ b_2,\ b_3\} = \{1,\ 2,\ 3\}$이고, 이를 기초로 한 임의의 family $M(B) = \{M_1,\ M_2,\ M_3\} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$으로 주어진 경우 이에 대응하는 그래프 G를 그리면

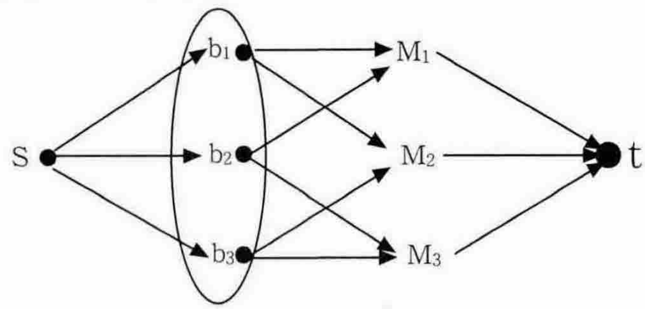

Fig. 2 : An Example of a bipartite Graph

M(B)의 모든 부분집합 family P(M(B))는

$P(M(B)) = \{\varnothing,\ \{M_1\},\ \{M_2\},\ \{M_3\},\ \{M_1,\ M_2\},\ \{M_1,\ M_3\},\ \{M_2,\ M_3\},\ \{M_1,\ M_2,\ M_3\}\}$

$= \{\varnothing,\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3\}\}$

B의 모든 원소를 포함하는 M(B)의 부분집합의 family F(B)는 다음과 같이

$$F(B) = \{\{M_1,\ M_2\},\ \{M_1,\ M_3\},\ \{M_2,\ M_3\},\ \{M_1,\ M_2,\ M_3\}\}$$

4개이며 이중에서 짝수 formation수($=n_e$)는 3개, 홀수 formation수($=n_o$)는 1개이다.

그러므로 $d(B,\ M(B)) = n_o - n_e = 1-3 = -2$가 된다.

또한

$$KF(B) = \{\varnothing,\ \{M_1\},\ \{M_2\},\ \{M_3\}\}$$

로 4개의 원소를 갖는다.

$\underline{e}$를 제거한 그래프 $G-\underline{e}$의 domination 값은 식(B)에 의해

$$d(G-\underline{e},\ C(G)) = \sum_{\forall x \subseteq X,\, O_Y \not\subset I_X} (-1)^{|X+Y|} \cdot d(G,C(G))$$

이고 $d(G,\ C(G)) = (-1)^8 = 1$ 이며 I_x중에서 outcut을 포함하지 않는 것은 $I_{\varnothing}$, I_{M1}, I_{M2}, I_{M3}등 4개가 존재한다.

그러므로

$$d(G-\underline{e},\ C(G)) = (-1)^{|0+3|} + (-1)^{|0+3|} + (-1)^{|0+3|} + (-1)^{|1+3|}$$
$$= -2 \text{ 이다.}$$

여기에서 보면 {Ø, M_1, M_2, M_3}의 여집합들은 {{M_1, M_2, M_3}, {M_1, M_2}, {M_1, M_3}, {M_2, M_3}}은 정확하게 F(B)와 일치하게 된다.

Domination값을 알고 싶은 어떤 subgraph G-$\underline{e}$가 bipartite 구조를 갖는 경우에는 이 구조를 파괴할 수 있도록 edge들을 삽입하면 될 것이다. 그림3과 4는 bipartite구조를 파괴하기 위하여 절점사이에 edge들을 삽입한 예이며, 그림 5는 source절점에서 edge들을 삽입한 예이다. 신뢰도의 정확한 계산을 위하여는 삽입한 edge들의 신뢰도 값을 0으로 주게 되면 원래의 신뢰도에는 영향을 받지 않는다. 또한 변형된 그래프의 cutset들을 이용한 정성적 평가에서도 삽입된 edge들을 단순히 제거함으로서 원래의 그래프에 대한 정확한 정성적 평가를 할 수 있다.

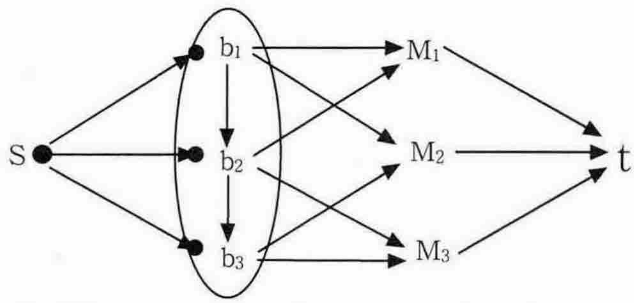

Fig. 3 : First example of elimination of bipartite structure

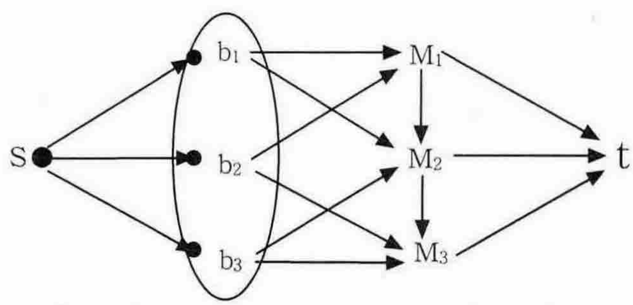

Fig. 4 : Second example of elimination of bipartite structure

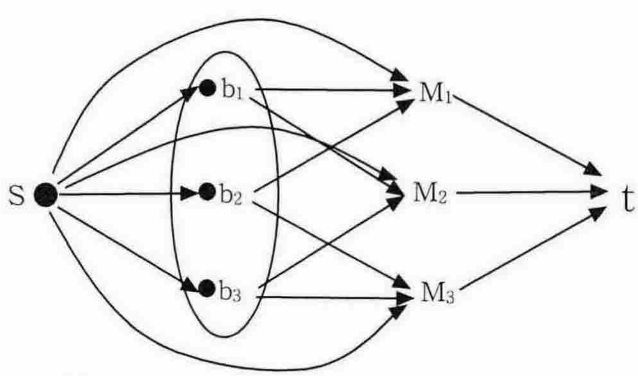

Fig. 5 : Third example of elimination of bipartite structure

3. 결 론

본 연구에서는 m.path와는 달리 m.cutset을 기초로 한 domination값의 결정이 bipartite 구조가 존재하는 경우에는 np-hard문제임을 증명하였고, 이런 경우의 대안을 제시하였다. 참고문헌 [1,2]와 함께 거의 모든 구조에 대하여 분석되어지고, 해답을 얻었지만 아직도 bipartite구조이외에도 어떤 구조가 더 남아 있는지에 대한 차후 연구가 필요하다고 사료된다.

참고문헌

1. 이광원, 이일재, 강신재, "domination이론에서의 새로운 식과 이의 신뢰성계산에 대한 적용", 산업안전학회지 제 11권 1호, 1996년 3월
2. 이광원, "domination이론을 이용한 acyclic digraph의 빠른 신뢰도 계산을 위한 연구", 산업안전학회지 제 11권 1호, 1996년 3월
3. 이일재, 이광원, "FT의 빠른 신뢰도계산을 위한 연구", 산업안전학회지 제 12권 4호, 1997년 12월
4. Kwang-won Rhie, "Zur Domination und Zuverlaessigkeit linearer Graphen aufgrund ihrer Minimalschnitte", *Dissertation*, Technische Universitaet in Berlin, July. 1994.
5. A .Satyanarayana and A. Prabhaker, "New Topological Formula and Rapid Algorithm for Reliability Analysis of Complex networks, "*IEEE Trans. Reliability,* Vol. R-27, June 1978, pp 82-100.
6. A.Satyanarayana, A. Prabhaker, "Comments on "New Topological Formular and Rapid Algorithm for reliability analysis of Complex networks","*IEEE Trans. Reliability,* vol R-28, August 1979 Oct, pp 264.
7. R. R. Willie, "A Theorem Concerning Cyclic Directed Graphs with Applications to network Reliability, " *networks*, Vol. 10, 1980, pp 71-78.
8. A. Satyanarayana, J. N. Hagstrom, "Combinatorial Properties of Directed Graphs Useful in network Reliability, "*networks*, Vol. 11, 1981, pp 357-366
9. A. Satyanarayana, "A unified Formula for Analysis of Some network Reliability Problems," *IEEE Trans. Reliability,* vol R-31, No. 1, April 1982, pp 23-32.
10. A. Satyanarayana, J. N. Hagstrom, "A New Algorithm for the Reliability Analysis of Multi-Terminal networks, "*IEEE Trans. Reliability,* Vol. R-30, 1982 Oct., pp 325-334.
11. A. Satyanarayana and M. k. Chang, "network Reliability and the Factoring Theorem," *networks*, Vol. 13, 1983, pp 107-120.
12. J. A. Buzacott, "A Recursive Algorithm for Directed-Graph Reliability, " *networks*, Vol 13, 1983, pp 241-246.