옵션가격결정모형에 대한 블랙숄즈모형과 다양한 신경망 기법의 성능 비교

Performance comparison between Black-Sholes equation and various Neural Network techniques for option pricing

이효석, 이혁순, 최형준, 이재욱
(우편번호 : 790-784) 경상북도 포항시 남구 효자동 산31번지
포항공과대학교 산업공학과
E-mail : ronalee@postech.ac.kr

Abstract

최근 다양한 금융 데이터를 신경망 이론을 비롯한 최적화 기법을 통해 모델링 하려는 시도가 증가하고 있다. 이러한 시도는 블랙숄즈 모델이 가지고 있는 몇 가지 비현실적인 가정들을 극복할 수 있다는 점에서 성공적이다. 그러나 각각의 최적화 기법의 고유한 특성을 고려하지 못한 채 적용하여 성능면에서 큰 향상을 보이지 못하고 있다. 따라서 이론과 기법의 적용에 있어 금융 데이터의 특성에 맞는 명확한 절차의 정의가 필요하다. 본 논문에서는 옵션의 가격결정에 적용 가능한 신경망 기법들을 제시하고 절차를 정의, 분석하고 그 성능을 블랙-숄즈 방정식과 비교한다. 비교 분석 결과는 블랙-숄즈 방정식에 의한 가격 오차와 최적화 기법을 통한 가격오차가 통계적으로 유의한 차이가 있는지 여부를 분석함으로써 유의성을 검증하였다.

Keywords: Option pricing, Neural Network, Global optimization, Black-Sholes model

1. 연구배경

외환위기 이후 금융시장의 개방화와 구제화가 급속하게 진행되어 금융상품의 가격변동성이 증대되고 있다. 이러한 변동성에 따른 위험을 회피하는 수단으로 또는 적정수익을 확보하려는 수단으로 파생상품에 대한 관심이 증가되고 있다. 특히 대표적 지수옵션 시장인 KOSPI200 옵션시장은 1997년 7월에 개설되어 2002년까지 4년 연속 세계 1위를 차지하였다. 그러나 미국을 비롯한 선진 파생상품시장에 비해 과학적 분석능력을 가진 기관 투자자의 비율이 상대적으로 낮고, 개인투자자의 비중이 60%가 넘는다. 양적인 급성장에 따른 질적 성장이 이루어지지 못함으로 인해 선진 금융시장에 비해 효율적이지 못한 것으로 나타나 국내 금융시장의 효율성을 높일 수 있는 방안에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

시장이 효율적이기 위해서는 가격결정에 영향을 주는 모든 정보가 거래자들에게 공평하게 공개되어 서로가 동일한 정보를 가지고 거래에 참여할 수 있어야 한다. 따라서 파생상품의 가격 추정(이론가)의 정확성은 시장의 효율성을 결정짓는 중요한 요인이다. 지금까지 옵션 가격결정 방법으로 널리 이용되어 온 블랙숄즈 모형은 복잡한 옵션에 대해서는 응용이 어렵고 비현실적인 가정의 한계를 극복하지 못해 실제 가격과의 격차가 크다는 것이 단점으로 지적되고 있다. 이러한 실제가와 이론가의 차이를 극복하기 위해 최근 비모수적 모형인 신경망을 이용한 옵션가격결정방법이 주목받고 있다.

본 연구에서 다루고자 하는 내용은 크게 두 가지이다. 첫째 옵션 데이터의 특징에 맞는 최신 신경망 기법들을 제시하고 적용 절차과 실험 결과를 제시하는 것이다. 둘째는 가격오차의 통계적 유의성 여부를 분석함으로써 각 모델이 블랙숄즈를 기준으로 더 나은 성능을 가졌는지 여부를 측정할 수 있는 기준을 제시하는 것이다. 이에 따라 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2절에서는 인공신경망을 통한 옵션가격결정에 관한 기존 연구에 대한 소개를 통해 문제점 또는 한계를 분석한다. 3절에서는 본 논문에서 다루게 될 인공신경망에 대한 기본적인 설명과 몇 가지 이슈들을 살펴본다. 4절에서는 옵션가격결정에 응용하기 위한 기본적인 내용과 모델의 가정, 적용절차를 제시한다. 5절에서는 각각의 신경망 이론을 적용한 결과와 블랙숄즈에 의한 결과 같의 유의성 검증 결과를 살펴보고 6절에서 결론을 맺는다.

2. 기존의 연구

Black-Sholes(1974)와 Merton(1973)의 연구를 통해 시작된 전통적인 옵션가격결정 모형은 차익거래의 기회가 존재하지 않는 상황에서 무위험 이자율로 수익을 올리는 동적헷징 기법의 아이디어에 기반하고 있다. Black-Sholes 모형은 비교적 간단한 시장 변수들로 옵션가격을 결정할 수 있다는 점에서 옵션시장 발전에 큰 공헌을 했다. 그러나 이후 이 모델의 한계와 문제점들이 알려지기 시작하면서 다양한 수정모형들이 발표되었다. 금융자산의 비정규분포 가정, 변동성의 확률적 가정, 이자율의 확률적 가정 등을 추가한 모형이 대표적이다.[Merton (1976), Cox et al.(1976), Geske(1979), Rubinstein (1983), Hull et al.(1987), Duan(1995)].

1990년대에 들어서 Hutchinson et al.(1994)와 Malliaris et al.(1993)에 의해 비모수적 기법인 신경망 이론을 이용해 옵션 가격을 결정하는 방법이 제안되었다. 각각의 연구는 기초자산의 변동성을 고려하지 못했다는 한계점과 블랙숄즈 모형에 이용된

변수이외에 추가적인 변수를 사용하여 블랙-숄즈 모형과 직접적인 비교가 어렵다는 단점을 가지고 있다. 이후에도 신경망과 블랙-숄즈 모형을 통합하는 등 다양한 형태의 모형이 시도되었다.[Lajbcygier et al., 1997, Anders et al., 1998]. 동시에 신경망 학습 알고리즘에 관한 연구는 과대적합 현상을 막아 검증 오차를 줄이는데 초점이 맞춰졌다. [Gencay et al., 2001]. 과대적합에 관한 문제는 지금도 어려운 문제로 남아있으며 옵션가격결정 모형에도 큰 영향을 주는 요인이다.

3. 인공신경망

인공신경망(Artificial neural networks)은 뉴런과 시냅스를 적절히 조직화해서 비선형적이며, 병렬식으로 계산하는 인간의 두뇌를 본떠 디지털 컴퓨터의 소프트웨어를 이용하여 특정 기능만을 수 행할 수 있도록 모형화 되어 있는 장치이다.[Haykin,1999]. 본 연구에서는 인공 신경망 중 가장 널리 이용되고 있는 다층 퍼셉트론 신경망과 다층 퍼셉트론의 학습 알고리즘인 역전파 알고리즘을 옵션 가격 추정에 이용하였다.

3.1 다층 퍼셉트론(Multilayer Perceptron)

다층 퍼셉트론 신경망은 그림 1.과 같이 뉴런들이 층을 이루어, 입력층(Input Layer)과 한개 이상의 은닉층(Hidden Layer) 그리고 출력층(Output Layer)으로 구성되어 있는 인공신경망을 일컫는다. 입력층은 외부의 데이터를 받아들이고 출력층은 신경망의 결과 값을 내보내며, 은닉층은 외부의 입력과 신경망의 출력을 적절한 방법으로 연결시켜주는 역할을 한다.

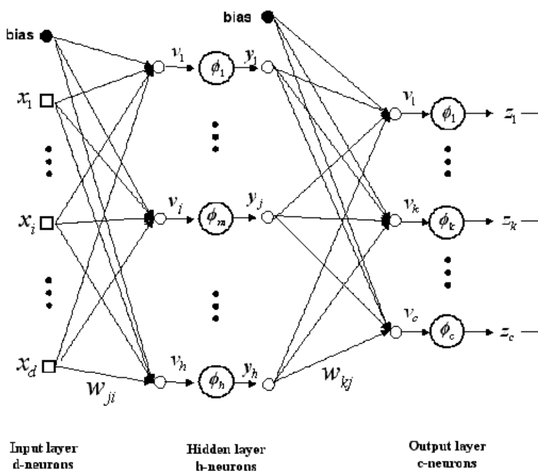

그림 1. d-h-p 다층 퍼셉트론

3.2 역전파 알고리즘(Error Backpropagation)

역전파 알고리즘은 다층 퍼셉트론의 학습을 위한 효율적인 계산 방법을 제공한다는 점에서 인공신경망에 있어 획기적인 발전을 가져왔다. 역전파 알고리즘은 네트워크의 각 층에서 정보의 흐름에 따라 전방향 흐름과 역방향 흐름 두 가지로 구성된다.

- **전방향 흐름:** 입력데이터가 입력층으로 신경망의 각 뉴런을 통해서 마지막 출력층으로 결과 값이 출력되는 과정이다. 이러한 전방향 흐름동안 신경망의 연결 가중치들은 고정된 값을 갖는다.
- **역방향 흐름:** 전방향에서 나온 결과 값을 기대 결과 값과 비교해 오차를 계산하고 이 값이 역방향을 통해서 출력층으로부터 입력층까지 전달된다. 이 역방향 흐름에서 연결가중치들은 네트워크의 결과값이 기대 결과 값과 같아지도록 변화된다.

2.3. 일반화(Generalization)

신경망이 일반화가 잘 되었다는 것은 신경망에 의해서 결정된 입력-출력 함수가 학습에 사용된 데이터와 같은 모집단에서 나온 검증 데이터에 대해서도 잘 적용이 되는 것을 의미한다. 일반적으로 주어진 학습 데이터에 대한 오차를 최대한 줄이는 것만 고려해서 신경망을 학습시키게 되면 실제 구하고자 하는 함수와는 다르게 학습되어 입력데이터의 잡음에 크게 영향을 받을 수 있다. 이러한 현상을 과대 적합이라고 한다. 이는 신경망을 구성함에 있어 가능한 한 모형을 단순하게 하는 것이 좋다는 것을 의미한다.(Occam's razor)

이러한 일반화를 높이기 위한 방법으로 Early stopping 방법과 Regularization 방법이 있다. 먼저 Early Stopping 은 학습과정동안 학습데이터의 오차는 계속 감소하지만 실증 데이터의 오차 값은 감소하다가 어느 순간 증가한다. 실증 데이터의 오차가 감소하다가 증가하는 경우를 과대적합 현상으로 보고 이 때 학습을 일찍 멈추는 방법이 Early Stopping방법이다. 정규화(Regularization) 방법은 학습과정에 모형의 복잡도(Complexity)를 오차함수에 추가시켜 모형이 복잡할수록 패널티를 부과해 과대적합 현상을 막는 방법이다. 이를 위해 역전파 알고리즘의 오차함수를 식(1)과 같이 표현하고 최소화하는 방법이다.

$$J(\mathbf{w}) = E_s(\mathbf{w}) + \lambda E_c(\mathbf{w}) \qquad (1)$$

4. 옵션가격결정에의 응용

옵션가격결정에 가장 많이 이용되어 왔던 모형인 블랙-숄즈 모형은 모수적 추정 기법으로 비현실적인 가정과 급변하는 금융환경을 제시간에 반영하지 못한다는 단점을 가지고 있다. 이러한 모수적 추정방법인 블랙숄즈 방법의 대안으로써 비모수적 추정 기법인 다양한 신경망 기법들을 적용하였다.

4.1 파생금융상품

파생금융상품이란, 통화, 채권, 주식 등 기초자산으로부터 파생된 금융상품으로 금융상품의 미래 가격변동을 예상하여 금융상품의 가격 움직임을 상품화한 것이다. 이는 가격변동성이 큰 금융자산의 미래가격을 현재 시점에서 확정해 놓음으로써 위험을 최소화시키기 위하여 개발되었다. 대표적인 파생금융상품으로는 선도(Forward), 선물(Future), 옵션(Option), 스왑 (Swap) 등이 있으며 이들 파생금융상품을 대상으로 하는 선물 옵션, 스왑 옵션 등 2차 파생상품도 개발되어 파생금융상품의종류는 무수히 많다.

본 논문은 다양한 파생금융상품 중 본 논문에서는 가장 대표적인 파생상품으로 뽑히는 옵션의 가격결정에 대해서 다룬다. 선도거래와 선물거래는 수익구조가 대칭적으로 나타나는 파생금융상품이었다면 옵션은 매입자와 매도자 사이에 서로 다른 비대칭적 수익구조를 갖는다. 따라서 옵션을 매입하기 위해서는 프리미엄(Premium)이 필요하다. 즉 옵션거래는 특정한 기초자산을 만기일이나 또는 그 이전에 미리 정한 가격으로 매입하거나 매도할 수 있는 권리를 프리미엄을 지불하고 사고파는 계약이다. 옵션 발행자가 매수자로부터 프리

미엄을 받는 대신 매수자는 계약이행의 권리만을 갖게 되며 발행자는 매수자의 권리행사에 대하여 계약이행 의무를 갖게 된다. 옵션거래에서 사용되는 주요 용어는 다음과 같다.

- 기초자산(Underlying asset): 옵션의행사로 사거나 팔게 되는 자산이다.
- 행사가격(Strike price): 미래에 거래할 기준으로서 계약서상에 명시되어 있는 가격이다.
- 만기(Maturity): 옵션보유자가 옵션의 권리를 행사할 수 있는 마지막 날로 이 날의 일정시간까지 권리를 행사하지 않으면 옵션의 권리는 소멸한다.

4.2 블랙-숄즈 모델

1970년대 초반 Fisher Black, and Myron Scholes와 Robert Merton은 주식옵션의 가격을 결정하는 문제에 돌파구를 여는 논문을 발표했다[Black, and Scholes, 1974, Merton, 1973]. 이 연구는 옵션의 가격결정과 헷징 방법을 제시함으로써 옵션연구에 큰 영향을 미쳤을 뿐 아니라 옵션 시장의 성장에도 큰 공헌을 했다. 이는 현재까지도 대표적인 옵션가격결정 모형으로 널리 이용되고 있으며, 이 모형은 다음과 같은 가정 하에서 유도된다.

- 주가는 로그정규분포를 따른다. 단, 평균과 표준편차는 일정하다.
- 거래비용과 세금이 없으며, 모든 증권은 연속적으로 분할할 수 있다.
- 주식에 배당금이 없다.
- 무위험 차익거래 기회가 존재하지 않는다.
- 증권의 거래는 연속적으로 이루어진다.
- 투자자는 무위험 이자율로 차입과 대출을 자유로이 할 수 있다.
- 무위험 이자율이 일정하다.
- 주식은 공매가 가능하다.

기초자산의 가격을 S, 옵션의 행사가격을 X, 옵션의 만기까지 기간을 $T-t$, 무위험 이자율을 r, 기초자산의 변동성을 σ, 표준정규분포의 누적확률밀도 함수를 $N(x)$로 정의했을 때 유로피언 콜 옵션의 가격을 결정하는 공식은 다음과 같다.

$$C(t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

4.3 Data Description

본 연구에서 옵션가격결정 모형에 적용을 위해 거래량이 풍부한 우리나라의 주가지수 옵션 상품인 KOSPI200 옵션 데이타를 이용하였다. KOSPI200 지수의 산출 방식과 구성종목과 KOSPI200 옵션의 거래방식은 다음과 같다.

<u>KOSPI200</u>

- 기준 시점: 1990년 1월 3일
- 산출방식:

$$\text{KOSPI200} = \frac{\text{구성종목의 비교시점 시가총액의 합계}}{\text{구성종목의 기준시점 시가총액의 합계}} \times 100$$

- 구성종목: 200종목

<u>KOSPI200 옵션</u>

- 거래대상지수: KOSPI 200
- 결제월 및 거래기간: 결제월은 3월, 6월, 9월, 12월중 2개 결제월과 그 외의 월중 가장 가까운 2개의 월
- 최종거래일: 각 결제월의 두 번째 목요일
- 거래개시일: 각 결제월의 최종거래일의 다음 거래일
- 거래단위: 최소거래단위는 1계약
- 계약의 가격: 포인트에 10만원을 곱한 금액

본 연구에서는 기존의 옵션가격결정 모형과 제안된 모형을 비교하기 위해서 2000년 1월 1일부터 2000년 12월 31일까지의 KOSPI200 콜옵션의 종가 데이터를 이용하였다. 이는 데이터의 비동기적 특성(Nonsynchronous)을 없애기 위한 방법이다. 또한 실험에서 사용한 자료는 FnGuide (http:// www. fnguide.co.kr)에서 제공하는 데이터를 이용하였다. 전체 3715개의 데이터 중에서 80%인 2972개를 학습 데이터로, 20%인 743개를 테스트 데이터로 분리해서 사용하였다. 입력변수로는 KOSPI200 주가지수, 옵션의 만기가격, 옵션 만기까지의 기간, KOSPI200 주가지수의 변동성을 이용하였으며, 이 기간 동안 무위험 이자율은 그 변화가 미미하여 입력변수에서 제외하였다

4.4 비교 분석된 신경망 기법

선형탐색 기반 정규화를 적용한 다층 퍼셉트론 신경망을 실제 데이터를 이용해 비교・분석하도록 하였다. 실험에 사용된 기존의 다층 퍼셉트론 신경망 학습 알고리즘 및 제안된 알고리즘은 다음과 같다.

- 역전파 알고리즘(EBP)
- 정규화 역전파 알고리즘(R-EBP)
- Levenberg-Marquadt 알고리즘(LM)
- 정규화 Levenberg-Marquadt 알고리즘(R-LM)
- Bayesian Regularization 알고리즘(BR)
- 동적 터널링 정규화 알고리즘(DTR)

EBP는 가장 전통적인 신경망기법이다. 그 외의 기법들은 모두 서로 다른 일반화 기법을 추가한 방법이다.

5. 실험 결과

5.1 실험 결과

옵션가격결정 모형으로써 다층 퍼셉트론을 학습시켰다. 학습을 위해 사용한 다층 퍼셉트론 신경망 모형의 기본 구조는 표 1.에 나타내었으며, 다층 퍼셉트론 학습 방법으로 구한 옵션가격의 검증 오차와 학습시간을 표 2.에 나타내었다.

표 1. 옵션가격결정 모형을 위한 다층 퍼셉트론 신경망 모형

	신경망구조	목표 오차	최소 경사도	최대 훈련횟수
다층 퍼셉트론	4-12-1	0.01	0.0001	30000

실제 금융거래를 고려한다면 신경망을 이용해서 옵션가격을 추정하는 방법을 적용하기 위해서는 계산시간이 오래 걸리는 알고리즘은 적용이 어려울 것이다. 따라서 EBP와 R-EBP의 경우 오차가 클 뿐만 아니라 신경망 학습에 시간이 너무 오래 걸린다는 문제점이 있어 옵션 가격 결정에 적용하기에는 무리가 있다. 또한 BR 알고리즘의 경우 학습 오차는 가장 작게 나왔지만 검증

오차는 가장 크게 나와 과대적합 현상이 발생한 것으로 보인다. 뿐만 아니라 BR 알고리즘의 정규분포 가정을 실제 옵션 데이터가 만족하지 못한다는 점도 문제점으로 지적된다. Regulaized LM의 경우 학습 오차는 LM보다 크지만 검증 오차면에서 더 낮은 수준을 유지하였고, 학습시간 역시 가장 짧아 옵션데이터를 분석하는데 가장 적절한 기법인 것으로 나타났다.

표 2. 신경망 기법을 이용한 옵션가격결정모형의 실험 결과

알고리즘	학습 오차	검증 오차	학습 시간(초)
EBP	0.5267	1.0668	765
R-EBP ($\lambda=0.01$)	0.4504	0.9568	4614
LM	0.2440	0.9664	438
R-LM ($\lambda=0.01$)	0.3700	0.8765	13.4
BR	0.1776	1.0813	264
DTR ($\lambda=0.01$)	0.4467	0.9514	4659

5.2 유의성 검정

위의 실험 결과를 통해서 블랙-숄즈에 비해서 각 최적화 기법들이 모두 오차면서서 작은 값을 갖는다는 것을 확인할 수 있다. 본 절에서는 이러한 결과를 통계적으로 검증하고자 한다. 본 논문에서 사용할 ANOVA 분석은 블랙숄즈 방법에 의한 값과 실제값(종가)의 오차와 각 기법을 통해 추정된 값과 실제값(종가)의 오차가 유의한 차이를 갖는지를 SSE와 SSR의 비율이 F-distribution을 따른 다는 것을 이용해서 보이는 방법이다. 예를 들어 가장 적절한 방법인 Regularized LM 방법은 [표3]에 나타난 것처럼 F-value값이 168.64로 99.9%의 유의수준하에서도 유의한 차이를 보이는 것으로 나타나 블랙숄즈 모형에 비해서 통계적으로 확실히 더 나은 기법임을 보였다.

표 3. R-LM의 ANOVA 분석 결과

	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	123.2	1	123.2	168.64	0
Errors	1687.58	2310	0.731		
Total	1810.78	2311			

이러한 ANOVA 분석 결과는 새로운 옵션가격결정모형이 기존의 모형인 블랙숄즈모형보다 얼마나 더 좋은 성능을 갖는지를 통계적으로 보여줄 수 있는 지표가 된다.

6. 결론 및 토의

금융데이터의 분석은 데이터의 특성상 정확성과 속도를 요구한다. 본 연구에서는 다양한 최적화기법들을 KOSPI200 지수옵션의 가격결정모형으로 제안함으로써 신경망이론을 금융데이터 마이닝 분야에 적용해 보았다. 기존에 많이 이용되어 왔던 모수적 옵션가격결정모형인 블랙-숄즈 모형의 대안으로써 비모수적 추정 기법인 다양한 최적화 기법들을 적용하였다. 특히 비모수적 추정 기법인 다층 퍼셉트론 신경망 기법은 모형을 결정하는데 있어 특별한 가정이 필요 없이 시장의 데이터로만 옵션가격을 추정한다는 점에서 모수적 추정 기법을 대체하는 연구로 주목 받고 있다. 이러한 각각의 기법들의 옵션가격결정에의 적용 가능성을 살펴보고 그 유의성을 검정해 앞으로의 가능성을 제시한 것이 이 논문의 가장 큰 기여라고 할 수 있다. 결과적으로 R-LM 학습 알고리즘을 옵션가격결정 모형으로 적용해서 수치실험을 한 결과 블랙-숄즈 모형의 오차와 비교하여 60%수준의 향상을 보였다. 본 연구에서는 다층 퍼셉트론 신경망을 이용한 옵션가격결정모형의 구성에 있어 블랙-숄즈 모형과 비교를 위해 동일한 입력변수만을 데이터로 이용하였다. 그러나 실제 옵션거래에 있어 오차를 더 줄이기 위해서는 추가적인 입력변수 선택과 더 많은 데이터를 이용하여 오차를 줄일 수 있는 방법이 가능할 것이다.

참고 문헌

박정식, 박종원, 조재호, 2002, "현대재무관리", *다산출판사*, 제6판.

Anders U., O. Korn, and C. Schimitt, 1998, "Improving the pricing of options: a neural network approach", *Journal of Forecasting*, 17, 369-388.

Black F., and M. Scholes, 1974, "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy.*

Geske R., 1979, "The validation of compound options", *Journal of Financial Economics*, 7, 63-81.

Haykin S., 1999, "Neural networks A comprehensive foundation", *Prentice-Hall of India.*

Hull J. C., and A. White, 1987, "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *The Jounal of Finance*, 38, 281-300.

Merton R. C., 1976, "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.

Rubinstein M.,1983, "Displaced diffusion option pricing". *The Journal of Finance*, 38, 213-217.

Rumelhart D. E., G. E. Hinton and R.J. Williams, 1986, "Learning representations by backpropa gating errors" *Nature*, Vol. 323, 533-536