제약식을 고려한 다품목 일괄주문모형에 관한 연구
Joint replenishment problem with resource constraints

차병철, 문일경
부산대학교 산업공학과

Abstract

다수의 품목을 개별적으로 주문하기 보다는 묶어서 한꺼번에 주문하는 경우 수송비용과 주문비용을 줄일 수 있으며, 같은 공급자에게서 구매하는 경우에는 가격할인까지 기대할 수 있다. 이와 같이 하나의 공급자를 통해 다수의 품목을 구매하는 경우에 대한 최적의 구매전략을 다룬 문제가 다품목 일괄주문모형으로 Joint Replenishment Problem(JRP)으로 잘 알려져 있으며 지난 수십 여년간 많은 연구가 이루어진 생산재고관리 문제의 한 분야이다. 그러나 다른 생산재고관리 영역의 문제들과는 달리 일반적인 JRP를 해결하기 위한 발견적 기법들에 대한 연구는 수없이 많은 반면 JRP를 현실적으로 확장한 연구는 국내외적으로 전무한 형편이다. 본 연구에서는 일반적인 JRP를 제약식을 고려한 문제로 확장하여 유전자 알고리즘을 이용한 해법을 개발하고 이 문제의 확장 가능성에 대해 소개하고자 한다.

1. 서론

각 품목의 수요(D_i)가 일정한 경우 다품목 일괄주문모형에서는 단일품목의 경제적발주량(EOQ) 모형에서와 같이 주문비용과 재고유지비용의 합으로 구성되어지는 다음과 같은 단위기간당 총비용을 최소로 하는 구매전략을 구하는 것이 목적이다.

$$TC(T, k_1, k_2, \cdots, k_n) = \frac{S + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i}}{T} + \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i k_i T h_i}{2}$$

고려되는 주문비용은 크게 구매 의사결정에 따라 공동으로 소요되는 major setup cost(S)와 개별 품목에 소요되는 minor setup cost(s_i)로 나누어진다. 그리고 각 제품별 재고유지비용은 단위기간동안 한 단위당 h_i가 소요된다. 다품목 일괄주문모형의 가장 큰 특징은 모든 품목을 기본주기 T의 정수배인 k_iT 주기마다 발주하므로서 일괄주문에 따른 비용절감 효과를 얻고자 하는 것이다. 즉 이 문제는 총비용을 최소로 하는 기본주기 T와 각 품목의 발주주기를 결정하는 n개의 정수 k_i를 구하는 것으로 요약된다.

간단한 비용함수에도 불구하고 Arkin 등[1]은 JRP가 NP-hard임을 증명하였다. 즉 JRP에서는 고려되어지는 품목수 n이 증가하게 되면 한정된 시간 안에 최적해를 찾기가 거의 불가능하다는 것을 의미한다. 이 때문에 지난 수십 여년간 근사 최적해를 찾기 위한 많은 발견적 기법(heuristic method)들이 연구되어졌다.

Goyal[2][3]은 이 분야에 있어서 선구자적 업적을 가진 자로서 $TC(k_i(T), T) \le TC(k_i(T)+1, T)$와 $TC(k_i(T), T) \le TC(k_i(T)-1, T)$를 동시에 만족하는 기본주기 T와 각 품목의 발주시기를 결정하는 k_i를 열거법(enumeration approach)을 이용하여 구하였고 자신의 발견적 기법이 항상 최적해를 구할 수 있음을 주장했다. 그러나 이후 Van Eijs[4]는 Goyal이 열거법을 통해 구한 해가 최적해를 보장할 수 없음을 보였다.

Silver[5][6]는 일괄구매의 장단점을 고찰하고 간단한 비반복적인 절차를 통해 해를 구하는 발견적 기법을 제시하였다. 그러나 closed-form으로 한번의 절차를 통해 해를 구하는 장점에도 불구하고 정수해 k_i를 구하기 위해 반올림 근사를 사용하므로서 다른 발견적 기법에 비해 성능이 우수하진 못했다.

Kaspi와 Rosenblatt[7][8]은 반복적인 절차를 통해 T와 k_i를 구하는 발견적 기법이 초기해에 따라 서로 다른 지역 최적해(local minimum)로 수렴함을 알고 m개의 다양한 초기해를 통해 개선된 근사 최적해를 찾도록 하는 발견적 기법을 개발하고 그 알고리즘을 **RAND**라고 명명했다. 이 발견적 기법에서는 먼저 기본주기 T가 가질 수 있는 최소, 최대영역을 정의하고 이를 m등분하여 각 초기 T_j에 대해 지역 최적해를 구하기위한 반복적인 발견적 기법을 적용했다. 이를 통해 m개의 지역 최적해를 구하고 그중 최소값을 근사 최적해로 구했다. 실험을 통해 이 알고리즘은 지금까지 개발된 많은 발견적 기법에 비해 상당히 우수한 해를 제공하는 것으로 알려져 있다.

최근 Khouja 등[9]은 JRP에 GA기법을 적용하여 좋은 근사 최적해를 구하려는 시도를 하였다. n개의 정수해 k_i를 나타내는 염색체를 GA절차를 통해 생성하고, 결정된 k_i에 대해서는 최적성 이론에 기초해 기본주기 T를 결정하므로서 각 개별 염색체를 평가하였다. 실험을 통해 **RAND**기법과 비교하여 상당히 좋은 근사 최적해를 구함을 보였다.

실제 생산/제조 시스템의 경우 구매자금이나 창고, 수송능력에 관련한 많은 제약이 있음에도 불

구하고 일반적인 JRP에 관한 많은 연구와는 달리 이와 관련한 연구가 매우 부족한 실정이다.

Goyal[10]은 라그랑지 승수법을 이용하여 단 하나의 제약만이 존재할 때 적용할 수 있는 발견적 기법을 제시했다. 그러나 다양한 제약조건하에서는 많은 라그랑지 승수가 필요하기 때문에 이와 같은 방법으로 근사 최적해를 구하기가 쉽지 않다.

본 연구에서는 제약조건을 가진 JRP를 해결하기 위해 기존의 **RAND**를 수정한 새로운 발견적기법을 개발하고, GA를 이용하여 이를 해결할 수 있는 방법론을 제시하고자 한다.

2. 일반적인 다품목 일괄주문모형(General Joint Replenishment Problem)

전술한 바와 같이 다품목 일괄주문모형은 주문비용과 재고유지비용의 합으로 구성되어지는 다음과 같은 단위기간당 총비용을 최소로 하는 구매전략을 구하는 것이 목적이다.

$$TC(T,k_1,k_2,\cdots,k_n)=\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_ik_iTh_i}{2}$$

다품목 일괄주문모형의 가장 큰 특징은 모든 품목을 기본주기 T의 정수배인 k_iT 주기마다 발주하므로서 일괄주문에 따른 비용절감효과를 얻고자 하는 것이다. 곧 이 문제는 총비용을 최소로 하는 기본주기 T와 각 품목의 발주주기를 결정하는 n개의 정수 k_i를 구하는 것이다. 간단한 비용함수에도 불구하고 이 문제는 전형적인 NP-hard문제로서 품목수가 증가하면 최적해를 구하는 것이 불가능해진다. 때문에 과거 30여년간 최적해에 가까운 근사 최적해를 구하기 위한 많은 연구들이 진행되어 왔다.

JRP에 대한 대표적인 발견적기법으로는 각 의사결정변수들의 최적성조건(optimality condition)을 이용한 반복 알고리즘(iterative algorithm)을 들 수 있다. 먼저 n개의 주어진 k_i에 대해 주문주기 T의 최적성 조건은 총비용함수 TC를 T에 대해 미분함으로서 얻을 수 있다.

즉 $\frac{\partial TC}{\partial T}=\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_ik_ih_i}{2}=0$ 으로부터 $T^*=\sqrt{\frac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}D_ik_ih_i}}$을 얻을 수 있다. 또한 고정된 주문주기 T에 대해 일련의 k_i들은 다음 두 정수해의 최적성 조건식으로부터 유도할 수 있다. $TC(k_i)\le TC(k_i+1)$ 와 $TC(k_i)\le TC(k_i-1)$으로부터 $k_i^*(k_i^*-1)\le\frac{2s_i}{D_ih_iT^2}\le k_i^*(k_i^*+1)$을 얻을 수 있다.

반복 알고리즘(iterative algorithm)은 위의 두 최적성 조건을 이용하여 다음과 같은 반복적 계산을 통해 근사 최적해를 구해낸다.

1단계) 모든 i 품목에 대해 $k_i = 1$로 둔다.
2단계) 고정된 일련의 k_i에 대해 최적성 조건으로부터 T를 구한다.
3단계) 고정된 T에 대해 최적성조건으로부터 n개의 k_i를 각각 구한다.
4단계) 일련의 k_i가 수렴할 때까지 2단계, 3단계를 반복한다.

3. 제약식을 고려한 다품목 일괄주문모형(Joint Replenishment Problem with Resource Restriction)

제약조건을 가진 JRP는 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$TC(T,k_1,k_2,\cdots,k_n)=\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_ik_iTh_i}{2}$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n}D_ik_iTb_i\le B$$

여기서 b_i는 각 제품의 구매단가이면 B는 한번에 구매할 수 있는 자본의 상한이다. 라그랑지 승수를 이용하여 이를 수정하면 다음과 같다.

$$TC=\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_ik_iTh_i}{2}+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}D_ik_iTb_i-B\right)$$

일반적인 다품목 일괄주문모형과 같은 방식으로 위 목적함수로부터 각 의사결정변수들의 최적성조건을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial TC}{\partial T}=-\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{D_ik_ih_i}{2}+\lambda\sum_{i=1}^{n}D_ik_ib_i=0$$

$TC(k_i)\le TC(k_i+1)$와 $TC(k_i)\le TC(k_i-1)$

$$\frac{\partial TC}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}D_ik_iTb_i-B=0$$

위 식으로부터

$$\lambda^*=\left(\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}D_ik_ih_i}{2}\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}D_ib_ik_i$$

$$k_i^*(k_i^*-1)\le\frac{2s_i}{(D_ih_i+2\lambda D_ib_i)T^2}\le k_i^*(k_i^*+1)$$

$$T^*=\min\left[\sqrt{\frac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}D_ik_ih_i}},\ \frac{B}{\sum_{i=1}^{n}D_ib_ik_i}\right]$$

위 최적성조건들을 이용, Kaspi와 Rosenblatt의 **RAND** 알고리즘을 수정하여 제약조건을 가진 JRP에 적용할 수 있는 새로운 알고리즘(**M-RAND**)을 소개하면 다음과 같다.

M-RAND(Modified-RAND)

1단계) $T_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n} s_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} D_i h_i}}$,

$T_{\min} = \min\sqrt{\dfrac{2s_i}{D_i h_i}}$ 을 계산한다.

2단계) $[T_{\min}, T_{\max}]$를 m개의 등구간으로 나눈다. $(T_1, T_2, \cdots, T_j, \cdots, T_m)$, $j=0$

3단계) $j=j+1$, 각 T_j에 대하여 $\lambda=0$

4단계) $k_i(k_i-1) \le \dfrac{2s_i}{(D_i h_i + 2\lambda D_i b_i)T^2} \le k_i(k_i+1)$를 만족하는 일련의 정수 k_i를 구한다.

5단계) 일련의 k_i에 대하여

$$T = \min\left[\sqrt{\frac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} D_i k_i h_i}},\ \frac{B}{\sum_{i=1}^{n} D_i b_i k_i}\right]$$

를 구한다.

6단계) 만약 $T = B/\sum_{i=1}^{n} D_i b_i k_i$ 이면

$$\lambda^* = \left(\frac{S+\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{k_i}}{T^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i k_i h_i}{2}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} D_i b_i k_i$$

그렇지 않으면 $\lambda=0$

7단계) 일련의 k_i가 수렴하면 3단계로 그렇지 않으면 4단계로 이동한다. $j=m$이면 종료한다.

4. 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm)의 적용

많은 최적화 문제들은 탐색영역에 있어서 변수들이 본 문제와 같이 비선형성을 띄는 복잡한 문제들로 구성되어 있으며, 특히 본 문제와 같은 전형적인 NP-hard 문제는 최적해를 구하는데 많은 어려움이 있다. 최근 이러한 최적화 문제를 해결하기 위한 방법으로 생물의 진화메커니즘을 이용한 다양한 방법에 대한 연구가 진행되고 있다. 그 중에서 유전자 알고리즘은 어려운 최적화 문제를 해결하는데 있어 일반적으로 많이 이용되는 전역적인 최적화 알고리즘으로 알려져 있다. 유전자 알고리즘은 적자생존과 자연도태의 진화원리를 컴퓨터를 이용해 구현하는 방법으로 확률적인 탐색을 통해 어렵고 복잡한 문제에 대해 짧은 시간안에 근사 최적해를 제공하는 강력한 탐색능력을 가지고 있다.

유전자 알고리즘은 생물학적인 구조의 유전자를 표현하기 위해서 이진정수나 실수를 이용하여 문자열을 구성한다. 이를 통해 자연계의 진화 과정인 선별(selection), 교차(crossover) 그리고 돌연변이(mutation)에 의해 주어진 문제에 대해 최적해에 근접하는 개체를 생성하여 최적해를 찾아가는 절차를 수행한다. 특히 유전자 알고리즘의 성능은 염색체의 표현(representative), 선별(selection), 교차(crossover), 돌연변이와 같은 유전 연산자(genetic operators)와 교차변이율, 돌연변이율, 모집단의 크기 등과 같은 유전 파라메터(genetic parameters)에 따라 크게 영향을 받는 것으로 알려져 있다.

일반적인 GA 구조

```
begin
   t=0
   모집단 P(t)의 초기화 (초기모집단 생성)
   P(t)의 적응도평가
while (종료조건이 만족되지 않으면) do
   begin
      t = t+1
      P(t-1)로부터 P(t)를 선별
      P(t)의 유전연산(교차와 돌연변이)
      P(t)의 적응도평가
   end
end
```

서술한 바와 같이 JRP는 총비용을 최소로 하는 기본주기 T와 각 품목의 발주주기를 결정하는 n개의 정수 k_i를 구하는 것이 목적이다. 이를 위해 표현식으로 n개 인자를 가진 염색체를 사용하였다. n개의 각 인자는 k_i를 구하기 위한 것으로 0과 1사이의 random key로서 표현하였다. 이는 k_i가 각 품목마다 가질 수 있는 상하한이 서로 다르기 때문에 일반적인 정수를 사용할 경우 교차와 돌연변이 연산을 통해 불필요한 해를 가지는 것을 방지하기 위함이다. 생성된 0과 1사이의 random값은 간단한 decoding연산을 통해 의미있는 k_i 값으로 변환되어 질 수 있다..

random key

0.154	0.254	0.001	0.852	0.364	0.567	0.912	0.164	0.521	0.326

decoding연산

$$k_i = k_i^{LB} + \lfloor (k_i^{UB} - k_i^{LB} - 1)\times \mathrm{Gene}(i) \rfloor$$

1	3	1	6	2	2	4	1	2	1

k_i

decoding연산을 위한 각 k_i 값의 상하한값은 다음의 최적성 조건식으로부터 유도되어진다.

$$k_i^{LB}(k_i^{LB}-1) \le \frac{2s_i}{D_i h_i T_{\max}^2} \le k_i^{LB}(k_i^{LB}+1)$$

$$k_i^{UB}(k_i^{UB}-1) \le \frac{2s_i}{D_i h_i T_{\min}^2} \le k_i^{UB}(k_i^{UB}+1)$$

여기서 $T_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n} s_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} D_i h_i}}$,

$T_{\min} = \min\sqrt{\dfrac{2s_i}{D_i h_i}}$ 로 구해진다.

일반적인 선별, 교차, 돌연변이 된 random key 염색체는 decoding 연산을 거쳐 의사결정변수인 k_i 값을 결정하게 되고 결정된 k_i 값에 대해 최적의 기본주기 T를 구하게 된다. 제약조건이 있을 경우 최

적의 기본주기 T는 다음의 최적성조건에 의해 결정되어진다.

$$T^* = \min\left[\sqrt{\frac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n} s_i k_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} D_i k_i h_i}}, \frac{B}{\sum_{i=1}^{n} D_i k_i h_i}\right]$$

T와 모든 품목에 대한 k값이 결정되어지면 총비용함수식을 통해 모집단의 염색체에 대한 적응도를 평가하게 되고 종료조건을 만족하기 전까지 선별, 교차, 돌연변이를 반복하게된다.

본 연구에서는 선별의 방식으로 $\mu+\lambda$ 기법에 엘리트방식을 혼합하여 사용하였다. $\mu+\lambda$ 기법은 부모세대의 μ개의 염색체와 교차와 돌연변이를 통해 생성된 λ개의 염색체중 일반적인 확률방식으로 다음세대의 모집단으로 μ개의 염색체를 선택하는 기법이다. 또한 선별의 과정중에 가장 좋은 해가 제거되는 것을 막기 위해 엘리트방식을 혼합하여 사용하였다.

교차는 일반적인 일점교차방식을 사용하였고, 돌연변이는 선택된 유전자를 새로운 0, 1 난수를 발생시켜 교체시키는 방식을 사용하였다.

단일 자본제약을 고려하여 10, 20, 30, 50개의 다품목을 대상으로 총 1600개의 데이터를 난수 발생시켜 시뮬레이션한 결과 Goyal의 발견적기법보다 GA의 성능이 상당히 우수하다는 사실을 확인할 수 있었다. 그러나 상당히 큰 m에 대해 수개의 경우를 제외하고는 **M-RAND**가 사실상 두 알고리즘보다 우수한 결과를 나타냈다.

5. 결 론

본 연구는 자원에 대한 제약조건을 고려한 일괄주문모형을 다루었다. 기존의 연구결과들을 확장하여 새로운 발견적기법을 개발하였고, 유전자 알고리즘을 이용한 방법론을 제시하였다. 많은 실험을 통해 새롭게 개발된 발견적기법의 우수성을 확인할 수 있었다.

실험에서 **M-RAND**의 효율이 GA방법론보다 사실상 우수한 결과를 나타내고 있음에도 불구하고 GA방법론이 의미가 있는 이유는 그 확장성때문이다. 만약 다수의 제약조건이 존재한다면 **M-RAND**는 제약조건식의 수만큼 라그랑지승수를 고려하여 다시금 수정되어야 할 것이다. 그러나 GA방법론에서는 단순히 최적의 T를 결정하기 위한 최적성조건만을 변경하여 주면 된다.

즉, $$T^* = \min\left[\sqrt{\frac{2\left(S+\sum_{i=1}^{n} s_i k_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} D_i k_i h_i}}, \frac{B}{\sum_{i=1}^{n} D_i k_i h_i}, \cdots\right].$$

향후 가격할인 등 현실적인 상황을 고려하여 연구를 계속적으로 확장하려고 한다.

참고문헌

[1] Arkin, E., Joneja, D. and Roundy, R., 1989, Computational complexity of uncapacitated multi-echelon production planning problems. *Operations Research Letters*, 8, 61-66.

[2] Goyal, S., 1973, Determination of economic packaging frequency for items jointly replenished. *Management Science*, 20, 232-238.

[3] Goyal, S., 1974, Determination of optimum packaging frequency of items jointly replenished. *Management Science*, 23, 436-443.

[4] Van Eijs, M., 1993, A note on the joint replenishment problem under constant demand. *Journal of the Operational Research Society*, 44, 185-191.

[5] Silver, E., 1975, Modifying the economic order quantity (EOQ) to handle coordinated replenishment of two or more items. *Production & Inventory Management*, 16, 26-38.

[6] Silver, E., 1976, A simple method of determining order quantities in jointly replenishments under deterministic demand. *Management Science*, 22, 1351-1361.

[7] Kaspi, M. and Rosenblatt, M., 1983, An improvement of Silver's algorithm for the joint replenishment problem. *IIE Transactions*, 15, 264-269.

[8] Kaspi, M. and Rosenblatt, M., 1991, On the economic ordering quantity for jointly replenished items. *International Journal of Production Research*, 29, 107-114.

[9] Khouja, M., Michalewicz, Z., and Satoskar, S., 2000, A comparison between genetic algorithms and the RAND method for solving the joint replenishment problem. *Production Planning & Control*, 11, 556-564.

[10] Goyal, S., 1975, Analysis of joint replenishment inventory systems with resource restriction. *Operations Research Quarterly*, 26, 197-203.