대한산업공학회/한국경영과학회 2004 춘계 학술대회

2004년 5월 21일 ~22일 전북대학교

유한 정수 변수를 포함한 가변용량 (0,1)-배낭문제에 대한 절단평면*

이경식**, 박성수***
**한국외국어대학교 산업정보시스템공학부
*** 한국과학기술원 산업공학과

Abstract

In this paper, we propose an effective cut generation method based on the Chvatal-Gomory procedure for a variable-capacity (0,1)-Knapsack problem, which is the same problem as the ordinary binary knapsack problem except that a binary capacity variable is newly introduced. We first derive a class of valid inequalities for the problem using Chvatal-Gomory procedure, then analyze the associated separation problem. Based on the results, we show that there exists a pseudo-polynomial time algorithm to solve the separation problem. Preliminary computational results are presented which show the effectiveness of the proposed cut generation method.

1. 서 론

본 연구에서는 아래와 같이 정의되는 다면체 P에 대해, Chvatal-Gomory (C-G) 절차를 적용하여 효과적인 유효부등식(Valid Inequality)을 유도하는 방안을 제시한다.

$$P = conv\{(x,y) \in Z_+^{n+1} : \sum_{j\in N} a_j x_j - \lambda y \le 0,$$
$$x_j \le 1, \forall j \in N, y \le 1\}$$

단, $N = \{1,\ldots,n\}$, λ, $a_j, \forall j \in N$ 은 양의 정수이고 $a_j \le \lambda, \forall j \in N$ 이다.

P를 정의하는 제약식들에서 알 수 있듯이, 변수 x 와 y 는 이진변수이다. 이와 같은 형태의 제약식들은 위치선정-할당문제(Location-Allocation problem) [2], 통신망 설계 [4] 등에서 빈번히 나타난다.

C-G 절차는 '주어진 정수계획문제를 정의하는 각각의 제약식에 비음의 실수를 곱하고, 이들을 각 변끼리 더해서 얻어지는 부등식에서 정수변수의 계수를 내림하고(Round-down) 난 후, 우변상수를 내림하여, 정수가능해들이 정의하는 해집합에 대한 유효부등식을 유도하는 절차'라고 간단히 소개할 수 있으며, 이에 대한 자세한 사항은 Nemhauser and Wolsey [5] 을 참조하기 바란다.

최근에 Glover *et al.*[3]은 C-G 절차를 응용하여, (0,1)-배낭문제[1,5]에 대한 새로운 절단평면 생성방안을 고안한 연구결과를 발표하였다. 이 방법은 C-G 절차를 통해 이론적으로 효과적인 절단평면을 유도할 수 있음을 보여 주었다. 이들의 결과에 의하면, (0,1)-배낭문제에 대해서 잘 알려진 Cover 부등식[1, 5]을 절단평면으로 사용하는 것 보다 좋은 계산결과를 얻을 수 있었다. 이들의 연구는 C-G 절차의 기계적인 절차적 특성을 특수한 문제에 잘 적용시킴으로써 기존의 다면체적 절단평면 유도의 틀을 벗어나, 새로운 형태의 절단평면 생성방안을 제시하였다는 데에 그 의의를 찾을 수 있을 것이다.

또한, 이경식 등[7]은 위의 다면체 P 에서 y 변수가 이진변수가 아닌 상한이 명시적으로 없는 정수변수인 다면체에 대해 C-G 절차를 이용한 효과적인 절단평면 생성방안을 제시하였으며 본 연구도 이 연구결과에 기초를 두고 있다.

그러면, P를 정의하는 첫 번째 부등식의 양변에 비음의 실수 u_0 를, 각각의 $j \in N$ 에 해당되는 부등식 $x_j \le 1$ 의 양변에 비음의 실수

* 이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2003-003-D00546)

u_j 를, 그리고 $y \le 1$ 의 양변에 비음의 실수 v를 곱하고 이 부등식들의 각변을 더하여 얻어진 식의 좌변계수를 내림한 후, 우변상수를 내림하는 C-G 절차를 적용하면, 다음의 (1)과 같은 P에 대한 유효부등식을 얻게 된다.

$$\sum_{j \in N} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor x_j + \lfloor -u_0 \lambda + v \rfloor y \le \lfloor \sum_{j \in N} u_j + v \rfloor \quad (1)$$

단, $\lfloor \bullet \rfloor$ 는 소수점 이하를 내림한 값이다.

본 논문에서는 P를 정의하는 제약식을 만족하는 비정수해가 주어졌을 때, 이 비정수해에 의해서 위배되어지는 부등식 (1)을 생성할 수 있는 방법을 제시하고, 아울러 이러한 절단평면의 효과를 일차적으로 실험한 결과를 제시하고 있다. 우선, 본 연구에서 제시하고 있는 부등식 (1) 의 생성방안에 대한 본격적인 논의를 하기 전에, v 값에 따른 부등식 (1) 의 이론적 효과에 관한 다음의 정리를 살펴보자.

정리 1. 만약, $v \ge 1$ 이라면, 이 때 얻어지는 부등식 (1) 은 P 의 Facet 을 정의할 수 없다.
증명. 지면관계상 생략함. 이경식[6] 참조.

위의 정리는 효과적인 부등식 (1) 을 생성함에 있어, $v \ge 1$ 인 경우에 얻어지는 부등식 (1) 을 배제할 수 있는 이론적 근거를 주고 있다. 따라서 이후의 논의에서는 $v < 1$ 인 경우에 얻어지는 부등식 (1) 에 한하여 절단평면 생성방안을 제시하도록 하겠다. 그러나, 부등식 (1) 을 위한 분리문제(Separation Problem)를 모형화할 때에는, 편의상 v 의 범위를 $0 \le v \le 1$ 로 지정하도록 하겠다.

2. 분리 문제의 분석 및 해법

다면체 P를 정의하는 제약식을 모두 만족하는 비정수해 $(\bar{x}, \bar{y})$ 가 주어졌다고 가정하자. 그 다음, $J^* = \{j \in N : \bar{x}_j > 0\}$ 이라고 정의하면, 부등식 (1) 중에서 $(\bar{x}, \bar{y})$ 에 의해 위배되는 부등식이 있는지를 찾는 분리 문제, SEP 은 다음과 같이 정식화될 수 있다.

$$\max \sum_{j \in J^*} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor \bar{x}_j + \lfloor -u_0 \lambda + v \rfloor \bar{y} - \lfloor \sum_{j \in J^*} u_j + v \rfloor$$
$$\text{s.t.} \quad u_0 \ge 0, \quad 0 \le v \le 1, \ u_j \ge 0, \ \forall j \in J^*$$

우선, 분리 문제 SEP 의 분석을 용이하게 하기 위해서 부등식 (1) 에서 y 의 계수가 어떤 주어진 구간내의 정수값으로 고정된 경우를 고려하자. 즉, $\lfloor -u_0 \lambda + v \rfloor = -p_0$ 이라고 가정하자. 단, p_0 는 양의 정수이다. 그러면, 이 경우의 분리 문제, SEP(p_0)는 다음과 같이 정식화된다.

$$\max \sum_{j \in J^*} \lfloor u_0 a_j + u_j \rfloor \bar{x}_j + \lfloor -u_0 \lambda + v \rfloor \bar{y} - \lfloor \sum_{j \in J^*} u_j + v \rfloor$$
$$\text{s.t.} \quad p_0 - 1 < u_0 \lambda - v \le p_0$$
$$u_0 \ge 0, 0 \le v \le 1, \ u_j \ge 0, \ \forall j \in J^*$$

여기서, 임의의 $0 \le v \le 1$ 에 대해, $u_0 = (p_0 + v)/\lambda$ 인 SEP(p_0) 의 최적해가 존재한다는 사실을 쉽게 알 수 있으므로, SEP(p_0) 를 다시 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\max \sum_{j \in J^*} \lfloor (p_0 + v) a_j / \lambda + u_j \rfloor \bar{x}_j - p_0 \bar{y} - \lfloor \sum_{j \in J^*} u_j + v \rfloor$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \le v \le 1, \ u_j \ge 0, \ \forall j \in J^*$$

이제, SEP(p_0) 의 최적해의 성질을 분석하기 위해 몇 가지 기호를 도입하도록 하겠다. 먼저, 모든 $j \in N$ 에 대해서, $p_0 a_j / \lambda = p_j + q_j / \lambda$ 로 나타낼 수 있다는 사실을 밝혀둔다. 단, p_j 는 비음의 정수이고, q_j 는 $0 \le q_j < \lambda$ 인 정수이다.

그리고, 모든 $j \in N$ 에 대해서 $\mu_j = \lambda - q_j$ 로 정의하자. 그리고, 편의상 $\mu_1 / a_1 \le \cdots \le \mu_n / a_n$ 이라고 가정하자. 여기서, 모든 $j \in N$ 에 대해서 다음이 성립한다는 사실을 밝혀둔다.

$$(p_0 + \mu_j / a_j) a_j / \lambda = p_0 a_j / \lambda + \mu_j / \lambda = \lfloor p_0 a_j / \lambda \rfloor + 1$$

다음으로 k 를, $\mu_j / a_j < 1$ 인 인덱스 j 중에서 가장 큰 값으로 정의하자. 즉, $1 \le k < n$ 이고 $\mu_k / a_k < 1$, $\mu_{k+1} / a_{k+1} \ge 1$ 이거나 $k = n$ 이다. 마지막으로, $\alpha_0 = 0$ 으로 정의하고, $\alpha_j = \mu_j / a_j, j = 1, \ldots, k$ 로 정의하자. 또한, 이후에 설명의 편의를 위해서 $\alpha_{k+1} = 1$ 로 정의하자. 이제 SEP(p_0) 의 최적해에 대한 중요한 성질을 소개한다.

정리 2. $0 \le i \le k+1$ 인 어떤 i 에 대해서, $v = \alpha_i$인 SEP(p_0) 의 최적해가 존재한다.
증명. 지면관계상 생략함. 이경식[6] 참조.

위의 정리 2가 의미하는 바는 다음과 같다. 즉, SEP(p_0) 의 최적해를 구하는 데에 있어 v 의 값을 $0 \le v \le 1$ 인 실수로 간주할 필요가 없이 $v = \alpha_i$, $i = 0, \ldots, k+1$ 의 값들만 고려하면 된다는 것을 의미한다. 따라서, 본 연구에서는 SEP(p_0) 의 최적해를 구하는 한 방법으로 v 의 값을 각각의 $i = 0, \ldots, k+1$ 에 대한 α_i 로 고정시켜 가면서 아래의 SEP(p_0, α_i) 의 최적해를 구하여, 그 중에서 목적함수의 값이 최대인 해를 구하는 방법을 제안한다. SEP(p_0, α_i) 는 다음과 같이 정식화 된다.

max
$$\sum_{j \in J^*} \lfloor (p_0 + \alpha_i) a_j / \lambda \ + u_j \rfloor \bar{x}_j - p_0 \bar{y} - \lfloor \textstyle\sum_{j \in J^*} u_j + \alpha_i \rfloor$$
s.t. $u_j \ge 0, \ \ \forall j \in J^*$

물론, α_i 의 값이 변함에 따라 SEP(p_0, α_i) 의 목적함수의 값이 어떻게 변화하는 지를 이론적으로 분석하여, 좀 더 효율적인 방법으로 SEP(p_0) 를 해결할 수도 있을 것이다. 이에 대한 좀 더 심도있는 연구를 추후과제로 상정하고자 한다.

그러면, 각각의 α_i, $i = 0, \ldots, k+1$ 에 대해서 SEP(p_0, α_i) 의 최적해는 쉽게 구할 수 있는지를 살펴보자. 먼저, $\alpha_i = 0$ 이면, SEP(p_0, α_i) 는 이경식 등[7]에서 제시된 SP(p_0) 와 동일한 문제이며, 이들이 증명한 바와 같이 SEP(p_0, α_i) 는 NP-hard 이다. 또한, 이경식 등[7]은 SP(p_0) 를 해결할 수 있는 의사다항시간(pseudo-polynomial time) 해법이 존재한다는 것을 보였는데, 이 결과를 이용하면 마찬가지로, SEP(p_0, α_i) 의 최적해를 구할 수 있는 의사다항시간 해법을 고안할 수 있다. 이에 대한 부연 설명을 위해서, 어떤 $\alpha_i = \mu_i / a_i$ 에 대한 SEP(p_0, α_i) 에 대해, 각각의 $j \in J^*$ 에 대해서 $(p_0 a_j + \mu_i) a_j$ 를 λa_i 로 나눈 몫을 p'_j 라 하고 나머지를 q'_j 라 하자. 그러면, SEP(p_0, α_i) 는 다음과 같은 동등한 문제 로 변환될 수 있는데, 이에 대한 자세한 사항은 이경식[6]을 참조하기 바란다.

$$\max \quad \sum_{j \in J^*} \hat{x}_j t_j - \left\lfloor \sum_{j \in J^*} (1 - q'_j / (\lambda a_i)) t_j + \mu_i / a_i \right\rfloor + C$$
s.t. $t_j \in \{0,1\}, \ \ \forall j \in J^*$

단, $C = \sum_{j \in J^*} p'_j \hat{x}_j - p_0 \hat{y}$ 이다.

위의 SP(p_0, α_i) 는 이경식 등[7]이 제시한 SP(p_0) 와 본질적으로 동일한 문제이며, 따라서, 이들이 제시한 의사다항시간 해법의 재귀식(Recursive Equation)에 간단한 수정을 통해서 SP(p_0, α_i) 를 위한 의사다항시간 해법을 고안할 수 있고, 이 해법의 계산상 복잡도는 $O(n^2\lambda a_i)$ 임을 보일 수 있다. 여기에 대한 자세한 설명은 생략한다. 그러나, SP(p_0, α_i) 의 최적해을 구할 수 있는 해법이 존재하기는 하지만, λ 나 a_i 의 값이 비교적 작다고 하더라도 계산량이 상당히 많을 수 있기 때문에, 이 값들이 조금만 더 커지더라도 실용적으로 사용하기에는 무리가 있다. 또한, 앞서 제시한 SEP(p_0) 를 해결하기위한 방안에 이 해법을 사용한다면, 최악의 경우, 이 알고리듬을 n 번 실행해야 하므로 계산량이 매우 많아질 수 있다. 더욱이, 주어진 특정한 범위내에서 p_0 값을 변화시켜가며 SEP(p_0) 을 해결함으로써 절단평면을 생성할 경우, 전체적인 계산량이 더더욱 많아진다. 따라서, 본 연구에서는 p_0 의 값에 대한 범위가 주어진 경우, 분리 문제 SEP 의 근사해를 구하는 해법을 이용하여, 부등식 (1)의 효과를 실험하였다. 이 근사해를 구하는 해법에 대한 자세한 내용은 이경식[7]을 참고하기 바란다.

3. 절단평면 생성방안의 성능시험

본 절에서는 1 절에서 제시된 P 에 대한 절단평면 생성방안을 구현하고, 이를 (0,1)-배낭문제에 적용하여 그 효과를 시험한 결과를 제시한다. 물론, 절단평면 생성방안의 효과성을 실제적인 응용문제를 통해 검증하는 것이 마땅하지만, 이는 추후에 심도있게 이루어 질 계획이며, 여기서는 간단한 실험을 통해 일차적인 효과를 가늠해 보고자 한다. 또한, (0,1)-배낭문제에 이를 적용한 이유는, 부등식 (1)과 (0,1)-배낭문제의 유효부등식 사이에 밀접한 관련성을 목도하는 바, 이 연구결과가 (0,1)-배낭문제에도 효과적일 것이라고 판단되기 때문이다. 먼저, (0,1)-배낭 문제는 주어진 선형목적함수를 다음과 같이 정의되는 다면체 KP 상에서 최대화하는 문제로 정의될 수 있다.

$$KP = conv\{x \in B^n : \sum_{j\in N} a_j x_j \le \lambda\}$$

KP 는 앞서 정의된 P 에서 y 가 1 로 고정된 경우로 볼 수 있다. (0,1)-배낭문제에 부등식 (1)의 생성방안을 적용하기 위해서는, (0,1)-배낭문제에 대한 비정수해 $\bar{x}$ 가 주어졌을 때, $(\bar{x},1)$ 이라는 비정수해를 구성하여 부등식 (1) 의 생성방안을 적용하고, $\pi x \le \pi_0 y + \rho_0$ 라는 P에 대한 유효부등식이 생성되면 이로부터 부등식 $\pi x \le \pi_0 + \rho_0$ 이 KP에 대한 유효부등식이므로 이를 절단평면으로 (0,1)-배낭문제에 적용하면 된다. 다음에서는 부등식 (1) 의 생성방안을 (0,1)-배낭문제에 적용한 실험결과를 제시하며, 전산실험은 HP9000/715 (50MHz) 워크스테이션 상에서 수행되었다.

실험대상 (0,1)-배낭문제는 아래와 같은 방법으로 랜덤하게 생성하였다. 먼저, 변수의 개수 n 을 50 으로 고정하였다. 그 다음, a_j 와 목적함수 계수 c_j 의 값을 [1,100] 사이의 정수값으로 랜덤하게 생성하였다. 이와 같은 실험문제를 50 문제 생성하고, 우변상수의 값은, $C\times r$ 의 값으로 고정하였다. 여기서 $C=\sum_{j\in N} a_j$ 이고 r 의 값은 0.125, 0.25, 0.5, 0.75 의 네 가지 값을 이용하였다. 그리고, 2 절에서 제시된 절단평면 생성방안을 적용하기 위해서 p_0 의 값의 범위를 $[1, |J^*|-1]$ 로 지정하였다. 단, J^* 는 비정수해 $\bar{x}$ 가 주어졌을 때, $J^* = \{j \in N : \bar{x}_j > 0\}$ 로 정의된다.

아래의 [표 1] 은 요약된 실험결과를 보여

주고 있다. 이 표에서 결과값들은 50 문제에 대한 결과들의 평균값이다. Time은 절단평면 생성과 선형계획완화문제의 해결에 소요된 시간을 초 단위로 나타낸 값이고, Gapf는 다음과 같이 정의된다. 단, IP는 주어진 문제의 최적목적함수값이고, Z^* 는 절단평면을 반복적으로 추가하여 얻어진 선형계획완화문제의 최적목적함수 값이다. IP 와 Z^*를 구하는 보다 상세한 내용에 대해서는 이경식[6]을 참조하기 바란다.

$$\text{Gapf} = \frac{Z^* - \text{IP}}{\text{IP}} \times 100(\%)$$

본 실험에서는 또한, 제안된 절단평면 생성방안의 효과에 대한 비교를 위해서, 기존에 cover 부등식을 생성하는 모듈을 내장하고 있는 소프트웨어 MINTO 를 이용하여, 위의 Gapf를 측정하여, 그 결과를 비교하였다.

[표 1] 실험 결과

r	제안된 방법			MINTO		
	#cut	Gapf	Time	#cov	Gapf	Time
0.125	9.0	0.13	0.24	3.0	0.58	0.53
0.25	11.1	0.12	0.41	2.48	0.38	0.51
0.5	10.6	0.09	0.59	2.72	0.23	0.52
0.75	9.3	0.05	0.73	2.9	0.16	0.53

위의 표에서 #cut 은 본 연구에서 제안된 절단평면 생성방안에 의해 생성된 부등식의 개수를 나타내고, #cov 는 MINTO 가 생성한 lifted cover 부등식 [5] 의 개수를 나타낸다. 위 결과를 보면, 제한된 실험이지만, 본 연구에서 제안된 절단평면 생성방안이 효과적이라는 것을 알 수 있다. 물론, 실제적인 효과를 입증하기 위해서는 심도있는 실험이 필요할 것으로 판단된다.

4. 추후 연구 과제

앞서 밝힌 바와 같이 부등식 (1) 에 대한 분리문제를 해결할 수 있는 의사다항시간 해법은 존재한다. 그러나, 여기에 소요되는 계산시간이 과다하므로, 보다 효율적인 근사해법이 필요하다. 또한, 제시된 절단평면 생성방안에 의해 얻어지는 부등식에 대한 이론적인 효과에 대한 분석이 필요하다. 마지막으로, 제시된 절단평면 생성방안이 (0,1)-배낭문제에 효과적으로 적용될 수 있는 바, 이 결과에 근거하여 (0,1)-배낭문제에 대한 새로운 형태의 절단평면 생성방안을 제시하는 것도 의미가 있을 것으로 판단된다.

참고 문헌

[1] Balas, E., “Facets of Knapsack Polytope”, *Mathematical Programming*, Vol.8 (1979), 146-164.
[2] Daskin, M.S., *Network and Discrete Location : Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, New York, 1995.
[3] Glover, F., H.D. Sherali and Y. Lee “Generating Cuts from Surrogate Constraint Analysis for Zero-One and Multiple Choice Programming”, *Computational Optimization and Applications*, Vol.8 (1997), 151-172.
[4] Lee, K., “Routing and Capacity Assignment Models and Algorithms for the Design of Telecommunication Networks”, Ph.D Thesis, Department of Industrial Engineering, KAIST, Taejon, Korea, 1998.
[5] Nemhauser, G.L. and L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.
[6] 이경식, “유한정수변수를 포함한 가변용량 (0,1)-배낭문제에 대한 절단평면 생성방안 연구”, 연구보고서 (2003), 한국외국어대학교 산업정보시스템공학부.
[7] 이경식, 박성수, “용량이 변화하는 (0,1)-

배낭문제에 대한 절단평면 생성방안",
한국경영과학회지 제 25 권 제 3 호(2000), 1-15.