한국해안·해양공학회 학술발표논문집 (2004)
2004년 8월 19일-21일
제15권, pp. 341-349

불규칙 경계에 의한 파의 증폭
Amplification of Waves due to Irregular Boundaries

윤성범[1], 고광오[2], 이종인[3]
Yoon Sung Bum[1], Ko Kwang Oh[2] and Lee Jong In[3]

1. 서 론

파랑의 거동을 예측하기 위해 수치해석에 의한 모형실험을 실시하는 경우, 사각형 격자를 이용한 유한차분법(finite difference method)이 폭넓게 쓰이는 실정이다.

실제 불규칙한 해안선을 사각형 격자를 사용하면 수치해석시 불규칙한 경계는 축에 평행한 일련의 선분(line segment)들로 근사화되어 사용되고, 격자증분에 의한 이산화오차(discretization error)는 일반적으로 1계 오차(first-order error)가 되며 수치오차의 큰 비중을 차지하게 된다. 사각형 격자를 사용한 유한차분법을 사용시 불규칙 경계에서 발생하는 파의 수치적 증폭현상은 해안 구조물 설계를 위한 설계파의 산정이나 항내 정온도 해석에 있어 실제와 다른 파랑의 거동을 유발시킬 수 있다.

불규칙경계의 영향에 관한 연구는 Weary(1974)가 축에 45°로 놓인 수로에 대해 ADI 유한차분모형을 적용하였고, Mork(1983)는 양해법의 전후방차분법(explicit FB scheme)과 ADI법을 사용하여 같은 수로에서 유한한 길이의 단순파의 전파를 연구하였다. 두 방법에 있어서 수로의 폭이 좁은 경우 파의 전파속도가 수로경계의 요철현상에 의해 수치적으로 상당히 감소된다는 것이 밝혀졌다. 그리고, Pederson(1986)은 45°로 놓인 무한히 넓은 수로에서 불규칙 벽면에 의한 파의 수치증폭(numerical amplification)이 발생함을 보였다.

불규칙 경계에서의 파의 수치적 증폭 현상을 파악하기 위해 격자방향과 45°로 놓인 톱날형상경계(saw-tooth boundary)에서의 파의 위상변화에 의한 수치적 증폭현상을 연구하여 유한차분모형에서 해의 정확성을 유지하기 위한 공간 격자증분의 허용범위를 제시하였다. 본 연구에서는 수치해석시 경계이산화에 의해 발생하는 수치오차를 분석하기 위해 천수, 굴절, 회절 및 반사가 고려된 쌍곡형 파동방정식의 유한차분모형을 이용하였다.

불규칙 경계에서의 파의 증폭현상은 격자방향에 45°로 놓여진 단일톱날형상경계(single saw-tooth boundary)에서 파의 증폭현상에 대한 수치해석을 실시하여 파악하고, 매끈한벽면(smooth boundary) 즉, 벽면이 격자방향과 일치하는 경우에 대한 수치해석 결과와 비교하여 불규칙경계의 영향이 사라지는 격자크기와 파장의 비를 구한다. 이 과정에서 입사각이 45°이하일 때 발생하는 stem wave의 영향이 고려되며, 수치오차를 허용치 이하로 줄이기 위한 격자크기와 파장의 비를 도출한다.

2. 지배방정식

2.1 쌍곡형 파동방정식

파의 굴절, 회절, 반사등을 고려할 수 있는 선형파동방정식으로는 다음과 같은 완경사방정식(Berkhoff, 1972)을 들 수 있다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \zeta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \zeta = 0 \qquad (1)$$

1 한양대학교 토목환경공학과 교수
2 현대건설 기술개발원(설계) 과장
3 한국건설기술연구원 수자원연구부 선임연구원

여기서, ζ는 수면변위량, C는 파의 전파속도, C_g는 군파속도, ω는 각진동수를 나타낸다.

식 (1)은 타원형이므로 대상해역이 넓거나 입사파의 파장이 짧으면 방대한 행렬식을 풀어야 하는 어려움이 있다. 이를 수치계산이 비교적 용이한 형태로 변형하기 위해 파에 의한 수면변위를 시간에 대한 주기함수라 가정하여 다음과 같이 나타낸다..

$$\zeta(x, y, t) = \eta(x, y)\, e^{-i\omega t} \tag{2}$$

여기서, η는 초기 $t = 0$에서의 수면변위를 말한다.

시간에 대해 2차미분을 취하면,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta e^{-i\omega t} \tag{3}$$

식 (1)에 식 (2)와 식 (3)을 대입하면 다음과 같은 시간의존형 완경사방정식을 얻는다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \zeta) - \frac{C_g}{C} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

식 (4)는 다음과 같은 천수방정식 형태로 분리할 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{C}{C_g}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

여기서, $P = uh$, $Q = vh$ 인 x와 y방향으로의 선유량성분을 말하며, u와 v는 x, y방향으로의 유속이다. 이 식은 쌍곡형이므로 수치해석시 양해법의 사용이 가능하여 방대한 행렬식을 풀지 않고도 쉽게 해를 구할 수 있다(윤 등, 1996).

2.2 수치적 분산관계

시간 및 공간교호격자로 계산영역을 나누고, 계산을 용이하게 하기 위해 격자간격을 등간격(즉 $\triangle x = \triangle y$)으로 한 다음 유한차분법중 양해법인 Leap-frog법을 이용하여 식 (5)~(7)을 차분화하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\zeta^{n+1}_{i,j} - \zeta^{n}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j} - v^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta x} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^{n}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\zeta^{n}_{i+1,j} - \zeta^{n}_{i,j}}{\Delta x} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{v^{n+1}_{i,j} - v^{n}_{i,j}}{\Delta t} + \frac{\zeta^{n}_{i,j+1} - \zeta^{n}_{i,j}}{\Delta x} = 0 \tag{10}$$

해석적인 경우에 있어서 속도항의 제거는 자유수면변위에 대한 2계방정식을 준다.

$$\frac{1}{\Delta t^2}(\zeta^{n+1}_{i,j} - 2\zeta^{n}_{i,j} + \zeta^{n-1}_{i,j}) = \frac{1}{\Delta x^2}(\zeta^{n}_{i+1,j} - 2\zeta^{n}_{i,j} + \zeta^{n}_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta x^2}(\zeta^{n}_{i,j+1} - 2\zeta^{n}_{i,j} + \zeta^{n}_{i,j-1}) \tag{11}$$

일정수심상의 x 축과 $\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$ 의 각도로 진행하는 진폭 a의 균일파에 대해 x방향으로 s번째, y방향으로 p번째 격자점에서 n시간 단계의 수면변위 ζ는 $\zeta = ae^{i(\alpha s\Delta x + \beta p\Delta x - \omega n\Delta t)}$로 표현된다. 이를 식 (11)에 대입하면 다음과 같은 분산 방정식을 얻는다.

$$\bar{\omega}^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 \tag{12}$$

$\bar{\omega} = \frac{2}{\Delta t}\sin\frac{\omega\Delta t}{2}$, $\bar{\alpha} = \frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\alpha\Delta x}{2}$,

$\bar{\beta} = \frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\beta\Delta x}{2}$ 이며, 식 (12)에서

$\Delta t < 2^{-1/2}\Delta x$이고 α와 β가 실수이면 ω는 항상 실수이다. $\alpha\Delta x$, $\beta\Delta x$, $\omega\Delta t$의 항으로 식 (12)를 테일러 급수전개(Taylor series expansion)하면 다음 관계가 얻어진다.

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{12}\Delta t^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{1}{12}\Delta x^2(\alpha^4 + \beta^4) + \cdots \tag{13}$$

만약 $\alpha = \sigma - i\gamma$, $\beta = \sigma + i\gamma$ 인 공액복소수라면 수치분산관계는 다음과 같다.

$$\bar{\omega}^2 = 2\bar{\sigma}^2 + 2(1 - \frac{1}{2}\Delta x^2\bar{\sigma}^2)(\overline{i\gamma})^2 \tag{14}$$

$\bar{\sigma} = (2/\Delta x)\sin(\sigma\Delta x/2)$ 와

$(\overline{i\gamma}) = i(2/\Delta x)\sinh(\gamma\Delta x/2)$임을 알고, 식 (14)를 테일러 급수전개하면 다음과 같은 수치분산관계를 얻는다.

$$\omega^2 = 2\sigma^2 - 2\gamma^2 + \frac{1}{3}\Delta t^2(\sigma^2 - \gamma^2)^2 - \frac{1}{6}\Delta x^2(\sigma^4 + \gamma^4) + \sigma^2\gamma^2\Delta x^2 + \cdots \tag{15}$$

2.3 단일톱날형상경계에서의 주기파의 반사

그림 1에 보인 바와 같이 유체가 경계의 왼쪽을 흐르는 45°로 놓여진 단일톱날형상경계(single saw-tooth boundary)에서의 불투수 조건은 다음과 같다.

$$u_{i+1,j} = 0 , \qquad v_{i,j} = 0 \tag{16}$$

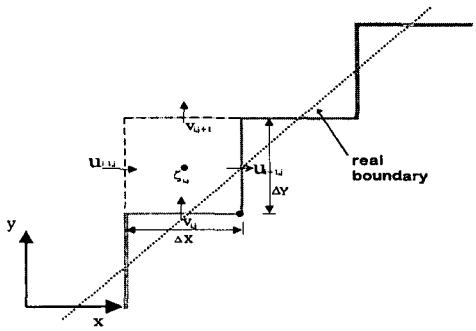

Fig. 1 불규칙 경계의 경계 조건

식 (16)의 경계조건을 식 (8)에 대입하여 경계에서의 연속방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n}\right) = -\frac{1}{\Delta x}\left(-u_{i,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}\right) \tag{17}$$

식 (17)에서 유속을 제거하면 수면변위만의 항으로만 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(\zeta_{i,j}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i,j}^{n-1}\right) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\zeta_{i-1,j}^{n} - 2\zeta_{i,j}^{n} + \zeta_{i,j+1}^{n}\right) \tag{18}$$

여기에 그림 2에서와 같이 실제 경계위치에서의 연속방정식을 구하기위해 미분 가능한 함수 ζ, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$를 사용해서 테일러 급수전개하면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x}\left(\tilde{u} - \tilde{v}\right) + \frac{1}{4}\left(-3\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 3\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) + O(\Delta x, \Delta t) \tag{19}$$

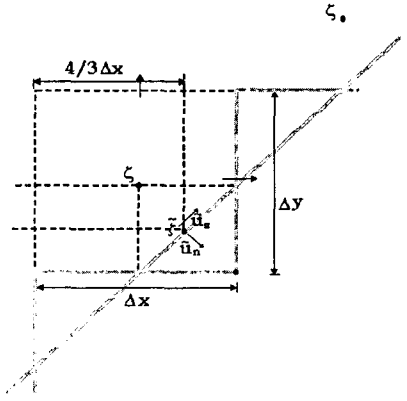

Fig. 2 실제 경계의 경계조건

실제경계에서의 수면변위와 유속인 ζ, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$가 연속방정식을 만족하면, 식 (19)는 다음과 같이 간단해진다.

$$\tilde{u}_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial s}\Delta x + O(\Delta x^2, \Delta x \Delta t) \tag{20}$$

여기서, $u_n = \sqrt{1/2}(v - u)$, $u_s = \sqrt{1/2}(u + v)$이며, 자유수면변위의 항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2}\Delta x + O(\Delta x^2, \Delta x \Delta t) \tag{21}$$

여기서, $(\partial/\partial n) = \sqrt{1/2}(\partial/\partial y - \partial/\partial x)$,
$(\partial/\partial s) = \sqrt{1/2}(\partial/\partial y + \partial/\partial x)$이다.

실제경계에서 $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$, $\tilde{u}_n$ 값은 0(zero)이므로 이들 값은 수치해석시에 발생하는 오차이며, 식 (20)과 식 (21)은 톱날형상경계에서의 계산치들이 Δx의 1차 오차임을 나타낸다.

경계에 포획된 파(trapped wave)는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\zeta_{s,p}^{n} = A e^{i(\alpha(s - s_0)\Delta x + \alpha^* p \Delta x - \omega n \Delta t)} \tag{22}$$

여기서 $\alpha = \sigma - i\gamma$ ($\gamma > 0$) 이고, σ, γ, ω는 식 (14)의 수치분산관계를 만족해야만 한다. $\alpha = \sigma - i\gamma$를 식 (22)에 대입하면 포획파는 다음과 같은 형태가 된다.

$$\zeta_{s,p}^{n} = A e^{-\gamma((s - s_0) - p)\Delta x} e^{i[(\sigma(s - s_0) + p)\Delta x - \omega n \Delta t]} \tag{23}$$

식 (23)의 지수항에서 허수부분은 파의 방향성 및 주기성을 나타내고, 실수부분은 파의 증폭을 나타낸다. 포획파는 경계에서 멀어질수록 파의 진폭이 지수함수적으로 감소함을 나타낸다.

이 경우 식 (18)에 식 (22)를 대입하고 A≠ 0을 이용하면, 다음과 같은 관계를 준다.

$$0 = \bar{\omega}^2 + \frac{2}{\Delta x^2}\left(e^{-\gamma \Delta x}\cos(\sigma \Delta x) - 1\right) \tag{24}$$

식 (24)를 테일러 급수전개하면 다음과 같다.

$$\gamma = \frac{1}{2}\omega^2 \Delta x + O(\Delta x^2) = \sigma^2 \Delta x + O(\Delta x^2) \tag{25}$$

경계에서의 파의 증폭을 나타내는 γ가 Δx의 정도를 가지므로 경계의 이산화오차에 비례함을 알 수 있고, 장파에서는 $\alpha \Delta x \ll 1$이므로 경계에 수직방향으로의 지수 함수적 감소는 느리다.

이 γ값으로부터 포획파 영향범위(e-folding distance)를 얻을 수 있는데, 이는 톱날형상경계의 영향권 범위를 나타낸다.

$$E = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 \Delta x} + O(1) \tag{26}$$

3. 수치기법

3.1 차분방정식

천수방정식 형태의 쌍곡형 파동방정식은 양해법의 사용이 가능하므로 Leap-frog법을 사용하여 해석을 실시하였으며, 안정적인 해를 얻기 위해서는 Courant 안정조건을 만족하게 격자증분을 설정하였다. 격자는 시간 및 공간 교호격자망(staggered mesh)을 사용하여 구성하였다.

Leap-frog법을 사용하여 유한차분화한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \left(\frac{C}{C_g}\right)_{i,j}\left(\frac{P_{i,j}^{n+1}-P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}+\frac{Q_{i,j}^{n+1}-Q_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)=0 \tag{26}$$

$$\frac{P_{i,j}^{n+1}-P_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(CC_{gi+1,j}+CC_{gi,j}) \times \frac{\zeta_{i+1,j}^{n}-\zeta_{i,j}^{n}}{\Delta x}=0 \tag{27}$$

$$\frac{Q_{i,j}^{n+1}-Q_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(CC_{gi,j+1}+CC_{gi,j}) \times \frac{\zeta_{i,j+1}^{n}-\zeta_{i,j}^{n}}{\Delta x}=0 \tag{28}$$

계산과정은 주어진 초기조건 $\zeta_{i,j}^{n}$, $P_{i,j}^{n}$, $Q_{i,j}^{n}$으로부터 운동방정식 (27)과 (28)을 이용하여 $P_{i,j}^{n+1}$, $Q_{i,j}^{n+1}$을 구하고, 연속방정식 (26)에서 $\zeta_{i,j}^{n}$, $P_{i,j}^{n+1}$, $Q_{i,j}^{n+1}$을 이용하여 $\zeta_{i,j}^{n+1}$을 구한다.

Leap-frog법은 안정적인 해를 구하기 위해 다음의 Courant 안정조건을 만족해야 한다.

$$C_r = \sqrt{2}\frac{C\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{29}$$

여기서, C_r은 Courant수이다.

3.2 경계조건

경계조건은 육지나 구조물에 연한 경계에서 선유량 P 또는 Q를 0으로 놓고, 개방경계에서는 영역내부로의 입사파와 영역내부에서 외해쪽으로 반사되는 반사파를 동시에 처리하기 위해 Larsen & Dancy(1983)의 영역내조파(internal wave generation) 기법과 흡수층(sponge layer)이론을 도입하였다.

영역내 조파기법은 영역내부에서 직선을 따라 수면을 교란하여 파를 발생시키는 방법으로 조파선의 각 격자점에 더해지는 수면표고는 다음과 같다.

$$\zeta^{*} = 2\zeta^{I}C\Delta t\frac{\Delta s}{\Delta x\Delta y}\sin\theta \tag{30}$$

여기서, $\theta = \alpha + \pi/2$ 이고, α는 입사각이다.

x와 y방향으로 같은 크기의 격자를 사용하고, 조파선의 위치가 격자선에 일치하면 $\Delta s = \Delta x = \Delta y$이므로 식 (30)은 다음과 같이 간단해진다.

$$\zeta^{*} = 2\zeta^{I}C\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\theta \tag{31}$$

이 기법은 조파선을 통과하는 다른 파에는 전혀 영향을 미치지 않으며, 영역의 외해쪽 개방경계에 흡수층을 설치하면 영역내 조파에 의한 영상파와 구조물에 반사되는 외해로 전파되는 반사파를 효율적으로 소멸시켜 영역내부로의 재반사를 방지하므로 매우 우수한 방법이다.

흡수층(sponge layer)은 흡수층내부로 들어온 파를 일정한 흡수율에 따라 소모시킴으로서 외해경계를 따라 설치하면 영역내부에서 발생한 영역내 조파에 의한 영상파와 입사파가 구조물에 반사되어 발생한 반사파를 외해 밖으로 흘러보내는 효과를 주는 방법이다. 파 에너지의 소모과정은 매 시간단계에서 구해진 ζ, P, Q에 다음식으로 정해지는 일정한 소모율 μ를 곱해줌으로써 이루어진다.

$$\mu(\bar{x}) = \exp[-(2^{-\bar{x}/\Delta x}-2^{-x_s/\Delta x})\ln a], \quad 0\le\bar{x}\le x_s$$
$$\mu(\bar{x}) = 1, \quad \bar{x} > x_s \tag{32}$$

여기서, x_s는 흡수층의 두께, $\bar{x}$는 흡수층 내부점의 위치, Δx는 격자간격, a는 흡수층에서 격자점번호 $x_s/\Delta x$에 의존하는 상수로서 $x_s/\Delta x$가 10이면 $a = 5$, $x_s/\Delta x$가 5이면 $a = 2$이다. 시험적인 적용결과에 의하면 Leap-frog법을 적용할 경우, Δt가 매우 작아지면 회절에 의한 반사파가 발생하므로 μ대신 μ^{C_r}을 곱해주면 반사파를 최소화 할 수 있었다.

4. 해석결과의 고찰

4.1 stem wave의 영향

그림 7에 나타난 것처럼 입사파가 측벽에 의해 반사가 일어날 때 입사각이 45°보다 작으면 측벽과 파의 상호작용에 의해 stem wave가 발생한다.

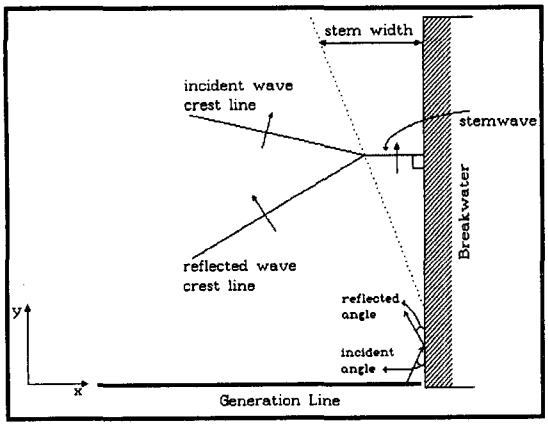

Fig. 7 stem wave의 발생

천해에서 직선방파제에 입사파가 경사지게 입사되는 경우에는 입사각에 따라 다음 세가지 유형의 파형이 생성된다(Yue & Mei, 1980).

첫째, 입사각이 45°보다 큰 경우는 stem wave는 발생하지 않고, 입사파와 반사파의 파봉이 벽에서 똑같은 각도로 교차되는 영상반사(specular reflection)가 일어난다.

둘째, 입사각이 20°보다 크고 45°보다 작은 경우는 입사파 및 반사파와 더불어 벽의 수직방향으로 교차하는 stem wave가 존재하게 된다. 이 경우는 벽에서 어느 정도 떨어진 점에서 입사파봉, 반사파봉 및 stem 파봉이 서로 교차하게 된다.

셋째, 입사각이 20°보다 작은 경우는 반사파의 영향은 거의 사라지고, 입사파봉과 stem 파봉만이 남게된다.

입사각에 따라 발생한 stem wave 효과는 그림 8 (b)에 잘 나타나있다. 45°이하의 입사각에서는 톱날형상경계에서는 포획파 효과와 stem wave의 효과가 동시에 일어나므로 이에 대한 고려가 수반되어야만 한다. 그림 8과 그림 9는 각각 입사각이 0°와 10°때의 매끈한 경계와 톱날형상 경계에서의 자유수면형상이다.

4.2 단일 톱날형상경계의 영향

모든 수치해석은 해의 안정성을 위해 Courant number를 0.7로 고정시켰고, saw-tooth bcundary의 영향을 파악하기 위해서 입사각과 격자크기에 따라 수치실험을 수행하였는데 입사각은 0°, 10°, 20°일 때에 대하여 수행하고 입사각에 따라 파장을 10, 20, 40개의 Δx로 나누어 자유수면의 변화를 조사하고 매끈한 경계의 결과와 비교했다.

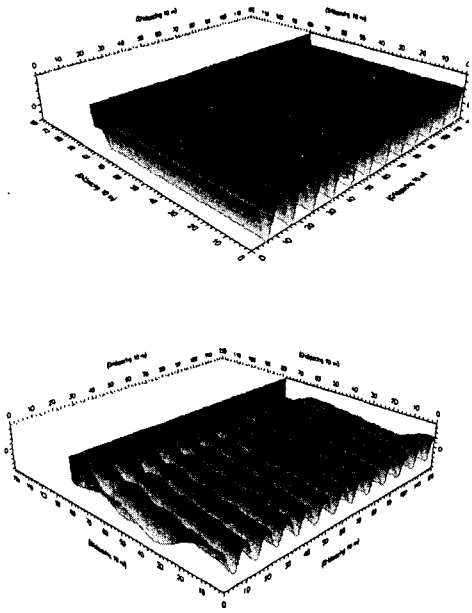

Fig. 8 매끈한 경계에서의 자유수면형상
((a) α= 0°, (b) α= 10°)

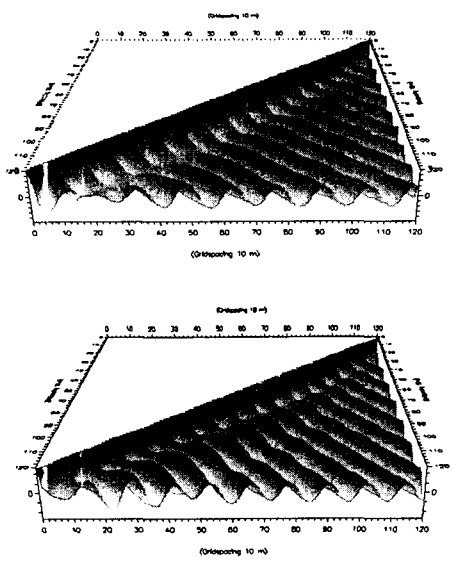

Fig. 9 톱날형상 경계에서의 자유수면형상
((a) α= 0°, (b) α= 10°)

4.2.1 경계의 영향과 파장과의 관계

선형지배방정식을 사용하여 수행한 수치실험에서 전파된 파의 톱날형상경계에 의한 영향은 파장의 크기와는 관계가 없음을 나타내었다. 파장별로 격자크기및 입사각에 대한 결과는 Fig. 10과 Fig. 11에 나타나있다. Fig. 10은 벽을 따른 파고비이고, Fig. 11은 벽에 수직한 방향으로의 파고비이다. 그림에서 볼 수 있듯이 벽을 따른 파고비의 경우 주어진 격자크기에 대해 입사각별로 세 개의 파장이 완전히 일치함을 보인다.

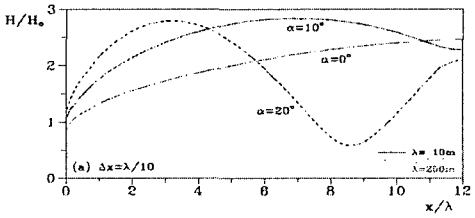

Fig. 10 경계와 파장과의 관계
(tangential direction)

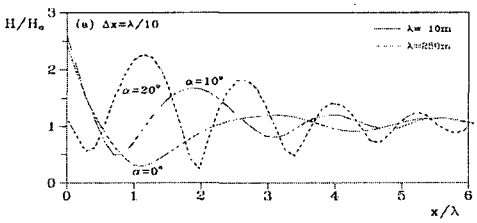

Fig. 11 경계와 파장과의 관계
(normal direction)

4.2.2 경계의 영향과 격자크기와의 관계

Fig. 12는 각 입사각별로 주어진 격자크기에서 단일 톱날형상 경계를 따른 파고비의 변화를 보인다. 입사각이 0°인 경우 파는 벽면에 평행하게 진행하므로 실제에 있어서는 파고비가 1로 일정하게 나타나야 하나, 톱날형상벽면인 경우 격자크기 Δx에 따라 벽면을 따른 수치증폭현상이 나타남을 알 수 있으며, Δx가 작아질수록 이 현상이 감소되어 실제에 근접해감을 알 수 있다. 이 비교실험에서 한 파장을 40개 이상의 격자를 나누면 격자크기의 영향이 거의 나타나지 않음을 확인할 수 있었다. 불규칙 경계에서의 파의 증폭을 나타내는 식 (25)의 γ에서 알 수 있듯이 γ의 크기는 Δx의 크기에 밀접한 관계를 나타내므로, 매끈한 경계와 톱날형상 경계사이의 수치증폭오차는 격자크기가 작아지면 거의 사라짐을 알 수 있다. stem wave가 발생하는 10°와 20°의 경우에도 파장을 40개 이상으로 나눈 경우에는 직선벽에서 stem wave가 발생하는 경우와 같은 경향을 보인다.

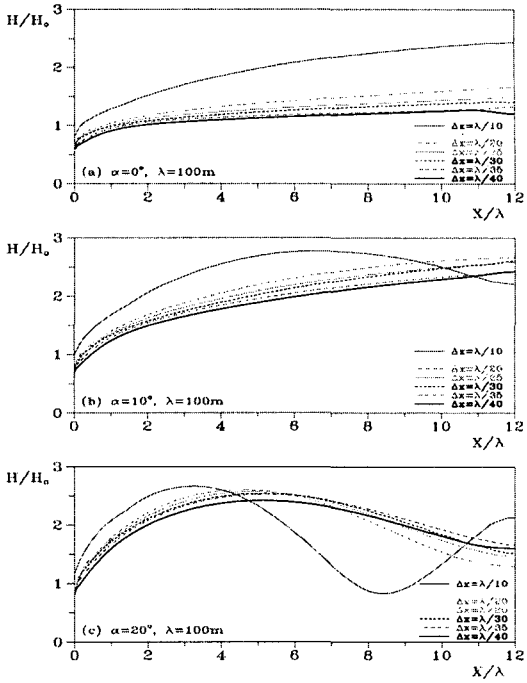

Fig. 12 입사각이 0°,10°,20°일 때 단일 톱날경계를 따른 파고비

4.2.3 톱날형상 경계와 매끈한 경계에서의 파고비 비교

Fig. 13, 14, 15은 입사각이 0°, 10°, 20°일 때 벽을 따른 톱날형상 경계와 매끈한 경계에서 파고비를 비교한 것이다. 격자크기가 작아짐에 따라 두 경계의 진폭차는 작아져가고, 격자크기가 파장을 40이상으로 나눈 크기일 경우는 만족할 만한 결과를 준다. 격자크기가 커질수록 파의 변화주기가 짧아지고 작아질수록 늘어남을 보인다.

Fig. 16, 17, 18는 벽에 수직한 방향으로의 두 경계의 파고비의 비교이다. 격자크기가 작아짐에 따라 매끈한 경계에서의 결과와 비슷해져가고, 입사각이 20°인 경우에 격자크기가 $\lambda/20$보다 작을 때 매우 만족할 만한 결과를 준다.

식 (20)과 식 (21)에서 알 수 있듯이 실제경계에서 직각방향으로의 유속과 수면경사는 0이어야 하나, 수치오차에 의해 $\overline{u}_n$과 $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$는 0이 되지 못하고 격자크기 Δx의 크기에 따라 증폭하게 된다. 이 영향은 포획파에서 증폭을 나타내는 γ에서도

설명될 수 있는데, γ또한 Δx가 줄어듦에 따라 크기가 줄어들고 경계에서 수직방향(normal direction)으로 멀어질수록 γ의 크기가 줄어듦을 알 수 있는데 이 사실은 수치결과와 매우 잘 일치함을 보인다.

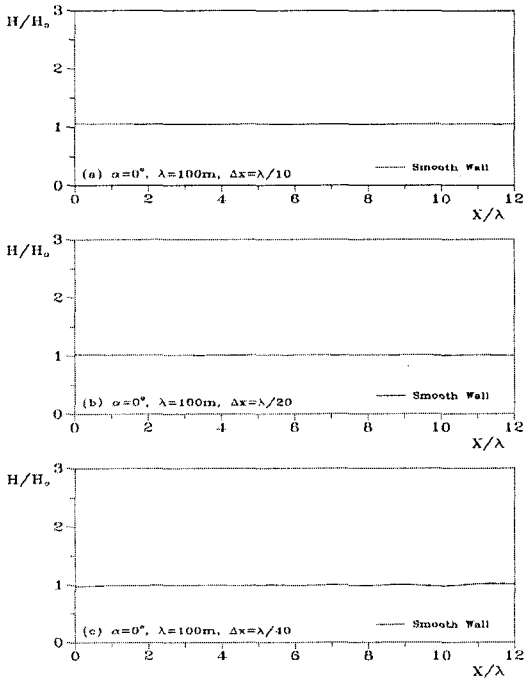

Fig. 13 톱날형상 경계와 매끈한 경계에서의 벽면을 따른 파고비 변화(입사각이 0°일 때, X : 벽면을 따른 거리)

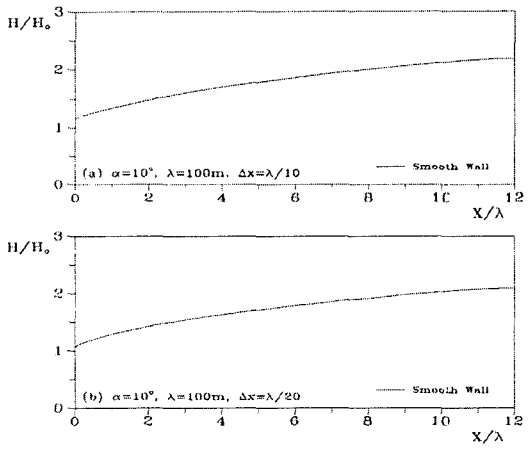

Fig. 14 톱날형상 경계와 매끈한 경계에서의 벽면을 따른 파고비 변화(입사각이 10°일 때, X : 벽면을 따른 거리)

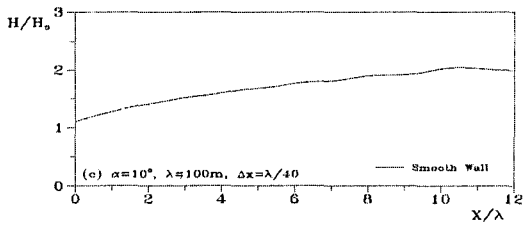

Fig. 14 계속

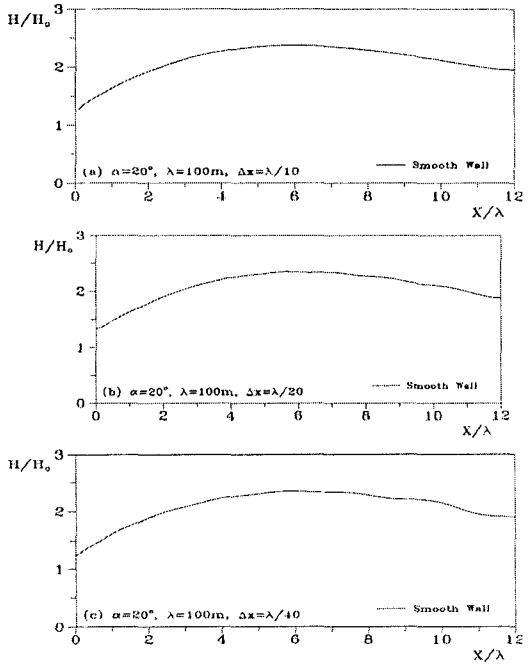

Fig. 15 톱날형상 경계와 매끈한 경계에서의 벽면을 따른 파고비 변화(입사각이 20°일 때, X 벽면을 따른 거리)

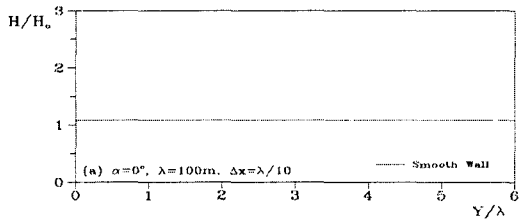

Fig. 16 톱날형상 경계와 매끈한 경계에 벽면의 직각방향의 파고비 변화 (입사각이 0°일 때, X=10λ일 때, Y=벽면의 직각방향으로의 거리)

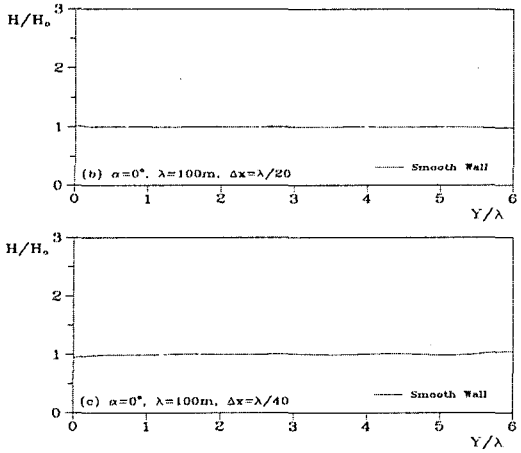

Fig. 16 계속

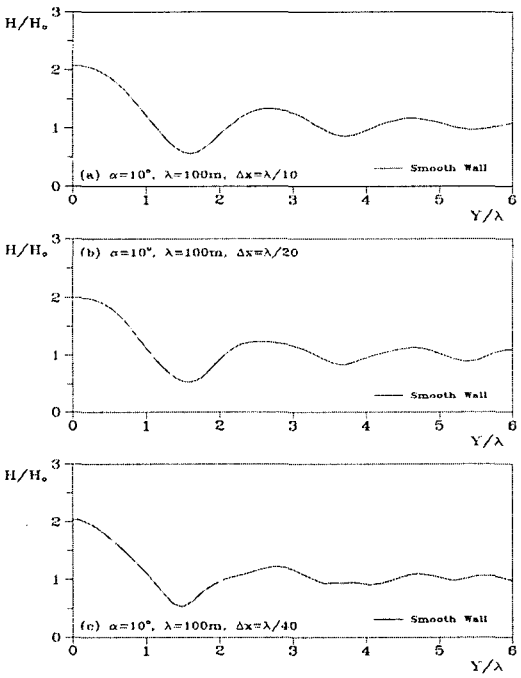

Fig. 17 톱날형상 경계와 매끈한 경계에 벽면의 직각방향의 파고비 변화 (입사각이 10°일 때, X=10λ일 때, Y=벽면의 직각방향으로의 거리)

4.2.4 경계의 영향이 사라지는 격자크기의 파장비

그림 19, 20은 각각 입사각이 0°, 10°인 경우에 톱날형상경계에서의 파고를 매끈한 경계에서의 파고로 무차원화시킨 결과를 나타낸 것이다.

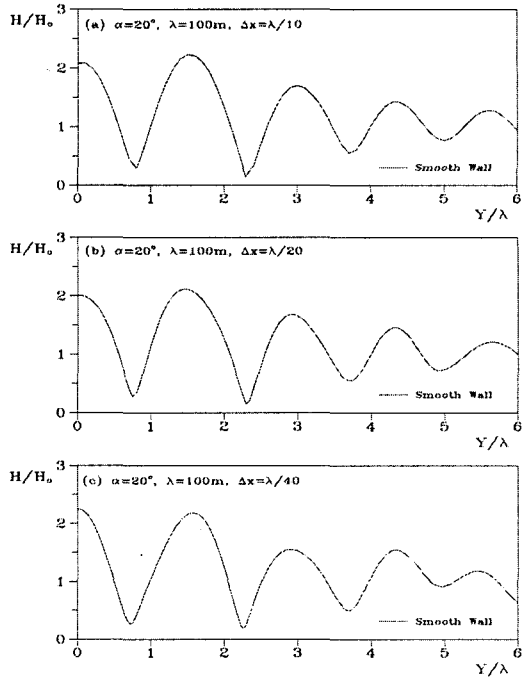

Fig. 18 톱날형상 경계와 매끈한 경계에 벽면의 직각방향의 파고비 변화 (입사각이 20°일 때, X=10λ일 때, Y=벽면의 직각방향으로의 거리)

입사각이 0°인 경우 Δx의 크기가 $\lambda/40$ 이하이면 만족할만한 결과를 준다. 입사각이 10°인 경우도 Δx의 크기가 $\lambda/40$ 이하이면 만족할만한 결과를 준다.

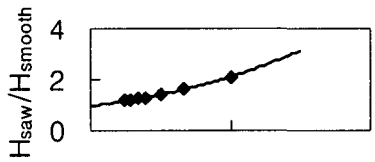

Fig. 19 경계의 영향이 사라지는 격자크기(α=0°)

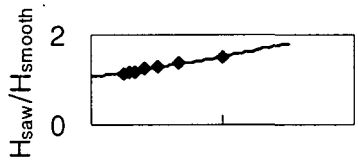

Fig. 20 경계의 영향이 사라지는격자크기(α=10°)

5. 결 론

불규칙경계에서의 파의 증폭현상을 연구하기 위해 45°로 놓인 톱날형상 경계에서의 파의 전파에 대해 쌍곡형 파동방정식을 지배방정식으로 하여 유한차분해석이 수행되었다. 해석의 용이함을 위해 비선형, 바닥마찰, 쇄파 등의 영향을 제거하고, 일정한 수심을 가정하여 경계에서의 영향을 파악하였으며, 수치해의 안정을 위해 시간증분을 제한하고 영역내 조파와 흡수층 설치로 파의 영역내 재반사를 막았다. 단일 톱날형상 경계와 매끈한 경계에서의 접선방향과 수직방향으로의 파고를 계산하여 서로 비교하였고, stem wave의 효과를 고려하여 계산을 수행하였다.

톱날형상 경계에서 파의 증폭은 경계의 이산화 오차와 같은 1계 이산화오차를 유발하며 이런 오차는 상당한 왜곡(distortion)을 유발하거나 경계의 반사속성의 질적 변화를 야기한다. 단일 톱날형상 경계의 영향은 파장의 크기와는 관계가 없으며, 격자와 파장의 비에 밀접한 관련이 있다. 또한 톱날형상 경계는 매끈한 경계와의 파고비를 비교해 볼 때 매끈한 경계에 입사각이 증가된 경우와 유사한 경향을 나타내었으며, 입사각별로 두 경계의 파고비 비교시 격자의 크기가 파장을 40개 이상으로 나눈 경우에는 대체적으로 만족할만한 결과를 나타내었다.

참고문헌

과학기술처(1991). "항만정온도 유지대책 수립에 관한 연구(Ⅰ)." BSPG 00135-373-2.

윤성범, 이종인, 이정규, 채장원(1996). "항내 수면교란 수치예측모형의 경계처리기법." 대한토목학회논문집, 제 16권, 제Ⅱ-1호, pp.53-62

Berkhoff, J.C.W., Booji, N.&Radder, A.C.(1972). "Computation of combined refraction-diffraction." Proc. of the 13th Coastal Engrg. Conf., ASCE, New York, pp.471-490

Copeland, G.J.M. (1985a). "A practical alternative to the mild-slope wave equation." Coastal Engrg., 9, pp. 125-149

Copeland, G.J.M. (1985b). "Numerical model for the propagation of short gravity waves and the resulting circulation around nearshore structures." PhD dissertation, Univ. of Liverpool.

Larsen, J. & Dancy, H.(1983) "Open boundaries in short wave simulations - a new approach." Coastal Eng., vol.7, pp. 285-297

Mei, C. Chiang(1983) "The applied dynamics of ocean surface waves", John Wiley & Sons, pp.650-657

Mork, G.(1983) "The effects of lateral saw-tooth boundaries on the numerical phase velocity." Norwegian Hydrodynamic Laboratories, Internal Report, project no. 609274

Pederson, G.(1986) 'On the effects of irregular boundaries in Finite Difference Models', Int. j. *numer. methods in fluids*, vol.6, pp.496-505

Yoon, S. B. & Liu, P. L.-F.(1989) 'Stem Waves along Breakwater', Journal of Waterway Port *Coastal and Ocean* Eng. vol.115, No.5, pp.635-648