

## 불규칙 수로 경계에 의한 전파속도의 감소 Phase Lag of Celerity due to Irregular Channel Boundaries

윤성범<sup>1</sup>, 고광오<sup>2</sup>, 이종인<sup>3</sup>  
Yoon Sung Bum<sup>1</sup>, Ko Kwang Oh<sup>2</sup>, and Lee Jong In<sup>3</sup>

### 1. 서 론

유한 차분법에 의한 수치해석시 사각형 격자를 사용하면 불규칙한 경계는 축에 평행한 일련의 선분(line segment)들로 근사화되어 사용되고, 격자증분에 의한 이산화오차(discretization error)는 일반적으로 1계 오차(first-order error)가 되며 수치오차의 큰 비중을 차지하게 된다.

불규칙경계의 영향에 관한 연구는 Weary(1974)가 축에 45°로 놓인 수로에 대해 ADI 유한차분모형을 적용하였고, Mork(1983)는 양해법의 전후방차분법(explicit FB scheme)과 ADI법을 사용하여 같은 수로에서 유한한 길이의 단순파의 전파를 연구하였다. 두 방법에 있어서 수로의 폭이 좁은 경우 파의 전파속도가 수로경계의 요철현상에 의해 수치적으로 상당히 감소된다는 것이 밝혀졌다. 그리고, Pederson(1986)은 45°로 놓인 무한히 넓은 수로에서 불규칙 벽면에 의한 파의 수치증폭(numerical amplification)이 발생함을 보였다.

두개의 톱날형상경계면들로 이루어진 격자방향에 45°로 놓인 수로(saw-tooth shaped channel)에서의 전파속도 감소를 연구하여 유한차분모형에서 해의 정확성을 유지하기 위한 시간 및 공간 격자증분의 허용범위를 제시하였다. 본 연구에서는 수치해석시 경계이산화에 의해 발생하는 수치오차를 분석하기 위해 천수, 굴절, 회절 및 반사가 고려된 쌍곡형 파동방정식의 유한차분모형을 이용하였다.

불규칙 수로 경계에서의 파의 증폭현상 및 전

파속도의 감소를 파악하기 위해 Pederson에 의해 제시된 톱날형벽면수로(saw-tooth shaped channel)에서의 전파속도감소 해석식에 의한 결과와 수치해석 결과를 비교하여, Pederson식의 타당성을 검토하고 수치오차를 허용치 이하로 줄이기 위한 수로폭을 도출한다.

### 2. 지배방정식

#### 2.1 쌍곡형 파동방정식

파의 굴절, 회절, 반사등을 고려할 수 있는 선형파동방정식으로는 다음과 같은 환경사방정식(Berkhoff, 1972)을 들 수 있다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \xi) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \xi = 0 \quad (1)$$

여기서,  $\xi$ 는 수면변위량,  $C$ 는 파의 전파속도,  $C_g$ 는 군파속도,  $\omega$ 는 각진동수를 나타낸다.

식 (1)은 타원형이므로 대상해역이 넓거나 입사파의 파장이 짧으면 방대한 행렬식을 풀어야 하는 어려움이 있다. 이를 수치계산이 비교적 용이한 형태로 변형하기 위해 파에 의한 수면변위를 시간에 대한 주기함수라 가정하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\xi(x, y, t) = \eta(x, y) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

여기서,  $\eta$ 는 초기  $t = 0$ 에서의 수면변위를 말한다.

시간에 대해 2차미분을 취하면,

1 한양대학교 토목환경공학과 교수

2 현대건설 기술개발원(설계) 과장

3 한국건설기술연구원 수자원연구부 선임연구원

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta e^{-i\omega t} \quad (3)$$

식 (1)에 식 (2)와 식 (3)을 대입하면 다음과 같은 시간의존형 환경사방정식을 얻는다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \zeta) - \frac{C_g}{C} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

식 (4)는 다음과 같은 천수방정식 형태로 분리할 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{C}{C_g} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + CC_g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

여기서,  $P = uh$ ,  $Q = vh$  인  $x$ 와  $y$ 방향으로의 선유량성분을 말하며,  $u$ 와  $v$ 는  $x, y$ 방향으로의 유속이다. 이 식은 쌍곡형이므로 수치해법사용시 양해법의 사용이 가능하여 방대한 행렬식을 풀지 않고도 쉽게 해를 구할 수 있다(윤 등, 1996).

## 2.2 톱날형 벽면수로 (saw-tooth shaped channel) 에서의 파의 전파

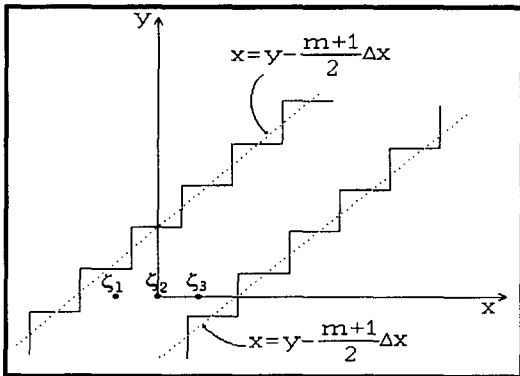


Fig. 1 톱날형 벽면수로의 형상과 경계위치를 결정하는  $m$ 의 정의( $m=2$ )

Fig. 1과 같이 축에 45°로 놓인 수로를 따라 전파되는 파는 포획파(trapped wave)의 영향으로 인하여 전파속도의 상당한 감소가 수치실험 및 적용에서 발생하게 된다. 이런 전파속도의 감소는 수로의 폭이 무한히 넓은 수로에서는 사라지게된다. 폭이 무한히 넓은 경우를 제외한 어떤 경우에도 입사파는 경계의 영향없이 전파될 수 없는데 이 현상은 경계에 발생하는 반사의 연속으로 수로를 따라 십자로 파가 교차하는 것으로 볼 수도 있고,

수로의 직각방향 파수성분이 허수가 되는 경우로 볼 수도 있다. Fig. 1에서 경계의 위치를 나타내는 직선식에서  $m$ 은 경계의 위치를 결정하는 계수이며, 이  $m$ 의 변화에 의해 수로폭이 넓어지거나 좁아진다.

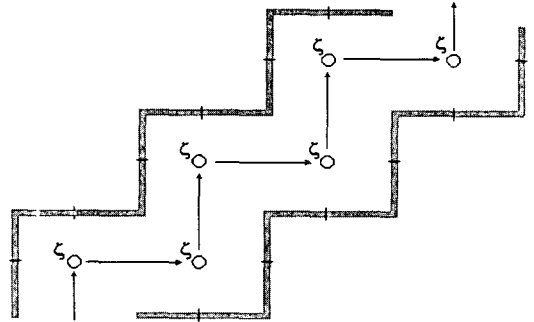


Fig. 2 좁은 수로에서의 파의 이동경로

Fig. 2에서처럼 매우 좁은 수로에서의 파의 경로는 유일하며, 반사의 연속으로 십자로 교차하는 것처럼 보인다.

Fig. 1처럼 수로의 대칭성을 이용하여 파를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \zeta_{s,p}^n &= A e^{i\sigma(s+p)\Delta x} \cosh \gamma(s-p)\Delta x \\ &= \frac{A}{2} [e^{i(\alpha s \Delta x + \alpha' p \Delta x)} + e^{i(\alpha' s \Delta x + \alpha p \Delta x)}] e^{-i\omega n \Delta t} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $\alpha = \sigma - i\gamma$ 이다. 식 (18)의 경계조건에 대입하면 다음의 관계가 얻어지게 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= e^{(m/2)\gamma \Delta x} (\bar{\omega}^2 \Delta x^2 + e^{i\alpha' \Delta x} + e^{-i\alpha \Delta x} - 2) \\ &\quad + e^{-(m/2)\gamma \Delta x} (\bar{\omega}^2 \Delta x^2 + e^{-i\alpha' \Delta x} + e^{i\alpha \Delta x} - 2) \\ &= e^{(m/2)\gamma \Delta x} (\bar{\omega}^2 \Delta x^2 + 2e^{-\gamma \Delta x} \cos(\sigma \Delta x) - 2) \\ &\quad + e^{-(m/2)\gamma \Delta x} (\bar{\omega}^2 \Delta x^2 + 2e^{\gamma \Delta x} \cos(\sigma \Delta x) - 2) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $m$ 은 Fig. 1의 윗쪽 직선식에  $x = s\Delta x$ ,

$y = p\Delta x$ 를 대입하면  $s - p = -\frac{m}{2}$ 의 관계를 얻게 되며,  $m+1$ 은  $x$ 축에서의  $\zeta$ 점의 갯수이다.  $\alpha \Delta x$ ,  $\omega \Delta t$ 가 매우 작을 때,  $m$ 을 고정하고 식 (29)와 식 (14)를 테일러 급수전개를 하면 톱날형 벽면수로에서의 수치분산관계가 얻어진다.

$$2\sigma^2 \cong \left(1 + \frac{1}{m}\right) \omega^2, \quad \gamma^2 = \frac{1}{2m} \omega^2 \quad (18)$$

무차원 전파속도  $C_s$ 는 다음과 같다.

$$C_s = \frac{\omega}{k_s} = \frac{\omega}{\sigma\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-1/2} \quad (19)$$

여기서,  $k_s = \sigma\sqrt{2}$ 는 수로에 평행한 파수성분이다.

### 3. 수치기법

#### 3.1 차분방정식

천수방정식 형태의 쌍곡형 파동방정식은 양해법의 사용이 가능하므로 Leap-frog법을 사용하여 해석을 실시하였으며, 안정적인 해를 얻기 위해서는 Courant 안정조건을 만족하게 격자증분을 설정하였다. 격자는 시간 및 공간 교호격자망(staggered mesh)을 사용하여 구성하였다.

Leap-frog법을 사용하여 유한차분화한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^n}{\Delta t} + \left(\frac{C}{C_g}\right)_{i,j} \left( \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(CC_{gi+1,j} + CC_{gi,j}) \times \frac{\xi_{i+1,j}^n - \xi_{i,j}^n}{\Delta x} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{Q_{i,j}^{n+1} - Q_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(CC_{gi,j+1} + CC_{gi,j}) \times \frac{\xi_{i,j+1}^n - \xi_{i,j}^n}{\Delta x} = 0 \quad (22)$$

계산과정은 주어진 초기조건  $\xi_{i,j}^n, P_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$ 으로부터 운동방정식 (21)과 (22)를 이용하여

$P_{i,j}^{n+1}, Q_{i,j}^{n+1}$ 을 구하고, 연속방정식 (20)에서

$\xi_{i,j}^n, P_{i,j}^{n+1}, Q_{i,j}^{n+1}$ 을 이용하여  $\xi_{i,j}^{n+1}$ 을 구한다.

Leap-frog법은 안정적인 해를 구하기 위해 다음의 Courant 안정조건을 만족해야 한다.

$$C_r = \sqrt{2} \frac{C\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (23)$$

여기서,  $C_r$ 은 Courant수이다.

#### 3.2 경계조건

경계조건은 육지나 구조물에 연한 경계에서 선유량 P 또는 Q를 0으로 놓고, 개방경계에서는 영역내부로의 입사파와 영역내부에서 외해쪽으로 반사되는 반사파를 동시에 처리하기 위해 Larsen &

Dancy(1983)의 영역내조파(internal wave generation) 기법과 흡수층(sponge layer)이론을 도입하였다.

영역내 조파기법은 영역내부에서 직선을 따라 수면을 교란하여 파를 발생시키는 방법으로 조파선의 각 격자점에 더해지는 수면표고는 다음과 같다.

$$\xi^* = 2\xi^l C\Delta t \frac{\Delta s}{\Delta x \Delta y} \sin \theta \quad (24)$$

여기서,  $\theta = \alpha + \pi/2$  이고,  $\alpha$ 는 입사각이다.

x와 y방향으로 같은 크기의 격자를 사용하고, 조파선의 위치가 격자선에 일치하면  $\Delta s = \Delta x = \Delta y$ 이므로 식 (24)은 다음과 같이 간단해진다.

$$\xi^* = 2\xi^l C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta \quad (25)$$

이 기법은 조파선을 통과하는 다른 파에는 전혀 영향을 미치지 않으며, 영역의 외해쪽 개방경계에 흡수층을 설치하면 영역내 조파에 의한 영상파와 구조물에 반사되는 외해로 전파되는 반사파를 효율적으로 소멸시켜 영역내부로의 재반사를 방지하므로 매우 우수한 방법이다.

흡수층(sponge layer)은 흡수층내부로 들어온 파를 일정한 흡수율에 따라 소모시킴으로서 외해경계를 따라 설치하면 영역내부에서 발생한 영역내 조파에 의한 영상파와 입사파가 구조물에 반사되어 발생한 반사파를 외해 밖으로 흘려보내는 효과를 주는 방법이다. 파 에너지의 소모과정은 매 시간단계에서 구해진  $\xi, P, Q$ 에 다음식으로 정해지는 일정한 소모율  $\mu$ 를 곱해줌으로써 이루어진다.

$$\mu(\bar{x}) = \exp[-(2^{-\bar{x}/\Delta x} - 2^{-x_s/\Delta x}) \ln a], \quad 0 \leq \bar{x} \leq x_s$$

$$\mu(\bar{x}) = 1, \quad \bar{x} > x_s \quad (26)$$

여기서,  $x_s$ 는 흡수층의 두께,  $\bar{x}$ 는 흡수층 내부점의 위치,  $\Delta x$ 는 격자간격,  $a$ 는 흡수층에서 격자점번호  $x_s/\Delta x$ 에 의존하는 상수로서  $x_s/\Delta x$ 가 10이면  $a = 5$ ,  $x_s/\Delta x$ 가 5이면  $a = 2$ 이다. 시험적인 적용결과에 의하면 Leap-frog법을 적용할 경우,  $\Delta t$ 가 매우 작아지면 회절에 의한 반사파가 발생하므로  $\mu$  대신  $\mu^C$ 을 곱해주면 반사파를 최소화 할 수 있었다.

#### 3.3 뿔날형 벽면수로에서의 전파속도의 측정

뿔날형벽면수로에서의 전파속도는 쌍곡형 파동

방정식을 식 (20)~(22)로 차분화한 수치모형을 이용하여 측정하였다. 전파속도의 측정을 위해 초기 수면의 강제입력으로 조파를 시켰고, 수로의 중앙을 따르는 일정한 거리를 가진 두 점에서 시간에 따른 수면변화를 조사하여 초기 최대진폭의 시간차를 이용하여 산정하였다. 식 (19)의 Pederson의 근사식은  $a\Delta x$ ,  $\omega\Delta t$ 가 매우 작은 장파의 경우에 대해 구한 무차원 전파속도의 근사식이므로 결과의 비교를 위해 초기입력파의 파장을 고정하고, 식 (20)~(22)의 수치해석시 계산에 사용되는 전파속도 및 군파속도를 천해에서의 값인  $\sqrt{gh}$ 를 사용한다. 수로경계의 위치를 나타내는  $m$ 값의 변화를 통해 수로폭의 넓이를 조절하여 수로폭의 변화에 따른 전파속도의 변화를 측정하여 단위화한 값과 식 (19)로 구한 Pederson의 결과와 비교한다. Fig. 3에 나타난 것과 같은 표현을 이용하여 수치해석으로 구한 전파속도와 단위화한 무차원 전파속도의 식은 다음과 같다.

$$C_{cal} = \frac{L_{12}}{t_{12}} \text{ (m/s)}, C_s = \frac{C_{cal}}{\sqrt{gh}} \quad (27)$$

여기서,  $C_{cal}$ 은 수치해석시 구한 단위를 가지는 차원량이고,  $C_s$ 는 무차원 전파속도이다.

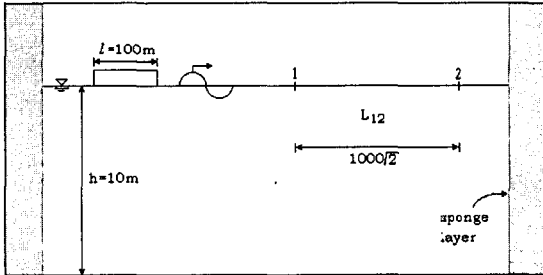


Fig. 3 수치해석 모형에서 구한 전파속도의 무차원화 개념도

#### 4. 톱날형벽면수로(saw-tooth channel)에서의 전파속도의 감소

폭이 좁은 saw-tooth channel에서의 파의 전파는 양쪽 경계의 영향으로 파의 전파속도가 감소되게 된다. 이런 영향은 포획파의 영향으로 설명되어질 수 있고, 수로폭이 넓어질수록 그 영향은 사라지게 된다. 수치실험은 쌍곡형 파동방정식을 지배방정식으로 하여 유한차분모형을 사용하여 수행되었고, 수로와 평행하게 파가 전파될 때 Fig. 4에 보

인 바와 같이 초기수면변화 구역의 길이  $l$ 이 100m인 경우에 대해서 수행되었다.

Table 1은 파장이 100m인 초기파의 경우에 각각의 격자크기에 대해 계산된 결과이다. Pederson의 결과와 비교하기 위해 같은 수로폭 즉, 수로폭을 결정하는  $m$ 에 따라서 수치실험을 수행하였고, 계산된 결과는 격자크기가 작아짐에 따라 전파속도가 증가하는 결과를 보였다. 또한 수로폭이 넓어질수록 전파속도가 증가하여 경계의 영향이 줄어들고  $m$ 이 10이상이면 톱날형상경계의 영향은 거의 나타나지 않는 결과를 보인다.

Table 1. 톱날형 벽면수로에서 전파속도의 비교

수로폭(m)	근사해	수치해( $\Delta x$ )		
		$\lambda/10$	$\lambda/20$	$\lambda/40$
2	0.8165	0.8097	0.8097	0.8109
3	0.8660	0.8850	0.8865	0.9281
4	0.8944	0.9154	0.9170	0.9421
5	0.9128	0.9314	0.9314	0.9314
6	0.9129	0.9412	0.9446	0.9547
7	0.9354	0.9513	0.9582	0.9651
8	0.9428	0.9651	0.9722	0.9757
9	0.9487	0.9757	0.9793	0.9625
10	0.9258	0.9866	0.9866	0.9860
20	0.9354	0.9866	0.9866	0.9967

Fig. 4, 5, 6은 톱날형벽면수로의 수로 중앙부와 경계에서 거리에 따른 진폭의 변화를 수로폭을 나타내는  $m$ 이 각각 2, 5, 10일 때의 결과를 도시한 것이다. 매우 좁은 수로에서도 수로 중앙부보다 경계에서는 포획파의 영향으로 진폭이 더 크고, 수로가 넓어질수록 진폭의 차이는 상당히 심해져 간다.

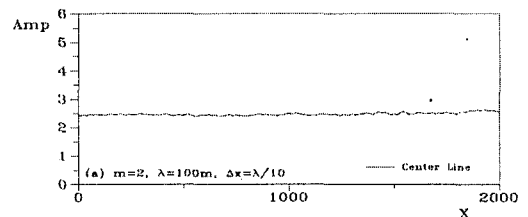


Fig. 4 수로중앙부와 경계에서의 진폭변화 비교 ( $m=2$ )

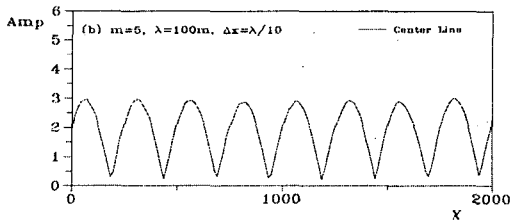


Fig. 5 수로중앙부와 경계에서의 진폭변화 비교 (m=5)

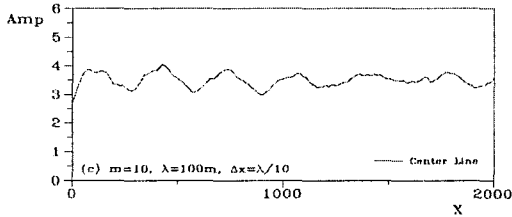


Fig. 6 수로중앙부와 경계에서의 진폭변화 비교 (m=10)

## 5. 결론

불규칙 수로경계에서의 전파속도의 감소현상을 연구하기 위해 45°로 놓인 톱날형상 수로에서의 파의 전파에 대해 쌍곡형 파동방정식을 지배방정식으로 하여 유한차분해석이 수행되었다. 해석의 용이함을 위해 비선형, 바닥마찰, 쇄파 등의 영향을 제거하고, 일정한 수심을 가정하여 경계에서의 영향을 파악하였으며, 수치해의 안정을 위해 시간 증분을 제한하고 강제 조파를 이용하여 파를 조파시켰고 흡수층 설치로 파의 영역내 재반사를 막았다.

톱날형벽면수로에서 계산된 전파속도(celerity)는 Pederson의 근사해석에 의한 결과와는 약간의 차이가 있었으나, 수로의 경계에 포획파 형태의 해가 존재해서 폭이 좁을 경우에는 전파속도의 상당한 감소가 일어났다. 격자크기가 작아질수록 경계의 영향이 작아져서 전파속도의 감소는 작았으며, 대체로 m이 10이상이면 경계의 영향이 거의 사라짐을 보였다.

## 참고문헌

- 과학기술처 (1991). "항만정온도 유지대책 수립에 관한 연구(I)." BSPG 00135-373-2.
- 윤성범, 이종인, 이정규, 채장원 (1996). "항내 수면교란 수치예측모형의 경계처리기법." 대한토목학회논문집, 제 16권, 제II-1호, pp.53-62
- Berkhoff, J.C.W., Booji, N.&Radder, A.C. (1972). "Computation of combined refraction-diffraction." Proc. of the 13th Coastal Engrg. Conf., ASCE, New York, pp.471-490
- Copeland, G.J.M. (1985a). "A practical alternative to the mild-slope wave equation." Coastal Engrg., 9, pp. 125-149
- Copeland, G.J.M. (1985b). "Numerical model for the propagation of short gravity waves and the resulting circulation around nearshore structures." PhD dissertation, Univ. of Liverpool.
- Larsen, J. & Dancy, H. (1983) "Open boundaries in short wave simulations - a new approach." Coastal Engrg., vol.7, pp. 285-297
- Mei, C. Chiang (1983). "The applied dynamics of ocean surface waves", John Wiley & Sons, pp.650-657
- Mork, G. (1983). "The effects of lateral saw-tooth boundaries on the numerical phase velocity." Norwegian Hydrodynamic Laboratories, Internal Report, project no. 609274
- Pederson, G. (1986). "On the effects of irregular boundaries in Finite Difference Models", Int. j. numer. methods in fluids, vol.6, pp.496-505
- Yoon, S. B. & Liu, P. L.-F. (1989). "Stem Waves along Breakwater", Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Eng. vol.115, No.5, pp.635-648