

확장형 Boussinesq 방정식의 유한요소모형 개발 I : 추가변수도입과 경계조건의 유도

Development of Finite Element Method for the Extended Boussinesq Equations I : Implementation of Auxiliary variables and Boundary conditions

우승범¹, 최병호²,

Seung Buhm Woo¹ and Byung Ho Choi²

1. 머리말

Boussinesq 형의 방정식은 장파와 단파의 거동을 동시에 해석할 수 있고 파랑 상호간의 간섭으로 인한 비선형성을 고려할 수 있으며 또한 불규칙파의 거동에 적용할 수 있는 등 다양한 장점이 있기 때문에 지난 10여 년간 활발한 연구가 수행되었다. 이 식의 근간은 선형 비분산형 파랑의 전파를 기술하는 천수 방정식이며, 여기에 더하여 비선형성과 주파수 분산성을 나타내는 항들이 추가되어 Boussinesq 방정식이 이루어 진다.

비선형성과 분산성이 모두 약하고 이 두개의 물리적 성질의 크기가 대략 비슷하다는 가정하에, Peregrine (1967)은 수심 적분된 유속을 변수로 하여 가변 수심에서 적용 가능한 이른바 standard Boussinesq 방정식을 유도하였다. Peregrine의 Boussinesq 방정식은 해저면에서의 유속 혹은 자유수면에서의 유속을 변수로 하여 다시 표현될 수 있다. 이러한 식들은 그 변수를 어떤 것으로 선택하느냐에 따라 분산 관계식이 약간씩 달라지게 되는데, 수학적 관점에서 봤을 때 이 식들의 정확성은 모두 동일한 정도를 갖는다고 할 수 있다. 표준형 Boussinesq 방정식, 혹은 이와 유사한 방정식에 근거를 둔 수치모형의 계산 결과의 검증은 실제 관측 자료와의 비교 (Elgar 와 Guza 1985), 그리고 수리실험 자료와의 비교 (Goring 1978, Liu 등1985) 등을 통해서 수행된 바 있고 그 결과의

신뢰성이 입증되었다.

그러나 표준형 Boussinesq 방정식은 약한 분산성에 가정을 두고 있으므로 수심이 파장에 비해 상대적으로 작은, 비교적 긴 장파의 거동에만 적용 가능하다는 한계가 있다. 수심 적분된 유속을 변수로 하는 표준형 Boussinesq 방정식은 수심이 파장의 1/5 이상이 되면 수학적으로 해가 발산한다. 항만 부진동을 포함한 대다수의 공학적 문제에 있어서는 대상 영역으로 침입하는 파랑의 에너지 스펙트럼이 많은 주파수 성분으로 구성되어 있으므로 방정식에서 수심에 대한 제약이 적을수록 바람직하다.

이러한 단점을 극복하여 단주기 파랑에도 적용이 가능하고 수치적 불안정성을 감소시킨, 이른바 확장형 Boussinesq 방정식을 개발하고자 많은 연구자들이 노력해 왔다 (예, Madsen 등1991, Nwogu 1993, Beji 와 Nodaoka 1996, Chen 과 Liu 1995). 이러한 노력의 결실로써 다양한 형태의 확장형 Boussinesq 방정식이 개발되었는데, 비록 그 유도 과정은 다소 상이하나 선형 분산 관계식의 개선된 정도는 서로 유사하다. Witting (1984)은 이 개선된 선형 분산 관계식을 선형 파랑이 전파할 때의 완전 분산 관계식에 대한 (2,2) Pade 근사값으로 표현될 수 있음을 증명하였다. 이렇게 개발된 확장형 Boussinesq 방정식은 파랑과 흐름의 상호작용을 포함한 심해에서 천해로의 파랑의 전파 및 변형에 사용될 수 있음이 입증되었다 (Chen 등

1 인하대학교 해양학과 전임강사

2 성균관대학교 토목환경공학과 교수

1998).

분산 관계의 괄목할만한 개선에도 불구하고 확장형 Boussinesq 방정식은 여전히 비선형성이 약한 경우에만 적용이 가능하다. 파랑이 해안가에 접근해 오며 따라, 천수작용에 의해 파고가 증가하여 대다수의 완만한 경사의 해안에서 쇠퇴된다. 이 쇠퇴대에서의 수심 대 파고의 비는 매우 커지므로, (즉 비선형성은 매우 강해지므로) 확장형 Boussinesq 방정식을 적용하는 데는 많은 무리가 따른다. 이러한 단점은 확장형 Boussinesq 방정식의 유도과정에서 order of magnitude가 1인 강비선형항을 생략하는 과정을 수행하지 않고 모든 비선형항을 지배방정식에 포함시켜, 이른바 완전비선형, 확장형 Boussinesq 방정식을 유도함으로써 극복되었다. (Liu 1994, Wei 등 1995). 엄밀히 말해서 이러한 완전 비선형, 확장형 Boussinesq 방정식은 비선형성과 분산성의 크기가 서로 대략적으로 비슷하다는 표준형 Boussinesq 방정식의 기본 가정과 다르므로 더 이상 Boussinesq 방정식이라고 칭하기 어렵다.

식의 난해성으로 인해 수학적인 엄밀해를 구하는 것은 매우 제한적이므로 수치모형의 개발은 필수적이다. 지금까지 제시된 가장 일반적인 수치모형은 유한차분모형이며 (Wei 등 1995) 유한차분모형은 널리 알려진 대로 수치모형 제작의 용이성과 저렴한 계산 비용 등에는 장점이 있으나 해안선 같이 복잡한 임의의 형상의 경계를 제대로 재현하기 힘들다는 단점이 있다. 특히 지금까지 제시된 Nwogu 식에 대한 유한차분모형들은 완전반사경계조건의 유도를 위해 전 계산영역이 불투과 직벽으로 둘러싸여 있다는 가정이 필요하며 이렇게 유도된 완전반사경계조건의 정확도는 지배방정식보다 떨어진다. 이는 지배방정식에 의해 정확히 재현된 파랑이 직벽에서 반사될 때는 정확도가 떨어진다는 것을 의미하므로 항만에서와 같이 파랑과 구조물간의 상호작용이 활발한 문제에서는 수치해석의 결과가 부정확해 질 수 있다. 항만구조물의 복잡한 경계를 재현하기에 적합한 수치모형은 유한요소모형 (FEM) 이며 근래에 들어 확장형 Boussinesq 방정식에 FEM을 수립하려는 시도가 이루어지고 있다.

본 연구에서는 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형을 수립하고 그 정확성을 검증하였다. 추가변수를 도입하여 3차 공간미분항의 차수를 줄임으로써 Galerkin 방법의 사용을 가능하게 하였는데, 추가변수의 선택은 완전반

사경계조건의 유도와 밀접한 관계가 있는 것으로 모형의 정확성과 계산의 효율성에 매우 큰 영향을 미친다. 또한 추가변수를 적절히 선택해야만 향후 본 연구에서 수립된 수치방법을 완전비선형, 확장형 Boussinesq 방정식에 직접적으로 사용할 수 있으므로 추가변수의 선택은 매우 중요하다. 선정된 추가변수를 이용하여 기존의 유한차분모형과 달리 본 연구에서는 지배방정식과 동일한 정도의 정확성을 갖는 완전반사경계조건을 유도하였으며 이를 토대로 유한요소모형을 수립하였다.

2. 유한요소모형의 수립

일반적인 FEM에서 사용되고 있는 편미분방정식은 주로 최고차항이 짝수차이며 유한요소모형 수립 후 대칭형의 행렬이 만들어지게 된다. 반면에 홀수차 편미분 방정식에 FEM 을 수립할 경우 대칭형의 행렬은 수립할 수 없게 되어 일반적인 유한요소해석기법을 적용하기 어렵다. 특히 3차의 공간미분항을 포함하는 확장형 Boussinesq 형식의 편미분방정식에 대한 FEM 의 연구는 거의 없는 실정이다.

2차원 문제에 있어서 가장 일반적으로 사용되는 선형의 유한요소를 이용하기 위해서는 추가변수를 도입하여 방정식에 존재하는 최고차 미분항의 차수를 낮추는 것이 필수적이다. Li 등 (1999) 은 자유수면에 대한 1차의 공간미분항을 추가변수로 치환하여 Beji 와 Nadaoka의 2차원 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형을 수립하였다. Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 유한요소모형은 Walkley (1999)에 의해 개발되었는데 그는 질량보존방정식에 있는 주파수 분산항을 이용하여 2개의 추가변수를 도입하였다. 또한 계산시간의 효율을 높이기 위하여 Walkley (1999) 는 추가변수를 계산하는 행렬식에는 질량집중행렬을 사용하였고 시간적분은 SPRINT 라는 software package를 사용하였다. 그의 수치실험결과는 2 격자크기의 (2Δx) 수치진동을 감소시키기 위해서는 계산 영역에서 비구조 격자들의 크기가 매우 완만히 변해야 함을 보이고 있다. 이 수치모델이 간단한 형상의 항만 부진동에 적용되었는데 계산영역의 경계부분에서 입사파 경계조건의 부정확한 적용으로 인해서 계산결과는 준정상 상태에 도달하지 못하고 발산하였다. 이 결과에서 알 수 있듯이 항만 부진동 문제에 있어서, 특히 시간적분형 모

형의 경우, 입사파와 반사파 및 방사파의 처리가 정확해야만 신뢰할 수 있는 결과를 얻을 수 있다. Walkely (1999) 방법에서의 단점은 선택된 추가변수의 형태가 너무 복잡하여 완전 비선형 Boussinesq 방정식에의 적용이 불가능하다는 점과, 항만 부진동 문제에서의 적용이 검증되지 못했다는 것이다.

경계조건의 처리는 계산의 정확도에 직접적인 영향을 미치므로 지배방정식을 계산하는 것만큼 중요하다. 만약 경계처리의 정확도의 정도가 지배방정식의 수치해법보다 떨어진다면 비록 고차의 정확도를 가지는 수치해법을 수립하였다 할지라도 그 정확도를 신뢰하기 어렵다. 특히 오랜 시간을 계산해서 준 정상 상태까지 도달해야 하는 항만 부진동 문제와 같은 경우는 더욱 그러하다. 지금까지 제시된 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 수치해법에서는 유한차분모형 (Wei 등 1995) 과 유한요소모형 (Li 등 1999) 모두 완전반사경계에서 경계에 직각방향으로 자유수면 경사가 0 이라는 조건을 필요로 하였다. 그러나 이 조건의 정확도는 확장형 Boussinesq 방정식의 leading order 까지 밖에 되지 않아 지배방정식보다 정확도가 떨어진다. 더구나 유한차분모형 (Wei, 1995; Skotner 과 Apelt 1999)은 추가적으로 완전반사경계에서 접선방향 유속이 경계의 직각방향으로 0인 경사를 가져야 하는 제약이 필요하다. 이는 수치계산의 안정성을 확보하기 위하여 필요하나, 이러한 조건이 도입되기 위한 아무런 물리적, 수학적 근거가 없다.

본 연구에서는 어떠한 가정도 필요로 하지 않는, 지배방정식과 동일한 정확도를 가지는 경계조건을 유도하여 수치모형에 적용하고자 하였다. 본 논문에서는 수치모형 수립 시에 도입된 추가 변수와 이에 따른 각종 경계조건의 유도, 그리고 유한요소모형 수립과정 등을 기술한다.

2.1 지배방정식

파랑의 전파는 파고 (a), 수심 (h), 파수(k) 등의 인자로 특성화시킬 수 있다. 무차원 계수인 $\epsilon = a/h$ 와 $\mu^2 = (kh)^2$ 는 각각 파랑 전파시의 비선형성과 분산성을 나타내는 값이 된다. Boussinesq 이론은 약비선형 약분산성 파랑 전파의 해석을 위해 $O(\epsilon) \approx O(\mu^2) \ll 1$ 의 가정을 필요로 하며 Nwogu (1993)의 확장형 Boussinesq 방정식은 다음과 같이 제시된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \epsilon \eta) \mathbf{u}_a] \\ & + \mu^2 \nabla \cdot [C_1 h^3 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) + C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_a))] \\ & = O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} + \nabla \eta + \frac{\epsilon}{2} \nabla (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a) \\ & + \mu^2 \left[C_2 h^2 \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} \right) + \beta h \nabla \left(\nabla \cdot \left(h \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} \right) \right) \right] \\ & = O(\epsilon^2, \epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\beta^2 - \frac{1}{3} \right), C_2 = \frac{\beta^2}{2}, C_3 = \beta + \frac{1}{2}, \beta = \frac{z_a}{h} \quad (3)$$

이며, η 는 자유수면변위, \mathbf{u}_a 는 $z = z_a$ 에서의 유속성분이다. 위 식 우변의 값은 이 식이 포함하고 있는 오차의 한계를 나타낸다. 이 오차 한계를 설정하는 기준에 따라 다양한 형태의 확장형 Boussinesq 방정식이 존재하며 주목할 점은 확장형 Boussinesq 방정식에서의 질량보존방정식은 우변의 값이 0이 아닌 것에서 알 수 있듯이 완벽한 질량보존을 의미하는 것은 아니라는 점이다. 또한 3차의 공간미분항이 질량보존방정식에 존재하고 운동량방정식의 최고차 공간미분항은 2차인 점에 유의한다.

선형 요소를 사용하는 Galerkin 방법을 적용하기 위하여 3차의 공간미분항의 차수를 줄이는 것이 필요하며 이를 위해 다음과 같은 추가 변수를 도입한다.

$$E = (E_1, E_2) := \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_a) \quad (4)$$

$$R_1 := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, R_2 := \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, R_3 := \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

이러한 추가변수를 이용하여 지배방정식을 다시 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \eta + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon \eta) \mathbf{u}_a] - \frac{\partial}{\partial y} [(h + \epsilon \eta) v_a] \\ & + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [C_1 h^3 E_1 + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_a R_1 + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_a R_3 + \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + h E_1 \right)] \\ & + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} [C_1 h^3 E_2 + C_3 h^2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_a R_3 + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + v_a R_2 + \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h E_2 \right)] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \dot{u}_a + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_a}{\partial x^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{u}_a)}{\partial x^2} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right] \\ & + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{v}_a}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{v}_a)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \dot{v}_a + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{v}_a}{\partial y^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{v}_a)}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right] \\ & + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_a}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{u}_a)}{\partial x \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$E_1 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right] = 0 \quad (9)$$

$$E_2 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right] = 0 \quad (10)$$

위의 식에서 상첨자 \cdot 는 시간에 대한 미분을 나타낸다. 추가변수의 도입으로 인해서 상기의 지배방정식은 최고차가 2차가 되었음에 주목한다.

R_1, R_2, R_3 는 해저면 경사에 관한 항들로 시간적분이 시작되기 전에 1회에 한에 계산된다. \dot{u}_a 와 \dot{v}_a 에 대한 처리는 시간적분을 기술하는 절에서 설명한다.

2.2 Galerkin 유한요소방법

Galerkin 유한요소방법을 적용시키기 위해서는 지배방정식의 가중잔차가 0이 되어야 한다. 즉 식 (6) ~ (10) 까지의 식들에 가중함수 $W(x, y)$ 가 곱해지고 공간영역 Ω 의 영역에 걸쳐 적분된다. 가중잔차법을 사용하기 위한 지배방정식의 weak form 은 부분적분의 원리와 Γ 에서의 경계적분을 이용하여 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W \eta \, dx dy \\ & = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left[(h + \varepsilon \eta) u_a + \mu^2 (C_6 h^3 E_1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_a R_1 + \frac{\partial v_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_a R_3 + \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial W}{\partial y} \left[(h + \varepsilon \eta) v_a + \mu^2 (C_6 h^3 E_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_a R_3 + 2 \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + v_a R_2 + \frac{\partial u_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ n_x W \left[(h + \varepsilon \eta) u_a + \mu^2 (C_6 h^3 E_1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C_3 h^2 \left(2 \frac{\partial u_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + u_a R_1 + \frac{\partial v_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + v_a R_3 + \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + n_y W \left[(h + \varepsilon \eta) v_a + \mu^2 (C_6 h^3 E_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C_3 h^2 \left(\frac{\partial u_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + u_a R_3 + 2 \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + v_a R_2 + \frac{\partial u_a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \right] \right\} \dot{u}_a \, dx dy \\ & = \int_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial v_a}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h v_a)}{\partial y} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial v_a}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h v_a)}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy \\ & - \int_{\Gamma} n_x W \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right. \\ & \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_a}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_4 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \right] \right\} \dot{v}_a \, dx dy \\ & = \int_{\Omega} \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial u_a}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h u_a)}{\partial x} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial u_a}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h u_a)}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy \\ & - \int_{\Gamma} n_y W \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right. \\ & \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_a}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W E_1 \, dx dy = \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Omega} n_x W \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial y} \right) d\Gamma \\ & \int_{\Omega} W E_2 \, dx dy \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Omega} n_y W \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial y} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$C_4 = \frac{1}{2} \beta (\beta + 1), \quad C_5 = \beta \left(\frac{1}{2} \beta + 1 \right), \quad C_6 = \frac{\beta^2}{2} + \beta \frac{1}{3} \quad (16)$$

이며 n_x 와 n_y 는 각각 경계에서 연직 단위 벡터인 \mathbf{n} 의 x, y 성분이다.

3. 경계 조건

유한계산 영역을 가지는 수치계산에서 경계 조건의 설정은 필수적이다. 이 절에서는 완전 반사 경계조건, 입사파 경계 조건, 개방 경계 (스폰지층) 조건에 대해서 기술한다.

3.1 완전 반사 경계조건

경계조건의 설정은 지배방정식의 오차의 범위와 동일한 정도, 또는 그 이상의 정확도를 만족시켜야 한다. 다시 말해서, 지배방정식이 아무리 정확하다고 하더라도 경계조건이 지배방정식의 정확도보다 떨어진다면 최종적인 해의 정확도는 지배방정식이 아닌 경계조건의 정확도에 결정될 수 밖에

없다.

따라서 확장형 Boussinesq 방정식에서의 경계조건은 그 오차의 범위가 지배방정식의 오차의 범위와 동일하게 유도되어야 한다. 완전반사경계조건의 경우 이러한 오차의 범위가 만족되지 않을 경우 질량보존의 법칙을 보장하기 힘들게 되는데, 그 이유는 매우 작은 양의 질량 손실 (또는 증대)이 발생하더라도 항만 부진동 같이 충분한 시간의 계산이 필요할 경우 결국 뚜렷한 양의 질량 변화가 나타날 수 밖에 없기 때문이다.

지금까지 제시된 대부분의 유한 차분 모형은 불투과 직벽 경계조건의 유도시 전체 계산 영역이 불투과 직벽으로 둘러싸여 있다는 가정에서 출발하였으며 이렇게 유도된 경계조건은 직벽에서 직각방향으로 자유수면의 경사가 0 이라는 것이다. 이 경계조건의 정확도는 $O(1)$ 으로서 지배방정식의 정확도보다 $O(\varepsilon, \mu^2)$ 만큼 떨어진다.

본 연구에서는 지배방정식과 동일한 정도의 오차를 가지는 완전 직벽 반사 조건을 수학적, 물리적으로 어떠한 가정 없이 유도하여 유한요소모형의 개발과 결합시키고자 하였다. 물리적으로 불투과 직벽에서는 유체가 벽체를 통과하지 못하며, 이른바 no-flux 경계조건을 만족시켜야 한다. 수심적분된 지배방정식에서 no-flux 경계조건을 만족시키려면 수심 적분된 수평방향의 유속이 경계의 직각방향으로 0 이어야 한다.

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_w \quad (17)$$

여기서 Γ_w 는 직벽 경계를 나타내고 $\bar{\mathbf{u}}$ 는 수심적분된 수평방향 유속을 나타낸다. 확장형 Boussinesq 방정식은 \mathbf{u}_α 가 변수이므로 위의 조건식을 \mathbf{u}_α 로 다시 기술해야 한다. 벽면근처에서 $O(\nabla h) \approx O(\mu^2)$ 라는 가정을 도입하면 $\bar{\mathbf{u}}$ 와 \mathbf{u}_α 의 관계는 다음과 같이 기술된다.

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_\alpha + \mu^2 h^2 C_6 \mathbf{E} \quad (18)$$

따라서 완전 반사 경계에서의 \mathbf{u}_α 의 no-flux 경계식은

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n} = -\mu^2 h^2 C_6 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \quad (19)$$

으로 나타내어질 수 있다. 한편 정의에 의해

$$\mathbf{u}_\alpha := \mathbf{u}|_{z=z_\alpha}$$

이므로

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (20)$$

은 경계 위치에서 만족시켜져야 한다. 따라서 식 (19)과 (20)로부터

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_w \quad (21)$$

임을 알 수 있다. 다시말해 추가변수의 no-flux 경계조건은 유속성분의 조건과 그 형태가 동일하며, 따라서 운동량방정식을 풀 때 사용한 경계기법의 처리방법을 그대로 경계에서의 추가변수의 처리에 적용할 수 있다.

이제 질량보존방정식에서 no-flux 경계조건을 유도하도록 한다. 질량보존 방정식에 계산영역 전체에 대해 적분을 취하면,

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) \mathbf{u}_\alpha] + \mu^2 \nabla \cdot [C_1 h^3 \mathbf{E} + C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha))] \right\} d\Omega = 0 \quad (22)$$

위식에 divergence 이론을 적용하고 자유수면의 시간미분항을 공간적분 바깥으로 정리하면,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \eta d\Omega + \int_\Gamma \{ [(h + \varepsilon \eta) \mathbf{u}_\alpha] \cdot \mathbf{n} + \mu^2 [C_1 h^3 \mathbf{E} + C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha))] \cdot \mathbf{n} \} d\Gamma = 0 \quad (23)$$

여기서 $\Gamma \equiv \Gamma_w$ 로 가정되었다. $\Gamma \equiv \Gamma_w$ 이므로 계산영역에서의 질량의 증가나 손실은 없다. 즉 총 질량의 시간에 대한 변화는 없으므로 위 식의 첫 번째 항은 0 이다. 또한 Vector identity 에 의해 위 식의 경계 적분에 있는 3번째 항은 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} & \mu^2 C_3 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) \\ &= \mu^2 C_3 h^2 \{ \nabla (\nabla h \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla (h \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \} \\ &= \mu^2 C_3 h^2 \{ (\nabla h \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \nabla h + \nabla h \times (\nabla \times \mathbf{u}_\alpha) \\ & \quad + \mathbf{u}_\alpha \times (\nabla \times \nabla h) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha \nabla h + h \mathbf{E}) \} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 $O(\nabla \times \mathbf{u}_\alpha) \approx O(\varepsilon \mu^2)$ 이므로 위 식의 우변의 3번째 항은 $O(\varepsilon \mu^4)$ 이다. 또한 4번째 항은 vector-identity 에 의해 0이 된다. 따라서 위 식은 다시 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_\Gamma \{ [h + \varepsilon \eta + \mu^2 C_3 h^2 (\nabla h \cdot \nabla)] \mathbf{u}_\alpha + \mu^2 [C_6 h^3 \mathbf{E} + C_3 h^2 (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha h)] \cdot \mathbf{n} \} d\Gamma = 0 \quad (25)$$

따라서 $O(\nabla h) \approx O(\mu^2)$ 의 가정하에 식 (19)과 위 식으로부터 경계조건 부근에서 적분기호 안에 있는 식이 $O(\varepsilon \mu^2 \cdot \mu^4)$ 의 오차를 갖는 no-flux 경계조건을 만족시킴을 알 수 있다.

식 (23) 의 경계적분기호 안에 포함되어 있는 식이 식 (11)의 경계적분안에 있는 식과 동일함에 주목한다. 다시 말해 질량 보존 방정식의 약형식

에 존재하는 경계 적분은 0 이며 따라서 완전 반사 경계에서 질량 보존 방정식의 경계적분의 처리를 위해 어떠한 추가적인 조치를 취할 필요가 없다.

이제 운동량방정식에 대한 no-flux 경계의 처리에 대해 논하기로 한다. 전술한 대로 완전 반사 경계에서 경계면에 수직한 유속은 0이다. 이렇게 연직 유속은 경계에서 제한되는 반면, 접속 유속은 경계의 접선 방향으로의 운동량 방정식을 계산함으로써 구해야 한다. 그런데 계산 영역의 축이 경계 요소의 방향과 일치하는 경우가 거의 없으므로 경계 요소에서의 운동량 방정식을 국지적으로 회전시키는 방법을 생각할 수 있다. 이러한 운동량 방정식의 국지적 회전 개념은 Elgelman 등 (1982)와 Pinder 와 Gray (1977) 등에 의해 최초로 제시되었다.

경계요소에서 국지 좌표계 (n, T) 를 도입한다. 여기서 n 은 경계에서 영역 바깥 쪽 연직 방향 단위 벡터이고 T 는 경계에서 법선방향의 단위 벡터이다. 이 좌표계는 경계에서 (x, y) 좌표계를 반시계방향으로 각 θ 만큼 회전시킨 것에 해당한다. 따라서 (n, T) 좌표계에 해당하는 (u_n, u_T) 와 (x, y) 좌표계에 해당하는 (u_x, u_y) 와는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_T \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ T_x & T_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_a \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $\mathbf{n}=(n_x, n_y)$ 은 연직 단위 벡터 이고 $\mathbf{T}=(T_x, T_y)$ 는 법선 단위 벡터이다.

이제 (x, y) 좌표계에서의 운동량 방정식을 구속조건이 되는 연직 방향의 유속 성분과 법선 방향의 운동량 방정식으로 변환시켜 본다. 법선 방향의 운동량 방정식은 경계 노드에서 (x, y) 좌표계의 운동량 방정식과 법선 벡터 T 와의 내적(inner product) 함으로써 구할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} &\mathbf{T} \cdot \left\{ \mathbf{u}_a + \nabla \eta + \frac{\epsilon}{2} \nabla (\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a) + \right. \\ &\left. \mu^2 [C_2 h^2 \nabla (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}_a) + \beta h \nabla (\nabla \cdot (h \dot{\mathbf{u}}_a))] \right\} \\ &= T_x \left\{ \dot{u}_a + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_a}{\partial x^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{u}_a)}{\partial x^2} \right] \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta + \epsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right] + \mu^2 \left[c_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{v}_a}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{v}_a)}{\partial x \partial y} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ T_y \left\{ \dot{v}_a + \mu^2 \left[C_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{v}_a}{\partial y^2} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{v}_a)}{\partial y^2} \right] \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta + \epsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right] + \mu^2 \left[c_2 h^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_a}{\partial x \partial y} + \beta h \frac{\partial^2 (h \dot{u}_a)}{\partial x \partial y} \right] \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

연직 방향 유속에 대한 구속 조건은 식 (3.2.41)에 제시된 바와 같이 no-flux 경계 조건으로부터 정해진다. 이 조건을 다시 기술하면,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_a = n_x u_a + n_y v_a = 0. \quad (28)$$

지금까지 운동량 방정식에 대한 완전반사 경계 조건을 적용시키기 위해 계산 영역에서의 지배방정식과 다른 형태의 식들을 유도했다. \dot{u} 와 \dot{v} 가 각기 독립적으로 적분되는, 전술한 시간적분 방법의 틀 안에서 위 식을 풀려면 시간 적분을

\dot{u} 에 대해서 해야 할 것인지 아니면 \dot{v} 에 대해서 해야 할 것인지를 결정해야 한다. 본 연구에서는 연직 벡터가 이루는 각의 크기, 즉 θ 의 크기에 따라 어느 변수를 시간 적분할 것인지를 정하였다. 예를 들어, $\theta=0$ 인 경우 즉, 경계요소가 y -축과 평행한 경우는 \dot{v} 에 대한 법선방향 운동량 방정식을 풀고 $u=0$ 이라는 구속조건을 적용시킨다. 반면 만약 $\theta=\pi/2$ 인 경우는 경계요소가 x -축에 평행한 경우이므로 \dot{u} 에 대한 운동량 방정식을 풀고 $v=0$ 이라는 구속조건을 적용시킨다. 이상을 정리하면,

$(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4})$ or $(\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4})$: \dot{u} 는 식 (27)로부터 구하고, v 는 식 (28)로부터 구속됨.

$(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$ or $(\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4})$: \dot{v} 를 식 (28)로부터 풀고, u 는 식 (28)로부터 구속됨.

이제 접선방향 운동량 방정식을 유한요소방법에 적용시키기 위해서 부분적분을 이용한 약형식을 유도한다. 여기서 주목할 점은 이 약형식을 유도할 때 경계적분에 해당하는 항들이 모두 서로 상쇄되어 0이 된다는 점이다. 즉, 접선방향 운동량 방정식을 풀 경우 경계처리는 특별한 조치를 필요로 하지 않는다. \dot{u} 에 대한 접선방향 운동량 방정식의 약형식은 다음과 같다.

$$\int_a \int_a \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_1 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \right] \right. \\ \left. - \mu^2 \frac{T_x}{T_1} \left[W \left(C_1 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) \right] \right\} \dot{u}_a d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int_a \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h \dot{v}_a)}{\partial y} \right] \right. \\
&\quad + \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_a)}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T_x}{T_x} W \left[-\dot{v}_a + \mu^2 \left(C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h \dot{v}_a)}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad \left. + \frac{T_x}{T_x} \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} + \beta h \frac{\partial (h \dot{v}_a)}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
&\quad - \int_r n_x W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_a}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \\
&\quad - \int_r \frac{T_x}{T_x} n_y W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_a}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{29}$$

여기서, $n_x = -\frac{T_y}{T_x} n_y$ 이므로 모든 경계적분의 항들이 서로 상쇄되어 0 이 됨을 명확히 알 수 있다. 여기서 이렇게 상쇄될 수 있도록 약형식이 유도되었음에 유의한다. 위의 식과 계산 영역에서 사용되는 식 (12)와 비교해 보면, $\frac{T_y}{T_x} (= -\cot \theta)$ 에 따르는 항들이 추가되었다.

연직 벡터의 각이 $(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4})$ or $(\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4})$ 인 경우에 윗 식은 다음의 구속조건과 함께 쌍을 이루게 되어 해를 구하게 된다.

$$v_a = -\frac{1}{n_y} (n_x u_a) \tag{30}$$

v 에 대한 접선방향 운동량 방정식의 약형식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int \int_a \left\{ W - \mu^2 \left[W \left(C_1 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial (h \dot{h})}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \mu^2 \frac{T_x}{T_x} \left[W \left(C_1 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(C_3 h^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y} \right) \right] \right\} \dot{v}_a d\Omega \\
&= \int \int_a \left\{ \mu^2 W \left[C_2 \frac{\partial h^2}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial (h \dot{u}_a)}{\partial x} \right] \right. \\
&\quad + \frac{\partial W}{\partial y} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_a)}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T_x}{T_x} W \left[-\dot{u}_a + \mu^2 \left(C_2 \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial (h \dot{u}_a)}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad \left. + \frac{T_x}{T_x} \frac{\partial W}{\partial x} \left[\eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) + \mu^2 \left(C_2 h^2 \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \beta h \frac{\partial (h \dot{u}_a)}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
&\quad - \int_r n_x W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_a}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma \\
&\quad - \int_r \frac{T_x}{T_x} n_y W \left\{ \eta + \varepsilon \frac{1}{2} (u_a^2 + v_a^2) \right. \\
&\quad \quad \left. + \mu^2 \left[C_2 h^2 \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_a}{\partial y} \right) + \beta h \left(\frac{\partial h \dot{u}_a}{\partial x} + \frac{\partial h \dot{v}_a}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{31}$$

여기서도 $n_x = -\frac{T_y}{T_x} n_y$ 이므로 모든 경계적분에 해당하는 항들은 서로 상쇄되어 0이 된다.

이 식과 동시에 풀어야할 구속 조건은 다음과 같다.

$$u_a = -\frac{1}{n_x} (n_y v_a) \tag{32}$$

이제 마지막으로 추가 변수에 대한 완전 반사 경계 조건의 적용에 대해서 살펴본다. 일반적으로 고차의 미분 차수를 줄이기 위해 새로운 추가변수가 도입되면 이에 따른 경계 조건의 적용이 복잡하여 지는데, 본 연구에서는 추가 변수에 대한 경계조건의 식 (21)이 유속에 대한 경계조건의 식 (21)과 동일한 형태를 취하므로 유속조건에 사용되었던 경계조건의 처리방식을 그대로 사용할 수 있다. 경계요소에서의 접선방향에 대한 추가변수의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} &= T_x E_1 + T_y E_2 \\
&= T_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right] + T_y \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{33}$$

윗 식은 전술한 추가변수의 구속조건과 같이 풀게 된다.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{34}$$

본 연구에서 사용되는 시간 적분을 이용하기 위해선 E_1 이나 E_2 중 하나에 대해서 식 (33)를 풀어야 한다. 운동량 방정식과 마찬가지로 연직 벡터의 각의 크기에 따라 다음과 같이 구분한다.

$(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4})$ or $(\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4})$: E_1 를 식 (33)로부터 구하고, E_2 는 식 5.55로부터 구속됨.
 $(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$ or $(\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4})$: E_2 를 식 5.54로부터 구하고, E_1 는 식 (34)로부터 구속됨.

추가변수의 접선 방향에 대한 약형식은 다음과 같다. E_1 에 대한 식은

$$\begin{aligned}
&\int \int_a W E_1 d\Omega \\
&= - \int \int_a \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) + \frac{T_y}{T_x} \left[\frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) + W E_2 \right] d\Omega \\
&\quad + \int_r n_x W \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) + \frac{T_x}{T_x} n_y W \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{35}$$

여기서도 $n_x = -\frac{T_y}{T_x} n_y$ 이므로, 모든 경계적분에 해당하는 항들은 서로 상쇄된다. 위식은

$$E_2 = -\frac{n_x}{n_y} E_1 \text{의 조건과 함께 풀린다.}$$

마찬가지로 E_2 에 대한 식은

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W E_2 d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{T_x}{T_y} \left[\frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + W E_1 \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} n_x W \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{T_x}{T_y} n_x W \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (36)$$

이때 윗 식은 $E_1 = -\frac{n_y}{n_x} E_2$ 의 구속 조건과 함께 풀린다.

3.2 입사파 경계 조건

수치모형을 실제적인 현상에 적용하는 데 있어서 정상 상태, 혹은 준 정상 상태까지 도달해야 하는 문제들이 많이 존재한다. 특히 시간 의존형 수치모형에서 준 정상 상태까지 도달하기 위해서 정확한 입사파 조건과 개방 경계 조건을 적용시키는 것이 필수적이다. 이번 절에서는 현 수치모형에 수립된 입사파 경계조건에 대해서 논의한다.

입사파 경계에서 η, u, v 는 기지의 값이다. 경계지점에서 이미 알려져 있는 값이므로 이 경계는 유한요소해석에서 이른바 essential 경계 조건으로 처리될 수 있다. 전 절에서 설명된 바와 같이,

$\{\eta\}_i^{n+1}$ 에 대해서 해를 구하게 된다.

$\{\eta\}_{i=m}^{n+1}$ 이 기지 값이므로 행렬 $[M^n]_{ij}$ 와 벡터 $\{f\}_i^n$ 는 수정 되어야 한다. 즉, $[M^n]$ 의 m 번째 행에는 $[M^n]_{mm}$ 의 1을 제외한 모든 열에 0을 대입하고 벡터 $\{f\}_{i=m}^n$ 의 m 번째 열에는 다음의 기지 값을 대입한다.

$$\{f\}_m^n = \left(\frac{\{\eta\}_m^{n+1*} - \{\eta\}_m^n}{\Delta t} \right) \quad (37)$$

여기서 $\{\eta\}_m^{n+1*}$ 는 다음 시간 단계에서의 기지 값이다. predictor 단계에서의 m 번째 행에 대한 행렬식을 정리하면 다음과 같다.

$$[0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0] \left(\frac{\{\eta\}_m^{n+1*} - \{\eta\}_m^n}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\{\eta\}_m^{n+1*} - \{\eta\}_m^n}{\Delta t} \right) \quad (38)$$

여기서 '1'은 m 번째 열에 위치한다. 따라서 $\{\eta\}_m^{n+1*}$ 에서 essential 경계 조건을 만족시키므로 입사파 경계 조건이 적용된다. 마찬가지로 운동량 방정식에 입사파 경계조건을 적용시킨다.

이러한 경계조건의 적용 예로서 정방형 계산 영역에서 유한차분과 유사한 사변형 격자체계를 생각해 본다. 여기서 노드 번호 $m := (k, l)$ 은 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=1, 2, \dots, K$ 이고 $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, $l=1, 2, \dots, L$ 로서 정의된다.

만약 입사파 경계가 계산영역의 왼 쪽에 적용된다면 ($x=0$), 자유수면과 유속의 기지 값은 노드 m_b 에 적용되며, 여기서 노드 m_b 는 $k=1, 2$ 이고 $l=1, 2, \dots, L$ 에 해당하는 격자들을 칭한다.

계산영역 내에 포함되어 있는 노드들에서의 ($k=3, l=1, 2, \dots, L$) 수치 해는 가중함수가 4개의 요소에 걸쳐 퍼져 있으므로 m_b 의 노드 값에 의해 영향을 받는다. 즉 ($k=3, l=2$)에서의 노드 값들은 ($2 \leq k \leq 4, 1 \leq l \leq 3$)에서의 노드 값과 서로 연관되어 있다. ($k=1, l=1, 2, \dots, L$)에서의 η, u, v 에 대한 노드 값들은 노드 ($k=2, l=1, 2, \dots, L$)에서의 추가변수를 계산하는데 필요함에 주목한다.

또한, 2개의 노드에서 연이은 Dirichlet 경계조건 (essential 경계조건)을 적용함으로써 경계지점에서의 일차 미분값을 계산하도록 하였다. 이러한 방법은 경계지점에서 정확한 노드의 경사값을 적용시키기 어려우므로 비선형 파랑을 발생시킬 때 문제를 발생시킬 수 있으나 파고가 수심에 비해 적은 선형파의 입사에는 큰 무리가 없다. 또한 경계지점에서 essential 경계조건을 적용시키는 노드의 수를 증가시킴으로써 이론적으로는 경계에서의 경사값을 구하는 정확도를 높일 수 있다.

3.3 개방 경계 조건

수치모형을 이용하기 위해서 계산영역은 현실적으로 유한할 수 밖에 없으므로 계산 영역 내에서 생성된 파랑이 자유롭게 빠져나갈 수 있는 개방 경계 조건의 개발은 매우 중요하다. 개방경계조건 의 부정확성으로 인해 개방경계 부근에서 파랑이 계산 영역 내부로 재 반사되는 현상은 없어야 하며 본 연구에서는 이른바 스폰지 층을 개방 경계에 위치시킴으로써 계산 영역 내부로부터 전파되어 오는 모든 파랑 에너지를 흡수하였다. 이러한 조건을 적용시킨 이유 중의 하나는 계산영역 내부에서 파랑 상호간의 작용, 쇄파 등 여러 가지의 비선형성으로 인해 생성되는 추가적인 파랑의 성분을 개방 경계부근에서 알 수 없기 때문이다. 따라서 개방 경계 쪽으로 퍼져 나오는 모든 파랑 에너지를 감쇄시킴으로써 내부에서 비선형성에 의해 생성되는 추가적인 파랑에 대해서도 효과적인 개방경계 조건을 적용시킨 것과 같게 된다.

Fig. 1에서 Γ_W^E 는 스폰지 층 끝 쪽에 위치한 완전반사경계를 나타내며 Γ^S 는 스폰지 층의

시작위치를 나타낸다. Γ^S 의 선택은 스폰지 층의 두께가 계산 영역에서 발생할 수 있는 가장 긴 파장의 1.5배 이상이 될 수 있도록 정해지며 주어진 문제에 따라 달라진다. x_c 는 방사의 중점으로 정의되며 x_c 와 Γ_W^E 를 연결하는 선을 따라 영역 내부의 파랑이 방사될 수 있도록 x_c 의 위치를 정하게 된다. 스폰지 층의 두께가 충분하다면 모든 파랑에너지가 효과적으로 소멸되므로 스폰지 층 끝 쪽에 위치한 완전반사 경계 조건에 특별한 방사조건을 적용할 필요가 없게 된다.

스폰지 층은 다음과 같은 항들을 각 지배방정식의 우변에 추가함으로써 설치된다.

$$S_\eta = C_\eta \nabla^2 \eta \quad (39)$$

$$S_u = -C_{u1} u_\alpha + C_{u2} \nabla^2 u_\alpha \quad (40)$$

$$S_v = -C_{v1} v_\alpha + C_{v2} \nabla^2 v_\alpha \quad (41)$$

윗 식에서 u_α 와 v_α 의 선형 damping 감쇄항은 물리적으로 "Newtonian cooling" 항에 해당하고 2차의 공간미분항이 포함되어 있는 항은 수치 점성항에 해당한다 (Israeli와 Orszag, 1981). 감쇄 계수 C_η, C_{u1}, C_{u2} 의 크기는 경계 Γ_W^E 로부터 지수적으로 감소하며 다음과 같이 정의된다.

$$C_\eta = G_1^{\eta} \frac{\exp[\|x - x_s\| / \|x_e - x_s\|]^{G_1^{\eta}} - 1}{\exp(1) - 1} \quad (42)$$

$$C_{u1} = w G_1^{u1} \frac{\exp[\|x - x_s\| / \|x_e - x_s\|]^{G_1^{u1}} - 1}{\exp(1) - 1} \quad (43)$$

$$C_{u2} = w G_1^{u2} \frac{\exp[\|x - x_s\| / \|x_e - x_s\|]^{G_1^{u2}} - 1}{\exp(1) - 1} \quad (44)$$

여기서 x_s 는 스폰지 층이 시작되는 좌표 ($x_s \in \Gamma^S$), x_e 는 스폰지 층 끝의 좌표 ($x_e \in \Gamma_W^E$) w 는 감쇄되는 파랑의 각속도를, 그리고 $G_1^{\eta}, G_1^{u1}, G_1^{u2}, G_2^{u1}, G_1^{u2}, G_2^{u2}$ 는 문제의 성격에 따라 달라지는 수치 점성 계수를 나타낸다. 주어진 x 에 대해서, x_s 와 x_e 는 각각 x 와 x_c 를 연결하는 선이 Γ^S 와 Γ_W^E 를 만나는 점의 좌표를 나타낸다.

참고문헌

Alfeld, P., Piper, B., and Schumaker, L. L. (1987). An explicit basis for C1 quartic bivariate splines, SIAM J. Numer. Anal., 24(4), 891-911.

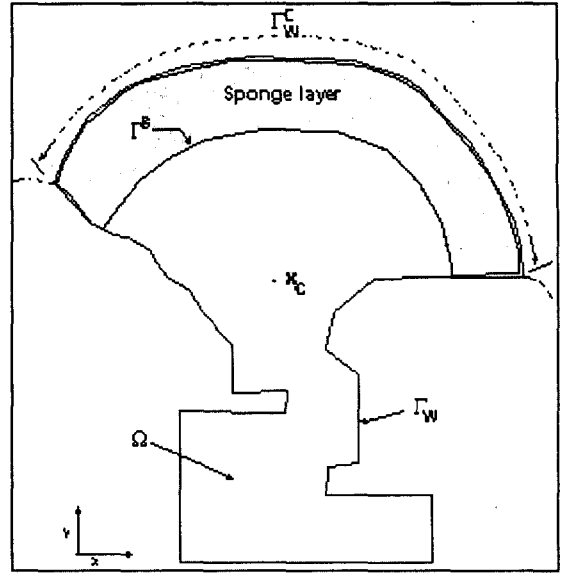


Fig. 1 계산영역의 개략적 도해

Ambrosi, D. and Quartapelle, L. (1998). A Taylor-Galerkin method for simulating nonlinear dispersive water waves, J. Comput. Phys, 146, 546-569.

Antunes do Carmo, J. S., Seabra Santos, F. J., and Barthelemy, E. (1993). Surface waves propagation in shallow water: A finite element model, Int. J. Numer. Methods Fluids, 16, 447-459.

Antunes do Carmo, J. S., Seabra Santos, F. J. (1996). On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: a 2DH finite element model, Int. J. Numer. Methods Fluids, 22, 429-444.

Beji, S. and Nadaoka, K. (1996). A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth, Ocean Engng., 23(8), 691-704.

Berkhoff, J. C. W., Booy, N. and Radder, A.C., (1982). Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Engng. 6, 255-279.

Chen, Y. and Liu, P. L.-F. (1995). Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation, J. Fluid Mech., 288, 351-381.

Chen, Q., Madsen, P. A., Schaffer, H. A. d Basco, D. R., (1998). Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach, Coastal Engng., 33, 11-39.

Engelman, M. S., Sani, J. L. and Gresho, P. M. (1982). The implementation of normal and/or tangential boundary condition in finite element

- codes for incompressible fluid flow, *Int. J. Numer. Methods fluids*, 2, 225-238.
- Elgar, S. and Guza, R. T. (1985). Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model, *J. Fluid Mech.*, 158, 47-70.
- Goring, D. G. (1979). Tsunamis - the propagation of long waves onto a shelf, Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A. (1995). A two dimensional bi-cubic B-spline finite element: used in a study of MHD-duct flow, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 124, 365-375.
- Katopodes, N. D. and Wu, C.-T. (1987). Computation of finite-amplitude dispersive waves, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 113, 327-346.
- Kawahara, M. and Cheng, J.Y. (1994). Finite element method for Boussinesq wave analysis , *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 2, 1-17.
- Langtangen, H. P. and Pedersen, G. (1996). Finite elements for the Boussinesq wave equations, in *Waves and nonlinear processes in hydrodynamics*, edited by Grue, J., Gjevik, G., and Weber, J.E.; Kluwer academic, 1-10.
- Langtangen, H. P. and Pedersen, G. (1998). Computational methods for weakly dispersive and nonlinear water waves , *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 160, 337-371.
- Lapidus L., Seinfeld J. (1971). Numerical solution of ordinary differential equations, Academic Press.
- Li, Y. S., Liu, S.-X., Yu, Y.-X., Lai, G.-Z. (1999). Numerical modeling of Boussinesq equations by finite element method , *Coastal Engng.*, 37, 97-122.
- Liu, P. L.-F. (1994). Model equations for wave propagations from deep to shallow water, in *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, (ed. by P. L.-F. Liu), 1, 125-157.
- Madsen, P. A., Murray, R. and Sorensen, O. R. (1991). A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Engineering*, 15, 371-388.
- Nwogu, O. (1993). An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, 119(6), 618-638.
- Peregrine, D. H. (1967). Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, 27, 815-882.
- Pinder, G. F. and Gray, W. G. (1977). Finite element simulation in surface and subsurface hydrology, Academic, New York
- Sabin, M.A. (1997). Spline finite elements." Ph.D Thesis, University of Cambridge.
- Skotner, C. and Apelt, C. J. (1999). Internal wave generation in an improved two-dimensional Boussinesq model", *Ocean Engng.*, 26, 287-324.
- Walkley, M. (1999). A numerical method for extended Boussinesq Shallow-water wave equations", Ph.D Thesis, University of Leeds.
- Walkley, M. and Berzins, M. (1999). A Finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 29, 143-157.
- Wei, G., Kirby, J. T., Grilli, S. T., and Subramanya, R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves, *J. Fluid Mech.*, 294, 71-92.
- Wei & Kirby (1995). Wei, G., Kirby, J.T. 1995 Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations", *ASCE J. Waterw., Port, Coast., Ocean Engr.* , 121, 251-261.
- Witting, J. M. (1984). A unified model for the evolution of nonlinear water waves, *J. Comp. Phys.*, 56, 203-236.