

# Approximate Riemann Solver를 이용한 비선형 천수방정식 해석 Analysis of Nonlinear Shallow-Water Equations with Approximate Riemann Solver

조용식<sup>1</sup>, 김대홍<sup>2</sup>  
 Yong-Sik Cho<sup>1</sup> and Dae-Hong Kim<sup>2</sup>

## 1. 서 론

지진해일은 매우 빠른 속도로 피해를 지나 해안에도달하여 대규모 범람을 일으켜 많은 인명과 재산피해를 초래한다. 실제로, 1992년 Indonesia Flores 섬 지진해일과 1993년 동해에서 발생한 Hokkaido 지진해일은 진원지 부근에 위치한 Babi섬과 Okushiri섬에 매우 높은 초오름을 발생시켜 많은 인명과 재산피해를 초래하였다. 또한, 1996년 인도네시아 Irian Jaya 지진해일로 인하여 우리나라 남해안을 비롯한 일본 및 태평양의 여러 섬과 연안국가까지 지진해일 주의보가 발령되기도 하였다(안영창, 2002).

지금까지 천수방정식 해석에 관한 연구 주제는 주로 천수방정식을 해석하여 지진해일의 전파와 초오름 및 이에 부수되는 범람에 관한 연구가 주류를 이루고 있다. 국내 연구로 윤성범(1999)은 수심이 완만하게 변하는 해역을 전파하는 지진해일에 대해 천수방정식과 균일격자를 사용하면서도 물리적 분산효과를 정도 높게 수치모의하기 위한 분산보정기법을 개발하였다. 인태훈 등(2003)은 2차정확도의 upwind 기법을 이용한 비선형 천수방정식의 해석 모형을 개발하여 해석해가 있는 문제에 적용하였다.

국외 연구로는 Goto 등(1983)은 천수방정식을 이용하여 leap-frog 유한차분기법을 이용하여 일본 근해에서 발생하는 지진해일을 해석하였다. Liu et al.(1995), Cho(1995) 및 Cho et al.(1999)은 upwind 기법으로 비선형 천수방정식을 해석하여 대양을 횡단하는 지진해일의 거동과 함께 원추형섬 주변에서의 지진해일

의 전파양상과 섬으로의 초오름 현상을 수치모의하였다.

장파에 관한 기존의 연구는 주로 유한차분법을 기반으로 leap-frog 및 upwind 기법을 이용하여 천수방정식을 해석한 것이다. 본 연구에서는 HLLC approximate Riemann solver를 이용한 비선형 천수방정식 해석 모형의 개발 과정을 설명하고 해석해가 존재하는 문제에 적용하여, 장파의 전파에 대한 정확도와 이동경계 해석에 대한 정확도를 비교 및 검토한다.

## 2. 수치해석기법

벡터를 이용하여 보존형의 비선형 천수방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (1)$$

식(1)에서 각각의 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{ax} - S_{fx}) \\ gh(S_{ay} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

지배방정식을 임의의 계산 요소에 대하여 식(3)과 같이 적분을 하여 유한체적법을 이용할 수 있다.

1 한양대학교 토목공학과 부교수

2 한국수자원공사 수자원연구원 선임연구원

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{U} dA + \oint_{\partial A} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \oint_{\partial A} \mathbf{S} d\Omega \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{G}$ 는 flux tensor,  $A$ 와  $\Omega$ 는 계산요소의 면적과 경계이며,  $\mathbf{n}$ 는 경계와 수직인 단위벡터를 나타낸다. 식(3)에 변환행렬  $\mathbf{T}_s$ 를 도입하면 식(4)와 같이 상미분방정식이 되며, 비구조적격자계를 사용할 수가 있다.

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^N \int_{A_s} \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{T}_s \mathbf{U}) dA = \mathbf{S} \quad (4)$$

HLLC Riemann solver는 Fraccarollo 등(1995)과 Billett 등(1997)이 제안한 Riemann 문제의 해석기법으로 쌍곡선형식의 편미분방정식 해석과 댐붕괴파와 같은 장파의 해석(Kim, 2003)에 적용된 바 있다. HLLC 기법은 초오름 현상에 수반되는 이동경계 문제를 해석함에 있어, 마른 바닥(wet bed)의 처리를 해석적으로 수행하여 초오름 현상과 같은 이동경계 해석에 보다 정확한 결과를 제공할 수 있는 장점이 있다(Billett 등, 1997). HLLC 기법에 대한 자세한 내용이 기존 연구에서 상세히 다루었으므로, 본 절에서는 개략적인 내용만을 기술하였다.

흐름이  $x$  축 방향으로만 변한다고 가정하고 생성항을 생략하면 지배방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

위 식(5)에서  $\mathbf{U}$ 는 세 개의 변수에 대한 벡터로써 식(5)로 표현된 계는 세 개의 실수 고유값(eigenvalue)을 갖게 되고, 식(6)과 같이 세 개의 파속  $S$ 로 구분되는 네 개의 구간으로 구분되는 Riemann 문제의 해가 구성된다.

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{U}_L^* & \text{for } S_L \leq 0 \leq S. \\ \mathbf{U}_R^* & \text{for } S. \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{U}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

수치 flux는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2}^{HLLC} = \begin{cases} \mathbf{E}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{E}_L^* = \mathbf{E}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{for } S_L \leq 0 \leq S. \\ \mathbf{E}_R^* = \mathbf{E}_R + S_R(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_R^*) & \text{for } S. \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{E}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

식(7)에서 아래첨자  $i+1/2$ 는 유한체적법을 이용하여 해석영역을 이산화하는 경우, 왼쪽과 오른쪽의 계산요소  $L$ 과  $R$ 사이의 경계를 나타내며, 식(6)과 식(7)에 사용된 파속은 식(8)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} S_L &= \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_* - \sqrt{gh_*}) \\ S_* &= u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \\ S_R &= \max(u_R + \sqrt{gh_R}, u_* + \sqrt{gh_*}) \end{aligned} \quad (8)$$

$h^*$ 는 다음과 같다.

$$h_* = \frac{(u_L + 2\sqrt{gh_L} - u_R - 2\sqrt{gh_R})^2}{16} \quad (9)$$

본 연구에서 사용한 HLLC 기법의 장점 중 하나는 앞에서 언급한 것과 같이 마른 바닥에서의 파속을 해석적으로 구하여 사용하는 점으로, 마른 바닥에도 미소수심이 존재한다는 비물리적 가정을 하여 유체의 거동을 계산하는 Roe 기법보다 정확한 해석이 가능하다. 이를 식으로 표현하면, 계산요소의 왼쪽과 오른쪽이 마른 바닥인 경우, 파속은 식(10)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} S_L &= u_R - 2\sqrt{gh_R} & S_L &= u_L - \sqrt{gh_L} \\ S_* &= S_L & S_* &= S_R \\ S_R &= u_R + \sqrt{gh_R} & S_R &= u_L + 2\sqrt{gh_L} \end{aligned} \quad (10)$$

2차정확도의 수치기법에 수반되는 수치진동을 제어하기 위해 TVD 제한자를 이용하여 수치 flux 항을 전개하면 식(18)과 같다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sign}(c_k) \phi_{i+1/2}^k \Delta \mathbf{E}_{i+1/2}^k \quad (11)$$

식(11)에서  $\mathbf{E}_{i+1/2}^k = \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1/2}^k)$ ,  $c_k$ 는 파속  $S_k$ 를 갖는 파의 Courant 수,  $\Delta \mathbf{E}_{i+1/2}^k = \mathbf{E}_{i+1/2}^{k+1} - \mathbf{E}_{i+1/2}^k$ 이며  $\phi_{i+1/2}^k$ 는 TVD 기법 중 하나인 flux 제한자 함수이다.

본 연구에서는 splitting technique으로 생성항을 처리하였다. 보다 자세한 과정은 Fraccarollo 등(1995)과 Hu 등(2000)에 기술되어 있어 본 절에는 생략하였다.

해석대상 영역을 2차원 공간으로 확장하기 위하여 fractional step method를 이용하였다. 2차원 천수방정식은 fractional step method에 의해 식(5)와 같이  $x$  축과  $y$  축에 대한 각각의 1차원 문제로 분할되며, 분할된 1차원 문제는 상기 과정과 같이 해석이 가능하다. 즉,  $x$  축과  $y$  축에 대한 1차원 문제의 해석과정을  $x^{\Delta t}$  과  $y^{\Delta t}$  로 표현하면 2차원 문제는  $U^{k+1} = y^{\Delta t} x^{\Delta t} (U^k)$  를 이용하여 해석이 가능하다. 그러나 이는 1차정확도 이므로 식(12)를 이용하여 2차정확도의 해를 구하였다.

$$U^{k+1} = y^{\Delta t/2} x^{\Delta t/2} y^{\Delta t/2} x^{\Delta t/2} (U^k) \quad (12)$$

### 3. 수치모형의 적용과 고찰

본 절에서는 개발된 수치모형의 비선형 천수방정식 해석 문제에 대한 정확성과 적용성을 검증하기 위하여, 해석해가 있는 문제를 대상으로 수치모형을 적용하고 그 결과를 분석 및 비교하였다.

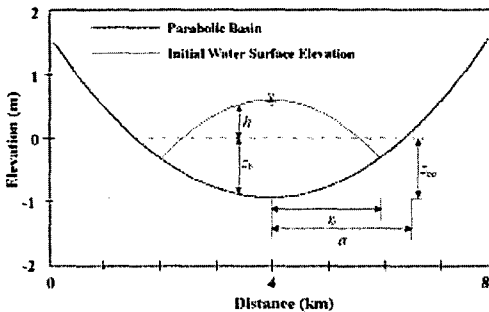


Fig. 1. 포물형 수조 및 주기운동 수면 개략도

본 문제는 Fig. 1과 같은 마찰이 없는 포물선형 수조 위의 중심부에 포물선형 수면형상이 초기조건으로 주어지는 경우 유체의 거동을 모의하는 것으로서, 수면이 거동하여 경사면을 따라 처오름과 내림 현상이 주기적으로 발생한다. 해석 대상영역은 식(13)과 같이 표현된다.

$$z_b = z_{bo} (1 - r^2/a^2) \quad (13)$$

식 (13)에서  $r$ 은 해석영역 중심으로부터의 거리이며, 해석해는 식(14)와 같다(Thacker, 1981).

$$h = z_{bo} \left[ \frac{\sqrt{1-A^2}}{1-A \cos \omega t} - 1 - \frac{r^2}{a^2} \left\{ \frac{1-A^2}{(1-a \cos \omega t)^2} - 1 \right\} \right] \quad (14)$$

본 연구에서는  $\omega = \sqrt{8gz_{bo}}/a$ ,  $A = (a^4 - r_o^4)/(a^4 + r_o^4)$ ,  $r_o = 2,000\text{m}$ ,  $a = 2,500\text{m}$ , 및  $z_{bo} = 1.0\text{m}$ 이며 계산영역을  $400 \times 400$ 개의 정사각형 요소로 분할하여 수치모형을 수행하였다.

Fig. 2는 HLLC approximate Riemann solver를 이용한 수치모형을 이용하여 계산한 결과로서 각각 초기 조건과 시간  $t = 1T/4, 2T/4, 3T/4$  및  $4T/4$  ( $T$ 는 주기)에서의 수면을 입체적으로 도시한 것으로, 수조의 중앙에서는 수면이 낮아지며, 수조의 가장자리에서는 해안선이 상승하고, 다시 반대의 과정을 거쳐 원상태로 복원되는 물리 현상을 재현하고 있음을 보여준다.

Fig. 3은 Fig. 2의 중심을 지나는 주기에 따른 단면을 나타내는 것으로서, 나타난 것과 같이 모든 수치모형의 계산해와 이 해석해가 근사한 결과를 보이고 있다. 그러나 본 연구에서 개발한 수치모형과 인태훈 등(2003)이 제시한 수치모형이 보다 정확한 계산 결과를 제공하고 있다. 특히  $t = 4T/4$ , 즉 유체유동의 한 주기가 완료되는 순간 두 모형은 매우 정확한 결과를 보이는 반면, Cho(1995)가 제시한 모형은 유체 중심부의 수면 값이 해석해와 약간 다른 양상을 보이고 있다. 이는 비교대상 모형이 비선형항을 이산화함에 있어 1차정확도의 upwind 기법을 이용하였기 때문인 것으로 판단된다.

Fig. 4는 수조 중심으로부터의 거리가 각각 0km, 1km 및 2km 인 지점에서의 시간에 따른 수위를 도시한 것으로, 본 연구에서 개발한 수치모형이 해석해와 가장 잘 일치하고 있음을 보여 준다. Fig. 4(a)에서 나타난 것과 같이, 1차정확도의 upwind 기법에 의한 수치해는 시간의 경과에 따라  $r = 1\text{km}$  및  $r = 2\text{km}$  지점에서 해석해와의 차이가 증가한다. 또한, 2차 정확도의 upwind 기법에 의한 수치해는 시간의 경과에 따라  $r = 2\text{km}$  지점에서 해석해와의 차이가 나타남을 알 수 있다. 반면에 본 연구에서 개발한 수치기법에 의한 수치해는 시간과 위치에 관계없이 해석해와 매우 잘 일치하고 있다.

Fig. 3과 Fig. 4로부터 본 연구에서 개발한 모형은 경사지형에서 장파의 처오름 현상으로 인한 이동경계 현상을 비선형 천수방정식을 해석하여 매우 정확

히 모의하였고, 따라서 조석이나 지진해일에 의한 해안에서의 파랑의 초오르내림 예측에 적용할 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 HLLC approximate Riemann solver를 이용하여 비선형 천수방정식을 해석하기 위한 수치모형을 개발하고 해석해와 비교하여 정확성을 검증하였다. 모형의 검증을 위해 포물형 수조에서 이동경계를 수반하며 장파의 특성을 지니는 수면의 주기적인 운동 문제를 해석하였다. 수치모형에 의한 결과는 기존의 해석해와 매우 잘 일치하였고, 이로부터 본 수치모형이 비선형 천수방정식 해석에 매우 적합함을 알 수 있었다.

개발한 모형의 정확성과 적용성을 검증하기 위하여 마찰이 없는 이상적인 수종에서의 유체의 주기적인 거동을 해석하였으나 실제 문제에 적용하기 위하여 바닥마찰항을 추가하여야 한다. 아울러, 본 수치모형은 지배방정식을 천수방정식으로 하였기 때문에 분산효과를 고려할 수가 없어 적용이 분산 효과가 중요하지 않은 흐름의 해석에 한정된다. 향후 이를 극복하기 위해서는 분산 효과를 고려한 Boussinesq 방정식을 수치해석하는 모형의 개발이 필요하다.

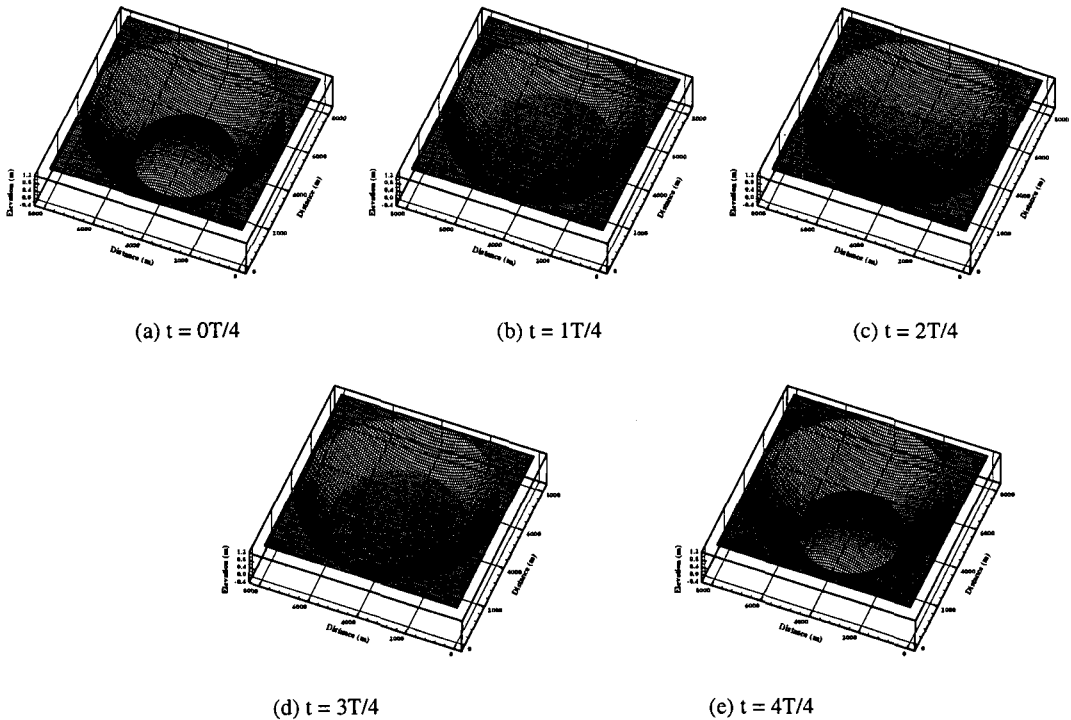
#### 감사의 글

본 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다(KRF-2003-041-D00573).

#### 참고문헌

안영창(2002) 비선형 천수방정식을 이용한 지진해일의 초오름높이 예측. 석사학위논문, 한양대학교.  
 윤성범(1999) 완변수심상 지진해일 전파 2차원 유한차분모형의 분산보정. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 19권, 제2-6호, pp. 695-703.

인태훈, 조용식(2003) 2차 정확도 풍상차분기법을 이용한 유체의 주기적 거동 해석. 2003년도 학술발표회 논문집, 한국수자원학회, pp. 1059-1062.  
 Billett, S.J., and Toro, E.F.(1997) On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, Vol. 130, No. 1, pp. 1-24.  
 Cho, Y.-S.(1995) *Numerical simulations of tsunami propagation and run-up*, Ph.D. thesis, Cornell Univ., Ithaca, N.Y.  
 Cho, Y.-S. and Liu, P.L.F.(1999) Crest length effects in nearshore tsunami run-up around islands, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 104, pp. 7907-7913.  
 Fraccarollo, L., and Toro, E.F.(1995) Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dambreak type problems, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 6, pp. 843864.  
 Goto, C. and Shuto, N.(1983) Numerical simulations of tsunami propagations and run-up. *Tsunami-Their Science and Engineering*, Terra Science Publishing Company, Tokyo, pp. 439-451.  
 Hu, K., Mingham, C.G., and Causon, D.M.(2000) Numerical simulation of wave overtopping of coastal structures using the non-linear shallow water equations. *Coastal Engineering*, Vol. 41, pp. 433-465.  
 Kim, D.H.(2003) Dam break flow analysis with approximate Riemann Solver. *Water Engineering Research, KWRA*, Vol. 3, No. 11, pp. 23-30.  
 Liu, P.L.F., Cho, Y.-S., Briggs, M.J., Kanoglu, U. and Synolakis, C.E.(1995) Run-up of solitary wave on a circular island, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 302, pp. 259-285.  
 Thacker, W.C.(1981) Some exact solutions to the nonlinear shallow water wave equations. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 107, pp. 499-508.



(a)  $t = 0T/4$

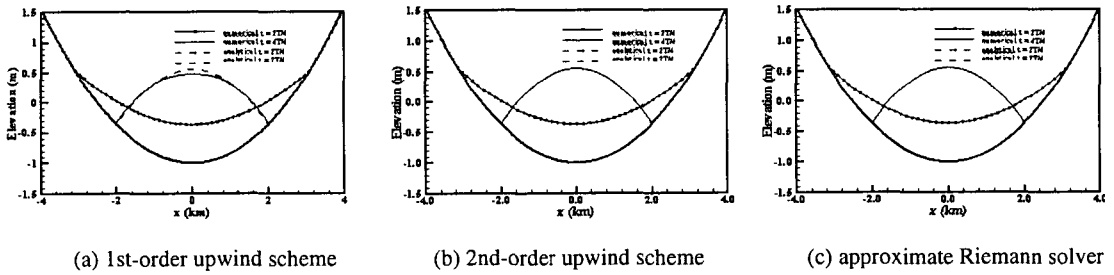
(b)  $t = 1T/4$

(c)  $t = 2T/4$

(d)  $t = 3T/4$

(e)  $t = 4T/4$

Fig. 2. 시간에 따라 주기적인 운동을 하는 수면

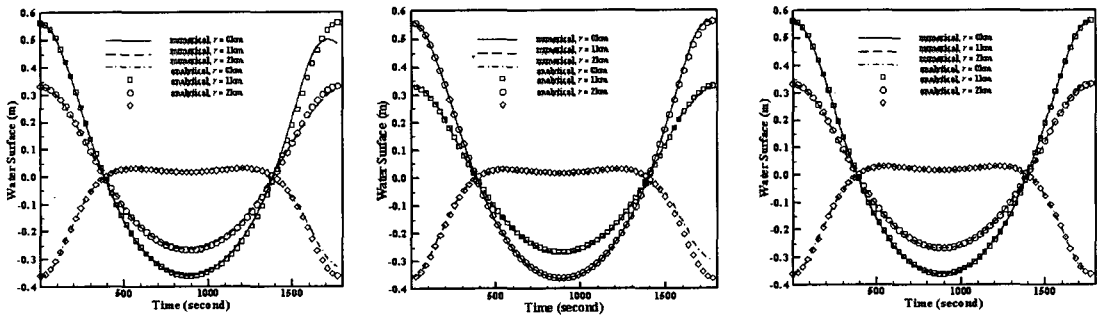


(a) 1st-order upwind scheme

(b) 2nd-order upwind scheme

(c) approximate Riemann solver

Fig. 3. 시간에 따른 수위 변화 비교



(a) 1st-order upwind scheme

(b) 2nd-order upwind scheme

(c) approximate Riemann solver

Fig. 4. 시간에 따른 지점별 수위 변화 비교