한국해안·해양공학회 학술발표논문집 (2004)
2004년 8월 19일-21일
제15권, pp. 73-84

시간의존 파랑식에서의 내부조파: 선 조파기법과 원천함수기법

Internal Generation of Waves for Time-Dependent Wave Equations: The Line-Source Method and the Source Function Method

김건우[1], 이창훈[2], 서경덕[3]
Gunwoo Kim[1], Changhoon Lee[2] and Kyung-Duck Suh[3]

1. 서 론

해안공학자들은 먼 바다에서 주로 바람에 의해서 발생한 파랑이 연안으로 전파하면서 발생하는 변화의 과정을 예측하기 위하여 소위 파랑변형식을 개발하였다. 이 식은 공간의 3차원(x, y, z) 현상을 2차원(x, y) 현상으로 단순화하여 넓은 영역에서의 예측이 가능하다. 파랑식 가운데 시간 의존 파랑식은 외해경계에 파랑에너지를 만들고 시간이 경과하면서 이 에너지가 육지경계까지 도달하면서 변화하는 과정을 모의한다. 시간의존 파랑식 가운데 불규칙파의 전파도 예측할 수 있는 모형으로 Suh 등(1997)과 Lee 등(2003)의 확장형 완경사 방정식과 모든 종류의 Boussinesq 방정식 이 있다.

시간의존 파랑식에서 파랑에너지를 만드는 방법은 외부조파와 내부조파로 나눌 수 있다. 외부조파는 수면변위나 유속 또는 흐름(flux)을 매시간 단계에서 외부경계에 임의로 지정하는 방법이다. 이 경우 계산영역에서 구조물이나 수심의 변화로 발생한 반사파의 에너지가 외부의 조파경계에 이르러 완전히 빠져나가지 못할 수 있다. 이 경우 조파경계에서 반사파가 다시 반사되어 영역의 내부로 퍼져나가는 문제가 발생하게 된다.

이러한 문제를 해결하기 위해서 내부조파 기법이 개발되었다. 내부조파기법은 외해 경계에 위치한 에너지 감쇄대와 함께 사용되어, 계산영역에서 반사된 파가 조파 띠(source band)를 통과하여 에너지 감쇄대에서 소멸되어 계산영역 내부에 에너지가 축적되지 않으면서 조파가 가능하다. 내부조파는 조파방법에 따라 선 조파기법(line source method)과 원천함수기법(source function method)으로 나눌 수 있다. 첫 번째인 선 조파기법은 조파선(즉, 조파 띠의 폭이 한 격자간격임)에서 매시간 단계에 계산된 수면변위나 유속 등에 임의의 양을 더해주는 것이다. 더해주는 양은 조파선에서 매시간 단계동안 전송된 부피를 한 격자 간격으로 나눈 값의 두 배이다. 두 배를 더하는 이유는 조파된 파랑이 조파선의 양쪽으로 퍼져나가기 때문이다. 두 번째로 원천함수기법은 조파 띠에서 원천항을 포함한 지배방정식(질량보존식 또는 운동량 보존식)을 사용하는 방법이다. 선 조파기법은 Larsen과 Dancy(1983)가 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식에서 최초로 사용하였으며, 부피흐름(volume flux)이 질량전송의 관점 하에 위상속도(C)로 전파한다고 가정하였다. 그런데, Lee와 Suh(1998)는 Radder와 Dingemans(1985)의 완경사방정식에서 위상속도 대신 에너지 전송의 관점 하에 에너지속도(C_e)를 사용하여 내부조파를 성공적으로 할 수 있었다. 이후 Lee 등(2001)은 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에도 위상속도 대신 에너지속도를 사용하여야 내부조파가 제대로 된다는 사실을 확인하였다. 그들은 Larsen과 Dancy가 위상속도를 사용하여 내부조파를 제

1 서울대학교 지구환경시스템공학부 박사과정
2 세종대학교 토목환경공학과 부교수
3 서울대학교 지구환경시스템공학부 교수

대로 할 수 있었던 것은 Peregrine의 Boussinesq 방정식이 천해에서만 적용되고 천해에서는 에너지속도가 위상속도와 거의 같기 때문이고, 더 나아가 모든 파랑식에서 에너지속도를 사용하여야 한다고 주장하였다. 그들의 주장은 Nadaoka 등(1994)의 비선형완경사방정식의 내부조파에서도 증명되었다(이종인 등, 1999).

그런데, 선 조파기법은 어떤 파랑식(예를 들어, Lee 등(2003)의 확장형 완경사방정식)에서는 수치적인 동요가 발생하는 문제점이 있다. 그러나 이러한 문제점이 조파함수기법에서는 나타나지 않았다. Madsen과 Larsen(1987)은 Copeland(1985)의 완경사방정식에서 두 격자 폭의 조파 띠에 분포하는 원천함수를 최초로 사용하였다. 이후, Wei 등(1999)은 여러 격자 폭의 조파 띠에 Green 함수 해법을 사용하여 조파하고자 하는 파에 대응하는 원천함수를 해석적으로 구하였다. Wei 등은 비선형 천수방정식, Peregrine의 Boussinesq 방정식, Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식에 적용되는 원천함수를 유도하였고, Kim 등(2004)은 확장형 완경사방정식(Suh 등,1997; Lee 등, 2003)에 적용되는 원천함수를 유도하였다.

최근까지 내부조파기법으로 선 조파기법과 원천함수기법이 별개로 개발되었다. 선 조파기법의 경우 조파원리로써 에너지전송의 개념이 적합하다고 수치실험을 통하여 증명되었으나, 해석적인 방법으로는 아직 증명된 바가 없다. 원천함수를 사용하는 경우에 Gaussian 형태 이외의 조파함수에 대해서 적용된 예가 없었다. 뿐만 아니라, 선 조파기법과 원천함수기법 사이의 관련성에 대해서도 연구된 바가 없다. 본 연구에서는 한 격자 폭의 조파 띠에 분포한 직사각형 형태 크기의 원천함수를 구한 뒤, 선 조파기법과의 상관성을 규명하고자 한다. 위에 언급된 내부조파기법들을 Fig. 1에 개념적으로 도시하였다. (a)는 선 조파기법이고, (b)는 여러 격자 폭의 조파 띠에서 Gaussian 형태 크기의 조파함수를 사용한 조파기법이고, (c)한 격자 폭의 조파 띠에서 직사각형 형태 크기의 조파함수를 사용한 조파기법이다. 제2장에서는 Boussinesq 방정식(Peregrine, 1967)과 확장형 완경사방정식(Suh 등, 1997; Lee 등, 1998; Lee 등, 2003)에 적용된 선 조파기법을 정리하였고, 제3장에서는 한 격자 폭의 조파 띠에 분포한 직사각형 형태의 조파함수를 유도하였다. 제4장에서는 제3장에서 유도된 조파함수를 사용하여 수치실험을 하였고, 제5장에서 한 격자 폭의 조파함수기법과 선조파기법과의 상관성을 살펴보았다. 마지막으로 제6장에 결론을 내렸다.

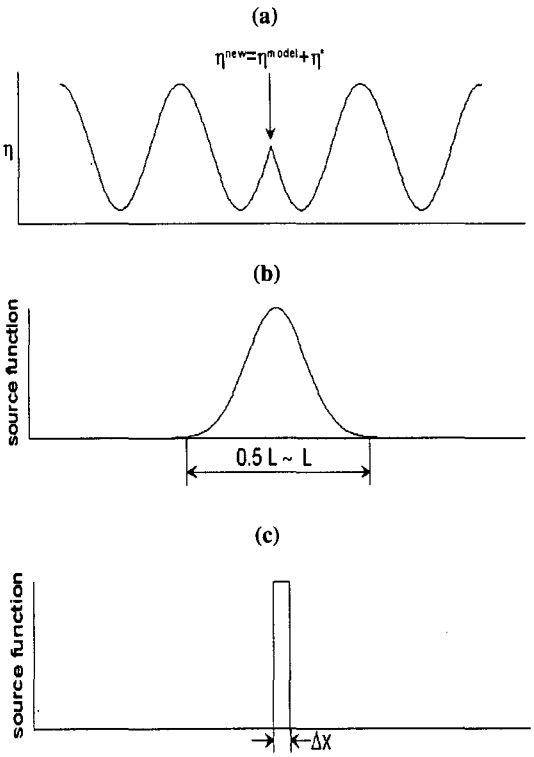

Fig.1. Schematic diagram of wave generating methods; (a) line source, (b) multi-grid source function in Gaussian shape, (c) one-grid source function in rectangular shape.

2. 선 조파기법

에너지 전송 개념의 선 조파기법은 조파선에서 수치적으로 계산된 수면변위 η에 다음의 η^*를 더해주는 방법이다.

$$\eta^* = 2\eta^I \frac{C_e \Delta t}{\Delta x}\cos\theta \qquad (1)$$

여기서, η^I는 조파하고자 하는 입사파의 수면변위, C_e는 입사파의 에너지속도, θ는 x축에 대한 입사각이고, Δx와 Δt는 각각 x축 방향의 격자간격과 시간간격이다. 조파선은 y축과 평행하다고 가정하였다. C_e는 수면변위나 속도포텐셜 함수를 다음과 같이 표현하여 수심이 일정한 경우에 파랑식에 대

입한 뒤 기하광학기법을 사용해서 구할 수 있다.

$$\eta = a(x, y, t)\exp(i\Psi) \tag{2}$$

$$\phi = A(x, y, t)\exp(i\Psi) \tag{3}$$

여기서, $a(x, y, t)$와 $A(x, y, t)$는 각각 수면변위와 속도포텐셜의 진폭, Ψ는 위상함수이다. 복소수 i 는 $i=\sqrt{-1}$이고, 각주파수 ω와 파수벡터 $\boldsymbol{k}$는 위상함수와 다음의 관계에 있다.

$$\boldsymbol{k} = \nabla\Psi, \quad \omega = -\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{4}$$

2.1 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식

Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\cdot\{(h+\eta)\boldsymbol{u}\} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + g\nabla\eta - \frac{1}{2}h\nabla\left\{\nabla\cdot\left(h\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\right\} + \frac{1}{6}h^2\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right) = 0 \tag{6}$$

여기서 η는 수면변위, $\boldsymbol{u}$는 바닥에서 수면까지 평균한 유속 벡터, h는 평균 수심, ∇은 수평미분연산자이다. 수심이 일정한 경우 선형화된 식에서 η를 소거하면 다음과 같이 $\boldsymbol{u}$로 표현된 식이 유도된다.

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} - gh\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \frac{h^2}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{7}$$

바닥에서 수면까지 평균한 속도포텐셜 함수 ϕ는 유속벡터와 $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$의 관계에 있으며 위 식을 ϕ에 대해서 정리하고 공간에 대해서 한번 적분하면 ϕ로 표현된 다음 식이 유도된다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - gh\nabla^2\phi - \frac{h^2}{3}\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

식 (3)을 식 (8)에 대입하고 $O(\partial A/\partial t, \nabla A)$의 정도까지 정리하면 실수부와 허수부에서 각각 다음과 같이 위상속도와 에너지 전송식이 유도된다.

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{gh}{1+\frac{(kh)^2}{3}}} \tag{9}$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{\omega}{k}\frac{1}{1+\frac{(kh)^2}{3}}\cdot\nabla A^2 = 0 \tag{10}$$

그리고 에너지속도 $\boldsymbol{C}_e$는 다음과 같다(Lee와 Suh, 1998).

$$\boldsymbol{C}_e = \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{C}{1+\frac{(kh)^2}{3}} \tag{11}$$

따라서, 조파선에서 매시간 수면변위에 더해지는 값은 다음과 같다.

$$\eta^* = 2\eta^I\frac{C}{1+\frac{(kh)^2}{3}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \tag{12}$$

여기서, $\cos\theta = k_x/k$로서 파향선이 조파선에 수직인 x축과 이루는 각이다.

2.2 Suh 등(1997)의 확장형 완경사방정식

Suh 등(1997)의 확장형 완경사방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{CC}_g}{g}\nabla\phi\right) - \frac{\overline{\omega}^2 - \overline{k}^2\overline{CC}_g}{g}\phi - \frac{\overline{\omega}^2}{g}\{\overline{R}_1(\nabla h)^2 + \overline{R}_2\nabla^2 h\}\phi = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \tag{14}$$

여기서, ϕ는 평균수면에서의 속도포텐셜, C와 C_g는 각각 위상속도와 군속도, R_1과 R_2는 각각 바닥경사의 제곱과 바닥의 곡률에 의한 영향을 나타내는 항이다. bar가 붙은 계수는 각주파수 ω가

대표파의 각주파수인 ω일 때 정의되는 값이다. 고차의 수심변화항을 무시하면, 즉 $\overline{R}_1 = \overline{R}_2 = 0$ 이면, 식 (13), (14)은 Radder와 Dingemans(1985)의 완경사방정식이 된다. 수심이 일정한 경우 식 (13), (14)에서 η를 소거하고 ψ와 η의 선형의 관계를 이용하면 다음과 같이 η로 표현된 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \overline{C}\overline{C}_g \nabla^2 \eta + (\overline{\omega}^2 - \overline{k}^2 \overline{C}\overline{C}_g)\eta = 0 \quad (15)$$

Lee와 Suh(1998)는 식 (2)를 식 (15)에 대입한 뒤 실수부와 허수부에서 각각 다음과 같은 분산관계식과 에너지 전송식을 유도하였다.

$$\frac{k}{\overline{k}} = \sqrt{1 + \frac{\overline{C}}{\overline{C}_g}\left[\left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right)^2 - 1\right]} \quad (16)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{\overline{C}\overline{C}_g}{C} \cdot \nabla a^2 = 0 \quad (17)$$

에너지 전송식에서 에너지속도는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{C}_e = \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{\overline{C}\overline{C}_g}{C} \quad (18)$$

대표파에 대응하는 파의 경우(즉, $\omega = \overline{\omega}$) 에너지속도 $\boldsymbol{C}_e$는 대표파의 군속도 $\overline{C}_g$와 같다. 조파선에서 매시간 수면변위에 더해지는 양은 다음과 같다.

$$\eta^* = 2\eta^I \frac{\overline{C}\overline{C}_g}{C}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \quad (19)$$

2.3 Lee 등(1998)의 확장형 완경사방정식

Lee 등(1998)의 확장형 완경사방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{Q}}{\frac{\overline{C}_g}{\overline{C}}\overline{R}_1(\nabla h)^2 - \overline{R}_2(\nabla^2 h)} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \overline{C}\overline{C}_g \nabla \eta = 0 \quad (21)$$

여기서, $\boldsymbol{Q}$는 유속을 바닥에서 평균 수면까지 적분한 부피흐름(volume flux)이며, 수면변위와 다음의 관계에 있다.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}_g \eta \quad (22)$$

고차의 수심변화항을 무시하면, 즉 $\overline{R}_1 = \overline{R}_2 = 0$ 이면, 식 (20), (21)은 Copeland(1985)의 완경사방정식이 된다. 수심이 일정한 경우 식 (20), (21)에서 $\boldsymbol{Q}$를 소거하면 다음과 같이 η로 표현된 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \overline{C}^2 \nabla^2 \eta = 0 \quad (23)$$

Lee와 Suh(1998)는 식 (2)를 식 (23)에 대입한 뒤 실수부와 허수부에서 각각 다음과 같은 분산관계식과 에너지 전송식을 유도하였다.

$$\frac{k}{\overline{k}} = \frac{\omega}{\overline{\omega}} \quad (24)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{\overline{C^2}}{C} \cdot \nabla a^2 = 0 \quad (25)$$

대표파의 위상속도에 대한 정의($\overline{\boldsymbol{C}} = \overline{C}\boldsymbol{k}/k$)와 식 (25)에 의해 에너지속도는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{C}_e = \frac{\boldsymbol{k}}{k}\frac{\overline{C}^2}{C} = \overline{\boldsymbol{C}} \quad (26)$$

조파선에서 매시간 수면변위에 더해지는 양은 다음과 같다.

$$\eta^* = 2\eta^I \overline{C}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \quad (27)$$

2.4 Lee 등(2003)의 확장형 완경사방정식

Lee 등(2003)의 확장형 완경사방정식은 다음과 같다.

$$\nabla\cdot(\overline{CC}_g\nabla\xi)+\{\overline{k^2CC}_g+g\overline{u}_1\nabla^2h+g\overline{u}_2(\nabla h)^2\}\xi$$
$$+i\nabla\cdot\left\{\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\}$$
$$+i\left\{\frac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega}+g\frac{\overline{\partial u_1}}{\partial\omega}\nabla^2h+g\frac{\overline{\partial u_2}}{\partial\omega}(\nabla h)^2\right\}\frac{\partial\xi}{\partial t}=0 \tag{28}$$

여기서, u_1, u_2는 각각 바닥의 곡률과 바닥경사의 제곱에 의한 영향을 나타내는 항이며, ξ는 수면변위 η와 다음의 관계에 있다.

$$\eta=\xi\exp(-i\overline{\omega}t) \tag{29}$$

고차의 수심변화항을 무시하면, 즉 $u_1=u_2=0$ 이면, 식 (29)는 Kubo 등(1992)의 완경사방정식이 된다. 수심이 일정한 경우 식 (29)는 다음과 같이 된다.

$$\overline{CC}_g\nabla^2\xi+\overline{k^2CC}_g\xi+i\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\nabla^2\frac{\partial\xi}{\partial t}$$
$$+i\frac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega}\frac{\partial\xi}{\partial t}=0 \tag{30}$$

ξ의 정의에 의해서 $\xi=a\exp\{i(\Psi+\overline{\omega}t)\}$, $\partial\xi/\partial t=-i\Delta\omega\xi$ (여기서, $\Delta\omega=\omega-\overline{\omega}$)를 대입하여 정리하면 실수부와 허수부에서 각각 다음의 분산관계식과 에너지전송식이 유도된다.

$$\frac{k}{\overline{k}}=\sqrt{1+\frac{2\frac{\Delta\omega}{\overline{\omega}}}{\frac{\overline{C}_g}{\overline{C}}+\frac{\Delta\omega}{\overline{\omega}}\frac{\overline{k}^2}{\overline{\omega}}\overline{\frac{\partial}{\partial\omega}(CC_g)}}}} \tag{31}$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}+\frac{2k\left[\overline{CC}_g+\Delta\omega\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\right]}{\frac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega}-k^2\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}}\cdot\nabla a^2=0 \tag{32}$$

에너지속도는 다음과 같다.

$$C_e=\frac{2k\left[\overline{CC}_g+\Delta\omega\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\right]}{\frac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega}-k^2\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}} \tag{33}$$

에너지속도에 사용되는 파수 k는 분산관계식 (31)에서 구할 수 있다. 대표파에 대응되는 파의 경우(즉, $\omega=\overline{\omega}$), 에너지속도 C_e는 대표파의 군속도 $\overline{C}_g$와 같다. ξ는 η와 달리 복소수로 정의된다. 실수부와 허수부에 각각 코사인파와 사인파가 존재하므로, 다른 파랑식과 달리 조파선에서 매시간 ξ에 더해지는 양은 다음과 같다.

$$\xi^*=\xi^I\frac{2k\left[\overline{CC}_g+\Delta\omega\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\right]}{\frac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega}-k^2\frac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \tag{34}$$

3. 한 격자 폭의 원천함수기법

해석적으로 구한 원천함수를 사용한 조파기법은 Wei 등(1999)에 의해서 개발되었다. 그들은 동차(homogeneous) 편미분 방정식인 지배방정식의 우변에 원천함수를 더하여 비동차(nonhomogeneous) 편미분 방정식을 구성하고 미분방정식의 Green 함수 해법을 사용하여 원천함수에 대응하는 특수해를 구한 후 특수해가 조파하고자 하는 파와 일치하도록 원천함수의 형상과 크기를 결정하였다. Wei 등과 Kim 등(2004)은 공간적으로 연속적으로 분포하는 Gaussian 형태의 원천함수를 사용하였다. 본 연구에서 원천함수로서 한 격자 폭의 조파선에 분포하는 다음과 같은 형태의 $f(x,y,t)$를 사용하였다.

$$f(x,y,t)=\begin{cases}\hat{f}\exp[i(k_y y-wt)], & |x-x_s|\le\dfrac{\Delta x}{2}\\ 0, & |x-x_s|>\dfrac{\Delta x}{2}\end{cases} \tag{35}$$

여기서, x_s는 조파선의 위치이고 $\hat{f}(x)$는 원천함수에서 y축 방향의 조화 항(harmonic term)과 시간의 조화항을 제거한 값이다.

3.1 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식

식 (5)의 우변에 원천함수 f_P(아래첨자 P는 Peregrine의 식을 의미함)를 더하고 식 (6)과 결합한 후 수심이 일정한 경우에 선형화하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - gh\nabla^2\phi - \frac{h^2}{3}\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -gf_P \tag{36}$$

ϕ와 f_P를 $\phi = \bar{\phi}\exp[i(k_y y - \omega t)]$, $f_P = \mathcal{F}_P \exp[i(k_y y - \omega t)]$로 표현하여 위 식에 대입하면, 다음과 같은 1차원 Helmholtz 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x^2} + k_x^2\bar{\phi} = \frac{gk^2}{\omega^2}\mathcal{F}_P \tag{37}$$

부록에 의해서 식 (37)의 특수해는 다음과 같다.

$$\bar{\phi} = -i\frac{gk^2\Delta x}{2\omega^2 k_x}\mathcal{F}_P \exp[ik_x|x - x_s|] \tag{38}$$

그리고 조파하고자 하는 파는 다음과 같다.

$$\bar{\phi} = -i\frac{ga}{\omega\left[1 + \frac{1}{3}(kh)^2\right]}\exp[ik_x|x - x_s|] \tag{39}$$

식 (38)과 식 (39)를 비교하면 $\mathcal{F}_P$를 구할 수 있고 이것을 식 (35)에 대입하면 원천함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_P = \frac{2aC}{\Delta x\left[1 + \frac{1}{3(kh)^2}\right]}\exp[i(k_y y - \omega t)]\cos\theta \tag{40}$$

3.2 Suh 등(1997)의 확장형 완경사방정식

원천함수 f_S(아래첨자 S는 Suh 등의 식을 의미함)를 식 (13)의 우변에 더하고, 수심이 일정한 경우에 식 (14)와 함께 η를 소거하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \overline{CC_g}\nabla^2\phi + (\overline{\omega}^2 - \overline{k^2 CC_g})\phi = -gf_S \tag{41}$$

ϕ와 f_S를 $\phi = \bar{\phi}\exp[i(k_y y - \omega t)]$, $f_S = \mathcal{F}_S \exp[i(k_y y - \omega t)]$로 표현하여 위 식에 대입하면, 다음과 같은 1차원 Helmholtz 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x^2} + k_x^2\bar{\phi} = \frac{g}{\overline{CC_g}}\mathcal{F}_S \tag{42}$$

부록에 의해서 $\bar{\varphi}$의 특수해는 다음과 같다.

$$\bar{\varphi} = -i\frac{g\Delta x}{2k_x\overline{CC_g}}\mathcal{F}_S \exp[ik_x|x - x_s|] \tag{43}$$

그리고, 조파하고자 하는 파는 다음과 같다.

$$\bar{\varphi} = -i\frac{ag}{\omega}\exp[ik_x|x - x_s|] \tag{44}$$

식 (43)과 (44)를 비교하면 $\mathcal{F}_s$를 구할 수 있고 이것을 식 (35)에 대입하면 원천함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_S = \frac{2a\overline{CC_g}}{C\Delta x}\exp[i(k_y y - \omega t)]\cos\theta \tag{45}$$

3.3 Lee 등(1998)의 확장형 완경사방정식

원천함수 f_{Lm}(아래첨자 Lm는 Lee 등의 식으로서 규칙파(monochromatic waves)를 해석할 수 있는 모형을 의미함)을 식 (20)의 우변에 더하고, 수심이 일정한 경우에 식 (20), (21)에서 Q를 소거하면, 다음과 같이 η로 표현된 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \overline{C}^2\nabla^2\eta = -i\omega f_{Lm} \tag{46}$$

η와 f_{Lm}를 $\eta = \bar{\eta}\exp[i(k_y y - \omega t)]$, f_{Lm}

$= \mathcal{F}_{Lm}\exp[i(k_y y-\omega t)]$ 로 표현하여 위 식에 대입하면, 다음과 같은 1차원 Helmholtz 식을 구 η 할 수 있다.

$$\frac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial x^2}+k_x^2\tilde{\eta}=i\frac{k}{\overline{C}}\mathcal{F}_{Lm} \tag{47}$$

부록에 의해서 $\tilde{\eta}$ 의 특수해는 다음과 같다.

$$\tilde{\eta}=\frac{k\Delta x}{2k_x\overline{C}}\mathcal{F}_{Lm}\exp[ik_x|x-x_s|] \tag{48}$$

조파하고자 하는 파의 $\tilde{\eta}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{\eta}=a\exp[ik_x|x-x_s|] \tag{49}$$

식 (48)과 식 (49)를 비교하면 $\mathcal{F}_{Lm}$ 을 구할 수 있고 이것을 식 (35)에 대입하면 원천함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_{Lm}=\frac{2a\overline{C}}{\Delta x}\exp[i(k_y y-\omega t)]\cos\theta \tag{50}$$

3.4 Lee 등(2003)의 확장형 완경사방정식

원천함수 f_{Lr}(아래첨자 Lr는 Lee 등의 식으로서 불규칙파(random waves)를 해석할 수 있는 모형을 의미함)을 식 (28)의 우변에 더하면 수심이 일정한 경우에 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{CC}_g\nabla^2\xi+\overline{k^2CC}_g\xi+i\overline{\frac{\partial(CC_g)}{\partial\omega}}\nabla^2\frac{\partial\xi}{\partial t}+i\overline{\frac{\partial(k^2CC_g)}{\partial\omega}}\frac{\partial\xi}{\partial t}=f_{Lr} \tag{51}$$

ξ 와 f_{Lr}를 $\xi=\tilde{\xi}\exp(ik_y y)$, $f_{Lr}=\mathcal{F}_{Lr}\exp(ik_y y)$ 로 표현하여 위 식에 대입하고, $\partial\xi/\partial t=-i\Delta\omega\,\xi$ 의 관계식을 이용하면 다음과 같은 1차원 Helmholtz 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2\tilde{\xi}}{\partial x^2}+k_x^2\tilde{\xi}=\frac{\mathcal{F}}{\overline{CC}_g+\Delta\omega\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}} \tag{52}$$

부록에 의해서 $\tilde{\xi}$의 특수해는 다음과 같다.

$$\tilde{\xi}=-i\frac{\Delta x}{2k_x\left[\overline{CC}_g+\Delta\omega\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\right]}\times\mathcal{F}_{Lr}\exp[ik_x|x-x_s|] \tag{53}$$

조파하고자 하는 파의 ξ는 다음과 같다.

$$\xi=a\exp[ik_x|x-x_s|]\exp(-i\Delta\omega t) \tag{54}$$

식 (53)과 (54)를 비교하면 $\mathcal{F}_{Lr}$ 을 구할 수 있고 이것을 식 (35)에 대입하면 원천함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_{Lr}=i\frac{2ak\left[\overline{CC}_g+\Delta\omega\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\right]}{\Delta x}\times\exp[i(k_y y-\Delta\omega t)]\cos\theta \tag{55}$$

4. 수치실험

본 장에서는 제3장에서 유도된 각 모형의 원천함수를 수치모의를 통해서 검증하였다. Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식은 심해에서 위상속도와 군속도가 발산하기 때문에 천해에서만 수치실험을 수행하였고, 시간의존 확장형 완경사방정식(Suh 등, 1997; Lee 등, 1998; Lee 등, 2003)은 천해($kh=0.1\pi$)와 심해($kh=\pi$)에서 수치실험을 수행하였다.

수치실험의 계산영역은 Fig. 2와 같다. 계산영역은 조파선의 좌· 우로 2.5 파장의 거리만큼 있고, 양 쪽에 스폰지 층을 두어 에너지를 흡수하였다. 영역의 가운데에 Δx 폭의 조파함수를 두었다.

Peregrine의 식은 예측자 수정자 법으로 시간 차분 하였고 중앙차분법으로 공간 차분 하였다. Suh 등의 식은 Adams-Moulton 예측자 수정자 기법으로 시간 차분 하고, 중앙차분법을 사용하여 공간 차분 하였다. Lee 등(1998)의 식은 Leap-Frog 기법으로 시간 및 공간 차분 하였고, Lee 등

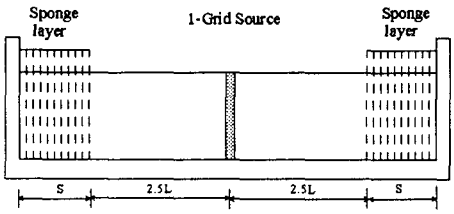

Fig. 2. Computational domain of numerical experiment.

(2003)의 식은 Crank-Nicholson 기법으로 시간 및 공간 차분 하였다.

Fig. 3은 Peregrine의 식에서 원천함수 기법을 사용하여 조파한 결과이다. 그리고 Fig. 4~6은 천해(Fig. a)와 심해(Fig. b)에서 확장형 완경사방정식에서 원천함수 기법을 사용하여 조파한 결과이다. 모든 경우에 원하는 대로 파고 및 파의 위상이 만들어졌다.

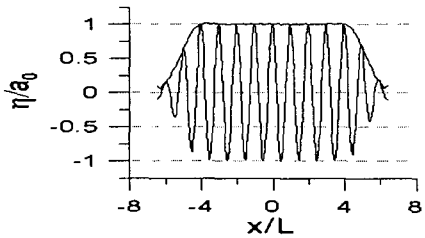

Fig. 3. Generation of waves by 1-grid source function for Peregrine's (1967) equations.

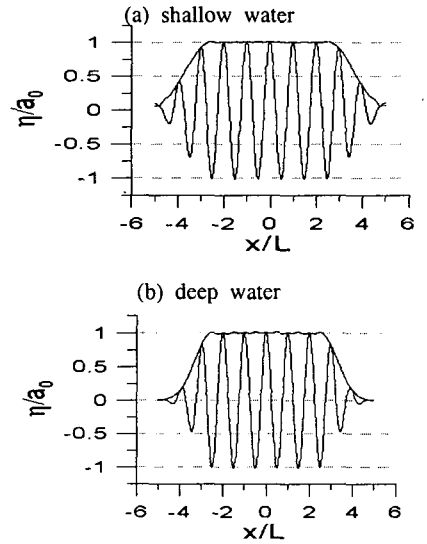

Fig. 4. Generation of waves by 1-grid source function for Suh et al.'s (1997) equations.

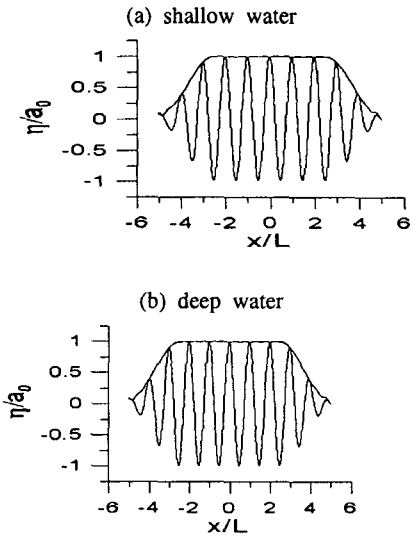

Fig. 5. Generation of waves by 1-grid source function for Lee et al.'s (1998) equations.

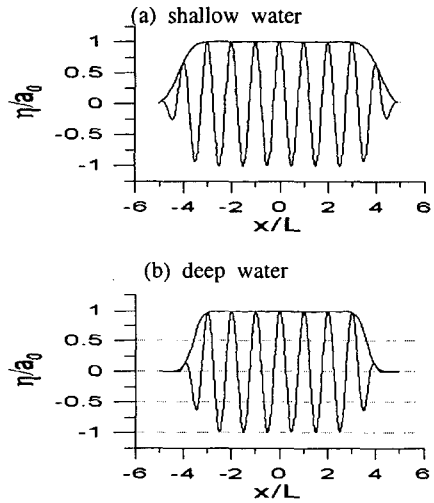

Fig. 6. Generation of waves by 1-grid source function for Lee et al.'s (2003) equation.

5. 선 조파기법과 한 격자 폭의 원천함수기법의 상관성

이번 장에서는 제2장에 사용된 선 조파기법과 과 제3장에서 사용된 한 격자 폭의 원천함수기법 사이의 관계를 살펴보았다. 선 조파기법은 매시간 단계에 이산화 된 파랑식에서 계산된 수면변위 η에 η^*를 더해주는 방법이다. 원천함수기법은 지배방정식에 포함된 원천함수 f를 해석적인 방법으로 구하여 파랑식에 f가 포함된 식을 이산화하여 계산한다.

원천함수가 더해지는 식 (5), (13), (20), (28)은 보존식(conservation equation)이거나 이와 유사하다. 원천항을 포함한 보존식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}g(q)=S \tag{56}$$

여기서 q는 보존되는 물리량, $g(q)$는 흐름(flux)이고 S는 원천항이다. 식 (56)을 다음과 같이 두 식으로 분리할 수 있다.

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}g(q)=0 \tag{57}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=S \tag{58}$$

식 (57)은 보존식이고 식 (58)은 원천항이 포함되어 발생하는 물리량 q의 시간에 따른 증가율이다. 부분단계분리법(fractional step splitting method)이란 식 (57)을 사용하여 계산된 물리량 q에 식 (58)을 사용하여 원천항을 더하는 것을 말한다. 보존식 (57)을 n번째 시간 단계의 값으로부터 $(n+1)$번째 시간 단계에 계산된 물리량 q를 q^{model}이라고 하고, $(n+1)$번째 시간 단계에 원천항을 포함한 식 (56)을 푼 결과를 q^{n+1}이라고 하면, 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$q^{n+1}=q^{model}+q^{*} \tag{59}$$

위 식에서

$$q^{*}=S\Delta t \tag{60}$$

원천함수를 포함한 파랑식에 부분단계분리법을 적용하면, Peregrine(1967)의 식, Suh 등(1997)의 식, Lee 등(1998)의 식에서는 원천함수와 보존식 (56)의 원천항이 같으므로($S=f$), 조파선에서 이산화 된 파랑식으로 계산된 수면변위 η에 더해주는 값 η^{*}는 각 파랑식에서 다음과 같다.

$$\eta^{*}=f_P\Delta t$$
$$=2a\exp[i(k_y y-\omega t)]$$
$$\times\frac{C}{\left[1+\frac{1}{3(kh)^2}\right]}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \tag{61}$$

$$\eta^{*}=f_S\Delta t$$
$$=2a\exp[i(k_y y-\omega t)]$$
$$\times\frac{\overline{C\,C_g}}{C}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \tag{62}$$

$$\eta^{*}=f_{Lm}\Delta t$$
$$=2a\exp[i(k_y y-\omega t)]\frac{C\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \tag{63}$$

비스듬히 입사하는 선형파를 조파하는 경우에 y축 방향으로 k_y의 파수를 가지는 sin파형을 사용하므로(Lee and Suh, 1998) 위의 모든 값들은 에너지전달 개념을 사용하여 선 조파기법으로 조파할 때 수면변위에 더해주는 값 η^{*}(즉, 식 (12), (19), (27))과 일치한다.

Lee 등(2003)의 식은 보존식의 형태가 아니므로, 원천함수기법을 선 조파기법와 비교하기 위해서 조파하고자 하는 파의 정보로부터 상미분방정식을 유도하여야 한다. 조파하는 파는 다음과 같다.

$$\xi=a\exp[i(k_x|x-x_s|+k_y y-\Delta\omega t)] \tag{64}$$

이로부터 $\nabla^2\xi$는 다음과 같이 구해진다.

$$\nabla^2\xi=-k^2\xi \tag{65}$$

위 식을 식 (51)에 대입하고, ξ의 시간미분항과 원천항으로 구성된 상미분 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\overline{C\,C_g}+\Delta\omega\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}}{\dfrac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega}-k^2\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}}$$
$$\times\frac{2ak_x}{\Delta x}\exp[i(k_y y-\Delta\omega t)]=S \tag{66}$$

따라서 매시간 간격마다 ξ에 더해주는 값 ξ^{*}는 다음과 같다.

$$\xi^* = S\Delta t$$

$$= a\exp[i(k_y y - \Delta\omega t)]$$

$$\times \frac{2k\left[\overline{CC_g} + \Delta\omega\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}\right]}{\dfrac{\overline{\partial(k^2CC_g)}}{\partial\omega} - k^2\dfrac{\overline{\partial(CC_g)}}{\partial\omega}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\cos\theta \tag{67}$$

이 값은 Lee 등(2003)의 식에서 에너지전달 개념을 사용하여 선 조파기법으로 조파할 때 ξ에 더해주는 값 ξ^*(즉, 식 (34))와 같다.

6. 맺음말

본 연구에서 현재까지 개발된 내부조파기법인 선 조파기법과 원천함수기법의 상관성을 살펴보았다. 먼저 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식, Suh 등(1997), Lee 등(1998), Lee 등(2003)의 확장형 완경사방정식에 에너지전송의 개념으로 선 조파기법을 사용하여 매시간 더해지는 수면 변위 값을 정리하였다. 그 다음 원천함수기법에 의한 조파 시 한 격자 폭의 조파 띠에 분포한 조파함수를 해석적으로 유도하였다. 또한 수치실험을 통하여 한 격자 폭의 원천함수를 사용하여 Boussineq 방정식과 확장형 완경사방정식에서 내부조파를 성공적으로 수행하였다. 마지막으로 원천함수 계산 시 부분단계분리법을 적용하면, 원천함수가 없는 파랑식에서 계산된 수면변위에 원천항을 더해주는 값이 선 조파기법 사용 시 에너지 전달의 개념으로 더해지는 수면변위 값과 똑같다는 것을 확인하였다.

본 연구의 성과는 두 가지로 요약된다. 첫 번째로 한 격자에 분포하는 조파함수를 유도하였고, 수치실험을 통해서 한 격자만의 조파함수로도 충분히 안정된 파를 조파할 수 있었다. 이는 Gaussian 형태의 조파함수보다 좁은 폭의 조파함수를 사용할 수 있으므로, 조파로 인한 계산영역의 낭비를 줄일 수 있는 것이다. 또한 비선형파의 조파도 가능하다. 왜냐하면 한 격자 폭에서 비선형파(예를 들어, Cnoid 파)가 선형의 전송 개념으로 조파되지만 한 격자 폭의 조파 띠를 벗어나서는 파랑식에 의해서 비선형으로 전송될 것이다. Lee 등(2001)은 선 조파기법을 사용하여 Cnoid 파의 내부조파를 성공적으로 수행하였다.

두 번째로 조파함수를 파랑식에서 분리하여 상미분방정식으로 계산하는 부분단계분리법을 적용하면, 에너지 전송의 개념에서 고안된 기존의 선 조파기법과 일치하였다. 즉, 조파선에서 매시간 계산된 수면변위에 조파하고 수면 변위 값을 더해줄 때 에너지 전송의 개념을 사용하여야 한다는 것이 해석적으로 증명된 것이다.

그러나, 원천항을 포함한 파랑식에 부분단계분리법을 적용하는 것이 합리적이어야만 에너지흐름을 수면변위에 더하는 내부조파기법을 사용하는 경우에 정확하게 조파된다. 따라서 부분단계 분리법의 적합성에 대한 연구가 더 필요한 것으로 판단된다.

부 록

보존식 형태의 파랑식의 우변에 원천함수 f를 포함할 경우 f의 성분에서 y축 방향의 조화항과 시간의 조화항을 제거하면 다음과 같은 비동차 1차원 Helmholtz 식이 유도된다(식 (37), (42), (47), (52) 참조).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k_x^2 F = A\tilde{f}(x,t) \tag{68}$$

위 식에서 $\tilde{F}$는 수면변위 또는 속도포텐셜 함수 F에서 y축 방향의 조화 항과 시간의 조화 항이 제거된 값이고 A는 $\tilde{f}$의 계수이다. 이 식의 동차해는 $\pm x$방향으로 주기적으로 변하는 선형파이다.

$$F_h = \exp(\pm ik_x x) \tag{69}$$

식 (68)의 특수해를 구하기 위해서 다음의 식을 만족하는 Green 함수, $G(x,x')$를 구한다.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + k_x^2 G = \delta(x - x') \tag{70}$$

이때, G와 F는 다음과 같은 선형파의 경계조건을 만족한다.

$$\frac{\partial^n G}{\partial x^n} = (+ik_x)^n G; \qquad x \to +\infty \tag{71a}$$

$$\frac{\partial^n G}{\partial x^n} = (-ik_x)^n G; \qquad x \to -\infty \qquad (71b)$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n} = (+ik_x)^n F; \qquad x \to +\infty \qquad (71c)$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n} = (-ik_x)^n F; \qquad x \to -\infty \qquad (71d)$$

식 (70)과 방사 경계 조건식 (71)을 만족하는 $G(x, x')$는 다음과 같다.

$$G(x, x') = \begin{cases} G_+ = -\dfrac{i}{2k_x}\exp\left[i(k_x(x-x')\right], & x > x' \\ G_- = -\dfrac{i}{2k_x}\exp\left[i(k_x(x'-x)\right], & x < x' \end{cases} \qquad (73)$$

식 (70)의 양변에 $F(x')$을 곱하고 x'에 대해서 $-\infty$ 부터 $+\infty$까지 적분하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x')\left[\frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial x^2} + k_x^2 G(x, x')\right]dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x')\delta(x-x')\,dx' \qquad (74)$$

부분적분하고, $G(x, x')$의 경계조건을 적용하고, 델타함수의 정의를 사용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') A\tilde{f}(x', t)\,dx' \\ &= \int_{-\infty}^{x} G_+(x, x') A\tilde{f}(x', t)\,dx' \\ &\quad + \int_{x}^{+\infty} G_-(x, x') A\tilde{f}(x', t)\,dx' \end{aligned} \qquad (75)$$

조파함수로서 조파선을 중심으로 좌우로 $\Delta x/2$의 폭에 일정한 값을 갖는 다음 값을 사용한다.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} D, & |x - x_s| \le \Delta x/2 \\ 0, & |x - x_s| < \Delta x/2 \end{cases} \qquad (76)$$

조파선으로부터 $+x$방향으로 진행하는 파의 경우 식 (75)의 두 번째 적분 값은 무시할 만큼 작다. 따라서 F는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} G_+(x, x') A\tilde{f}(x', t)\,dx' \\ &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(x, x') A\tilde{f}(x', t)\,dx' \\ &= \int_{x_s - \Delta x/2}^{x_s + \Delta x/2} G_+(x, x') A\tilde{f}(x', t)\,dx' \\ &= \lambda AD\exp\left[ik_x(x - x_s)\right] \end{aligned} \qquad (77)$$

여기서, λ는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{i}{2k_x}\int_{x_s - \Delta x/2}^{x_s + \Delta x/2} \exp(-ik_x\zeta)\,d\zeta \\ &= -\frac{i}{k_x^2}\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \\ &\cong -i\frac{\Delta x}{2k_x} \end{aligned} \qquad (78)$$

따라서, F의 특수해는 다음과 같다.

$$F(x) = -i\frac{\Delta x}{2k_x} AD\exp\left[ik_x(x - x_s)\right] \qquad (79)$$

조파선으로부터 $-x$방향으로 진행하는 파에 경우 식 (77)부터 (79)의 과정을 따르면 다음과 같은 특수해를 얻을 수 있다.

$$F(x) = -i\frac{\Delta x}{2k_x} AD\exp\left[ik_x(x_s - x)\right] \qquad (80)$$

따라서, 식 (79)와 (80)을 포함한 특수해는 다음과 같다.

$$F(x) = -i\frac{\Delta x}{2k_x} AD\exp\left[ik_x|x - x_s|\right] \qquad (81)$$

참고문헌

이종인, 윤성범, 이정규. (1999). 다성분 파동방정식의 내부조파와 유속성분의 특성. 대한토목학회논문집, 제19권 제2-5호, 635-644.

Copeland, G.J.M. (1985). A practical alternative to the mild-slope wave equation. Coastal Eng., 9, 125-149.

Kim, G., Lee, C., and Suh, K.D.(2004). Generation of random waves in time-dependent extended mild-slope equations using a source function method. Coastal Eng. (submitted).

Kubo, Y., Kotake, Y., Isobe, M., and Watanabe, A.(1992). Time-dependent mild slope equation for random waves. Proc. 23rd Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, 419-431.

Larsen, J. and Dancy, H.(1983). Open boundaries in short wave simulations a new approach. Coastal Eng., 7, 285-297.

Lee, C., Cho, Y.-S., and Yum, K. (2001). Internal generation of waves for extended Boussinesq equations. Coastal Eng., 42, 155-162.

Lee, C., Kim, G., and Suh, K.-D.(2003). Extended mild-slope equation for random waves. Coastal Eng., 48, 277-287.

Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S., and Suh, K.D. (1998). Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. Coastal Eng., 34, 243-257.

Lee, C. and Suh, K.D.(1998). Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations. Coastal Eng., 34, 35-57.

Madsen, P.A. and Larsen, J.(1987). An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation, Coastal Eng., 11, 329-351.

Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y. (1994). A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions, Proc. of the 24th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, 427-441.

Nwogu, O.(1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J. Waterway, Port, Coastal Ocean Eng., 119, 618-638.

Peregrine, D.H.(1967). Long waves on a beach. J. Fluid Mech., 27, 815-827.

Radder, A.C. and Dingemans, M.W.(1985). Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves. Wave Motion, 7, 473-485.

Suh, K.D., Lee, C., and Park, W.S.(1997). Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. Coastal Eng., 32, 91-117.

Wei, G., Kirby, J.T., and Sinha, A.(1999). Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. Coastal Eng., 36, 271-299.