

국소적 격자 삽입법을 이용한 반 원주 내의 스핀업 유동에 대한 연구

여창호[†] · 서용권^{*}

Study on the Spin-up of Fluid in a Semi-Circular Container Using a Zonal-Embedded-Grid Method

Yong Kweon Suh and Chang Ho Yeo

Key Words: Zonal embedded grid(국소적 격자 삽입), Spin-up(스핀 업), Ekman pumping(에크만 분출), Semi-circular container(반원형 용기)

Abstract

In this paper the numerical method with a zonal embedded grid system was applied to the spin-up flow within a semi-circular container. Flow visualization was also performed on a rotating table. The results show that at a low level of damping (i.e. low viscosity and high liquid depth) a cyclonic cell produced initially near the left-hand-side corner of the container moves along a wall and merged with the cell on the right-hand-side.

1. 서 론

스핀업이란 유체를 담고 있는 용기가 정지 혹은 강체회전(solid-body rotation)상태에서 갑자기 회전속도가 증가하는 것을 의미한다. 이 상태에서 용기내의 유동은 여러 가지 특성을 보인다.

van Heijst⁽¹⁾ 등은 실험을 통하여 직사각형 용기 내의 유동특성에 대하여 연구한 바가 있는데 용기 내에 생성되는 셀의 개수가 종횡비와 작은 교란에 의해 바뀌어 질 수 있다는 것을 밝혔고, Suh⁽²⁾ 등은 용기 바닥에서의 점성작용에 따른 Ekman pumping 모델을 제시하여 회전하는 용기 내의 3차원 유동특성에 대한 보다 정확한 2차원 모델을 제시하였다. 그리고 본 연구에서와

같이 반원주 용기 내의 유동에 대하여서는 van Heijst 연구그룹⁽³⁾이 선행 연구를 수행한 바가 있으나 수치해석과 실험 결과가 잘 맞지 않는 것으로 보고 되었다. 그래서 본 연구에서는 보다 정확한 수치해석의 수행과 실험을 통한 수치해석의 타당성을 확인하고자 한다.

수치해석에서는 국소적 격자 삽입법(zonal embedded grid)을 사용하였는데 이는 기존의 방법중 원통좌표계를 사용하여 구성된 격자계가 중심부에서 집중되어 해석 수행중 문제점이 발생하는 것을 보완한 것으로 격자 망의 크기가 지역적으로 크게 다르지 않도록 한 것이다.

실험방법으로는 반원 용기를 제작하여 유체표면에 입자를 띄워 그 거동을 추적하였다.

2. 수치해석

2.1 유동모델과 지배방정식

[†] 동아대학교 대학원 기계공학과

E-mail : chy eo@donga.ac.kr

TEL : (051)200-6982 FAX : (051)200-7656

* 회원, 동아대학교 기계공학과

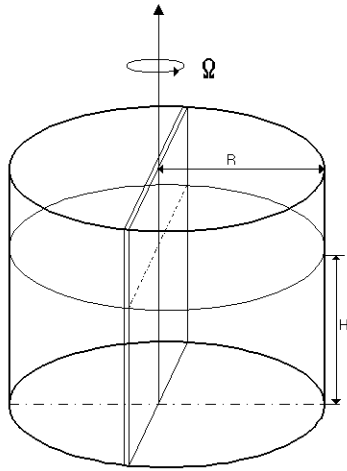


Fig. 1 Circular container

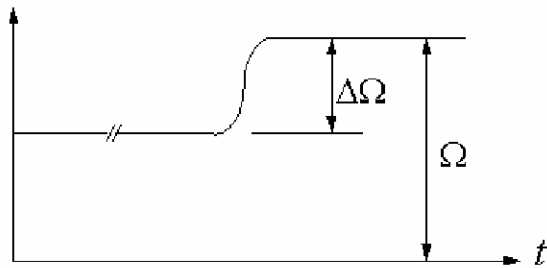


Fig. 2 Angular speed of the circular container

Fig. 1은 본 연구에서 사용한 유동모델이다. 여기서 Ω 는 원통의 회전 각속도이며, R 은 원통의 반경, H 는 수심이다. Fig. 2는 시간에 따른 용기의 각속도 변화를 나타낸 것이다.

본 연구에서는 2차원 비압축성 유동의 지배방정식을 용기의 중앙지점을 축으로 각속도 Ω 로 회전하는 원통좌표계로 나타낸다. 용기는 처음에 $\Omega - \Delta\Omega$ 의 각속도로 회전하다가 어느 시점에서 속도가 증가하여 최종 속도 Ω 에 도달하게 된다. 여기에서 $\Delta\Omega$ 는 스펀업을 위한 각속도 증분을 나타낸다.

시간을 $1/\Delta\Omega$, 공간좌표를 R , 속도를 $R\Delta\Omega$, 압력을 $\rho(R\Delta\Omega)^2$ 로 각각 무차원화한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = rw_E \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial rw}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - uw_E - 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + f(t)\right)v$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial rvw}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial \theta} + \frac{uw}{r} - vw_E - 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + f(t)\right)u$$

$$= -\frac{\partial p}{r\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - r \frac{df}{dt} \quad (2b)$$

여기서, t 는 무차원 시간, r, θ 는 용기와 같이 회전하는 무차원 좌표를 나타내며 f 는 용기의 각속도를 최종 각속도에 대해 무차원화한 것이며 다음과 같이 정의된다.

$$f = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \cos \omega t) & \text{for } 0 \leq t \leq t_s \\ 0 & \text{for } t > t_s \end{cases} \quad (3)$$

각속도의 변동은 $\cos \omega t$ 에 의하여 완만한 기울기를 가지며 변화한다. 이는 용기의 회전 각속도가 급격하게 변화함으로써 자유표면에 파동이 생기는 것을 막기위함이다.

그리고, w_E 는 용기 바닥에서의 점성작용에 따른 Ekman 분출효과를 나타내는 양으로서 와도(vorticity)

$$\xi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial rv}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

에 의해 아래와 같이 구해진다.

$$w_E = \left(\frac{1}{2h} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Re}} \right) \xi \quad (5)$$

로스비 수(Rossby number) ε 와 레이놀즈 수(Reynolds number) Re 는 다음과 같다.

$$Re = \frac{R\Delta\Omega^2}{\nu}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \quad (6)$$

경계조건은 $r=1$ 의 벽면에서 비침투 조건(impermeable condition)과 점착 조건(no-slip condition)을 적용하고, 반경방향의 칸막이(barrier)에서도 비침투, 점착 조건을 적용한다.

2.2 수치해석 방법

지배방정식의 차분화는 유한체적법에 근거하였으며, 원통좌표계에서 제작된 국소적 격자 삽입법을 사용하였다. 운동량 방정식의 시간적분은 4계 Runge-Kutta법으로 처리하였으며, 압력방정식은 ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) 법으로 수치해석 하였다.

3. 수치해석 및 실험 결과

Fig. 2는 $Re=5000$ 일 때 반원형 용기의 스핀업 유동에 대한 수치해석 결과를 실험결과와 비교한 것이다. 수치해석 결과는 유선(streamlines)이며, 실험은 액체(물)의 표면에 평균 직경 0.23mm 의 아크릴 파우더를 분산시켜 촬영한 궤적선(pathlines)이다. 그리고 배경회전은 반시계 방향이다. 실험 결과는 수치해석 결과와 잘 일치하고 있다. 초기 유동은 모든 영역에서 와도가 $\zeta=-2$ 로 균일한 흐름이며 벽면에 인접한 극히 얇은 경계층을 제외하면 대부분 비점성적이다. 초기에 대부분의 영역을 차지하는 시계방향의 이 와류는 배경회전과 반대방향이므로 엔티사이클로닉 와류(anticyclonic vortex)이다. 앞으로는 주 와류(main vortex)라고 부르기로 한다. 그리고 시간이 흐르면 하부 평면은 좌측 모서리 근처에서 상부 곡면은 우측 모서리 근처에서부터 유동의 박리가 시작되고 박리된 전단층은 말리면서(roll-up) 반시계 방향의 사이클로닉 와류(cyclonic vortex)를 형성한다. 이 와류를 앞으로는 2차 와류라고 부른다. 이 때 우측의 2차 와류는 상하로 길쭉한 모양으로, 그리고 좌측의 2차 와류는 둥근 모양으로 성장한다. 한편 2차 와류의 성장과 주 와류의 축소 과정에서 주 와류와 2차 와류 사이에는 두 쌍의 와류가 또다시 생성되는데, 좌측 영역에서는 하부 벽면에서, 우측 영역에서는 상부 벽면에서 생겨난다.(3차 와류라 부름). 그리고 동시에 좌측 모서리에서는 시계방향, 우측 모서리에서는 반시계 방향의 4차와류가 각각 만들어 진다. 이러한 와류들의 공통된 동적 특성은 발생→성장→쇠퇴→소멸의 과정을 거친다는 점이다. 주 와류는 배경회전이 완료되는 시점에서 최대 에너지를 가지고, 그 이후 줄곧 쇠퇴의 과정을 밟는다. 2차 와류는 $t=16$ 를 약간 넘는 시점까지는 성장하며 그 이후는 쇠퇴한다. 그리고 3, 4차 와류도 시점은 다르지만 이러한 유사한 과정을 거친다. 특이한 점은

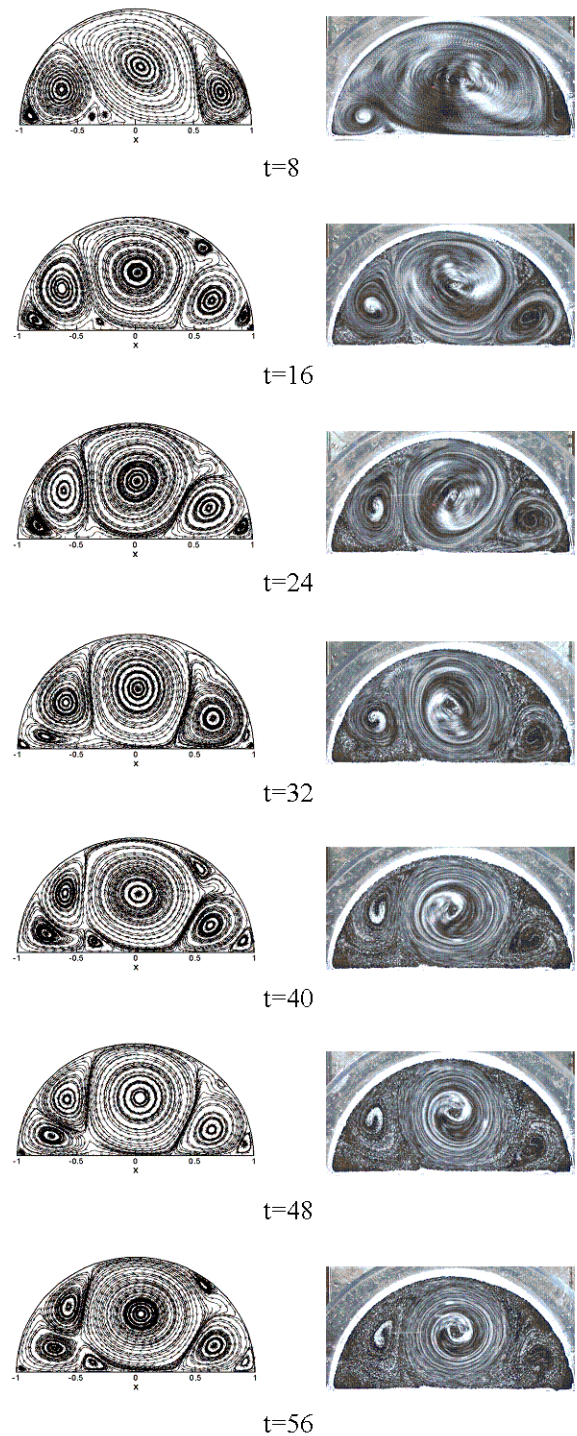


Fig. 2 Comparison between the numerical (left; streamlines) and experimental (right; pathlines) results at $Re=5000$, $\epsilon=1.0$, $h=1.0$, $\omega=6.54$

좌측의 2차 와류는 쇠퇴의 과정동안 상부 곡면 쪽으로 서서히 이동하며 우측의 2차 와류는 하부 평면 쪽으로 서서히 이동한다는 것이다. 이는 다분히 시계 방향으로 회전하는 주 와류의 영향때문이라 생각되며, 동시에 주 와류가 여전히 지배적임을 암시한다.

Fig. 3은 $Re=10000$ 일 때의 결과이다. 실험 결과와 수치해석 결과를 비교해 보면 잘 일치함을 볼 수 있다. 초기에는 시간은 빠르지만 $Re=5000$ 일 때와 비슷한 유동의 과정으로 보텍스가 생성되기 시작한다. 그러나 여기에서는 좌측에서 만들어진 2차 와류가 $t=48$ 에서 서서히 상단의 벽면쪽으로 움직이는 것을 볼 수가 있다. 그러다가 $t=56$ 에서 주 와류를 타고 넘어서 우측의 2차 와류와 같이 합쳐지는 것을 관찰할 수가 있다. 좌측에서 넘어 온 2차 와류는 우측의 2차 와류와 합쳐지면서 소멸되고 시간이 지나면 우측의 2차 와류 역시 쇠퇴의 과정으로 유동이 진행된다.

Fig. 4는 $Re=20000$ 일 때 높이의 변화에 따른 수치해석과 실험의 결과들이다. 먼저 $h=0.3$ 일 때 좌측에서 만들어진 2차와류는 벽면을 타고 상단으로 넘어가는 도중 얇은 수심에 따른 Ekman 분출효과가 커지는 영향으로 인해 우측으로 넘어가지 못하고 보텍스는 쇠퇴의 과정을 들어 간다. $h=0.5$ 일 때도 $h=0.3$ 과 비슷한 유동의 형태를 나타낸다. $h=0.7$ 에서부터는 좌측에서 만들어진 2차와류가 우측으로 넘어가는 과정을 볼 수가 있다. $h=0.9$ 의 경우에도 $h=0.7$ 과 진행과정은 비슷하다. 하지만 여기에서 특이한 점은 높이가 높아 질수록 보텍스가 넘어가는 시간이 더욱 더 빨라지리라 생각이 되나 $h=0.7$ 의 경우보다 더 느리게 유동이 진행됨을 볼 수가 있었다. $h=1.1$ 부터는 유동의 진행이 급격히 빨라짐을 볼 수가 있다. 높이에 따른 반원주 내의 유동에 대하여 실험한 결과는 수치해석한 결과와 비교해 시간적으로 약간의 차이를 보이지만 유동의 형태는 두 결과가 잘 일치하고 있다.

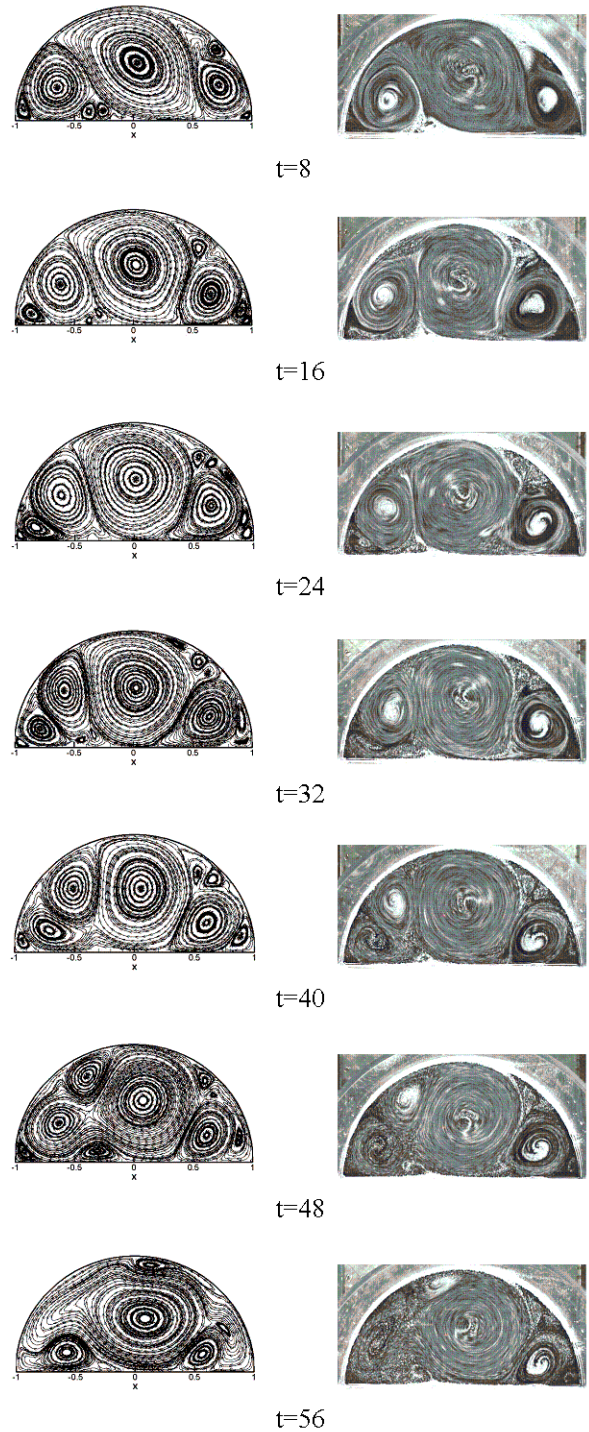


Fig. 3 Comparison between the numerical (left; streamlines) and experimental (right; pathlines) results at $Re=10000$, $\epsilon=1.0$, $h=1.0$, $\omega=6.54$

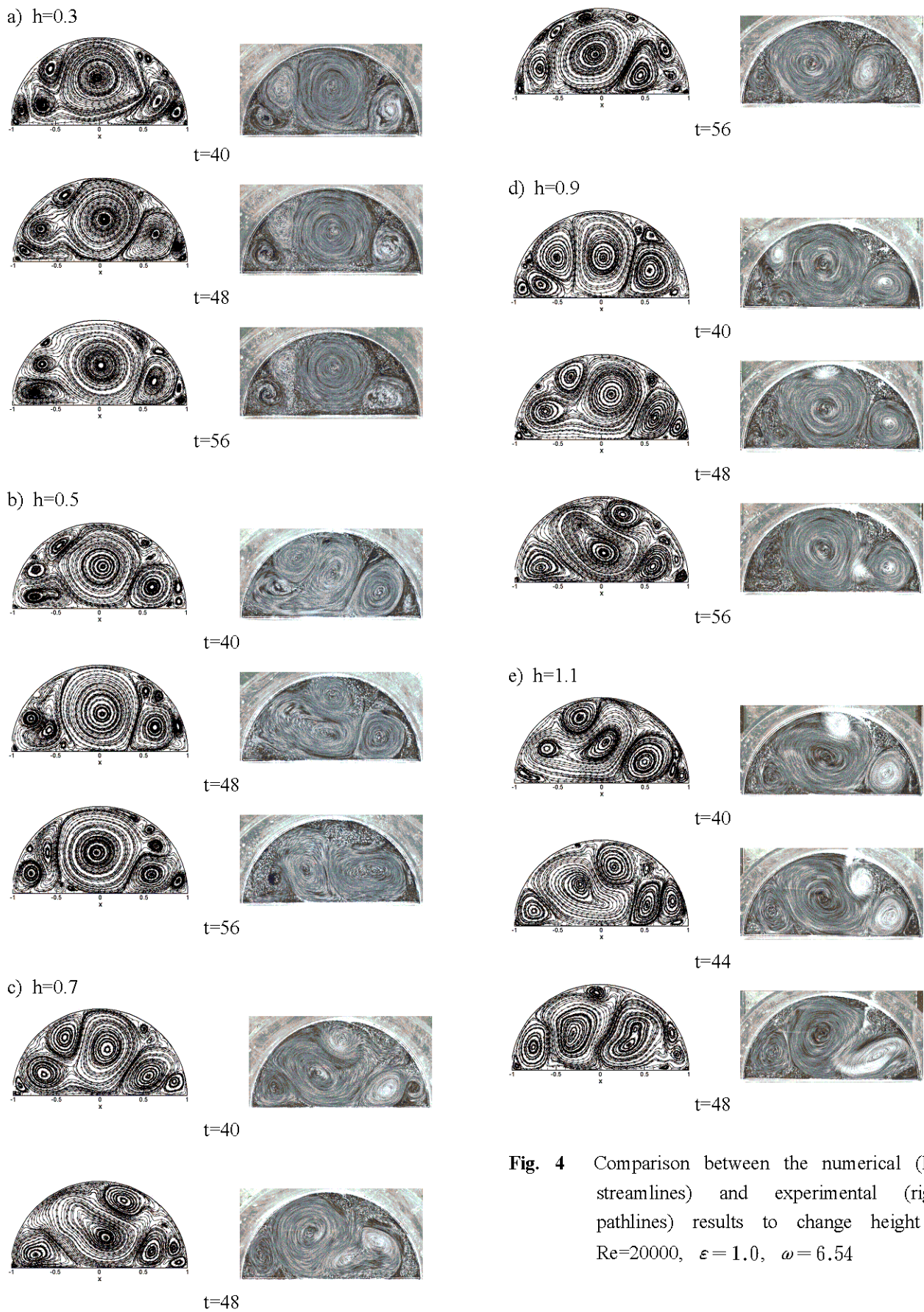


Fig. 4 Comparison between the numerical (left; streamlines) and experimental (right; pathlines) results to change height at $Re=20000$, $\epsilon = 1.0$, $\omega = 6.54$

4. 결 론

1) Zonal embedded grid에 의한 유동의 수치해석을 방법을 성공적으로 개발하였으며, 이를 원형 용기 내 감쇠유동에 적용한 결과 단순한 원통좌표계의 격자계에 비해 계산시간을 훨씬 더 크게 잡을 수 있는 이점이 있었다.

2) 중심부에서 원주방향으로의 격자 수가 상대적으로 적어져서 수치해의 정밀도가 떨어질 수 있는 문제점은 $O(\Delta\theta^4)$ 의 알고리즘을 사용함으로써 해결할 수 있었다.

3) 레이놀즈 수 5,000과 10,000, 로스비 수 1.0에 대하여 수치해석하고 실험결과와 비교해 본 결과 정량 및 정성적으로 잘 일치 하였다.

4) 레이놀즈 수 20000일때 높이를 변화시키면서 실험과 수치해석을 병행한 결과, 시간스텝에는 약간의 차이를 보이나 각각의 유동의 형태는 두 결과가 잘 일치함을 볼 수가 있었다.

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2002-041-D00080)에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- (1) van Heijst, G. J. F., Davies, P. A. and Davis, R. G., 1990, "Spin-up in a Rectangular Container", *Phys Fluids*, Vol. 2, pp. 150~191.
- (2) Suh, Y. K. and Choi, Y. H., 2002, "Study on the spin-up of fluids in a rectangular container using Ekman pumping models", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 458, pp. 103~132.
- (3) van Heijst, G. J. F., 1989, "Spin-up phenomena in non-axisymmetric containers", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 206, pp. 1171~1191.
- (4) Andersson, H. I., Billdal, J. T. and van Heijst, G. J. F., 1992, "Spin-up in a semicircular cylinder", *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 15, pp. 503~524.