

EK Pumps 내의 유동 해석에 관한 연구

민 정임[†] · 김 성진* · 김 덕종**

Analysis of fluid flow in EK pumps

Jung Yim Min, Sung Jin Kim, Duckjong Kim

Key Words : EK Pumps, Electroosmotic Flow, Porous Media (다공성 매질), Volume-averaging Approach (최적 평균법)

Abstract

EK pumps packed with particles inside capillaries are involved in the mixed electroosmotic flow and pressure driven flow. For analysis in the porous EK pumps, the volume-averaging technique is applied to derive the volume-averaged equations for momentum and electrical potential. By using the volume-averaged equations, analytical solutions for electric potential and velocity distribution due to the mixed electroosmotic and pressure driven flows are obtained. The present analysis is validated by comparison with numerical and experimental results for the case of microchannel EK pumps.

ζ zeta potential

기호설명

AR	aspect ratio
Da	Darcy number
e	electric charge
E	electric field
k	Boltzmann constant
K	permeability
n	number of ions
P	pressure
Q	volume flow rate
T	temperature
u	velocity

Greek symbols

α_s	wetted area per volume
ε	permittivity
λ_D	Debye length
μ	viscosity
ξ	porosity
ψ	potential

[†] 한국과학기술원 기계공학과 대학원

E-mail : fille@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3083 FAX : (042)869-8207

* 한국과학기술원 기계공학과

** 기계연구원 열유체공정기술연구부

1. 서론

많은 분자들은 수용액에서 양전하나 음전하를 띠고 있는데 이때 외부에서 전기장을 걸어주면 각 이온들은 반대 전하를 띤 전극으로 이동하게 된다. 모세관에서 이온을 띤 물질이 분리 되어지는데 기여하는 유체의 움직임에는 Electroosmotic Flow 가 있다. 대표적인 예를 보면, Fused Silica Capillary 의 벽은 표면 Silanol Group 이 이온화되어 수용액 중 에서 음전하를 띠고 있다. 그러므로 Silica 표면과 용액 사이의 계면에서는 Bulk 용액에서와는 달리 양전하를 띤 전해질이 모여서 전기층 (Electrical Double Layer) 을 만든다. 여기에 Silica 표면과 평행하게 전장을 걸어주면 표면 가까이에 더 많은 이온들은 음극으로 이동하고 이때 이온들이 Solvate 되어 용매를 끌고 이동하게 된다. 이러한 원리를 이용한 공학적응용 사례로 Electrokinetic Pumps (EK Pumps) 가 대표적이다. EK Pumps 는 펌프 내 움직이는 부분이 없고, 특히 높은 압력을 생산해 내는 고유의 장점이 있다 [1-4].

일반적으로 Electroosmosis 에 의해 작은 유량이 발생한다. 하지만 EK Pumps 의 높은 압력 이외

에 유량의 증가 역시 필요하다. 이를 위한 시도들 중에서 다공성 매질을 이용한 Pumps 제작이 있다. Capillaries (~O(100μm)) 안에 Particles (~O(1μm))를 채워 넣어서 Capillaries 의 단면적은 증가시키며 Pore 의 크기는 작게 하여, 압력과 유량을 모두 증가시키려고 하는 것이다. 이에 다공성 매질을 이용한 EK Pumps 에 대한 실험적 연구가 많이 진행되어 왔다 [5-7]. 하지만 이를 뒷받침해주는 해석적 모델은 미흡했다. 본 연구에서는 다공성 매질을 이용한 EK Pumps 의 유체 유동을 예측하는 해석적 모델을 제시하였다.

2. 문제의 정의 및 지배방정식

2.1 문제의 정의

그림 1(a)는 EK Pumps 의 개략도이다. 외부에서 걸어주는 전기장에 의해 발생하는 Electroosmotic Flow 에 의해 펌프 뒤쪽에서의 수위가 높아지게 된다. 수위의 상승은 압력의 상승을 의미하게 되며, 뒤쪽에서의 압력의 상승은 Electroosmotic Flow 와 반대 방향으로의 Pressure Driven Flow 을 발생하게 된다. 즉 EK Pumps 내의 유동은 Electroosmotic Flow 와 Pressure Driven Flow 이 결합되어 있는 형태이다. (그림 1(b)) 이때 유동은 완전 발달 유동으로 간주되며, Electroosmotic Flow 와 Pressure Driven Flow 은 선형 결합으로 이루어 진다. 또한 EK Pumps 내는 다공성 매질 (Porous materials)로 이루어져 있다 [8].

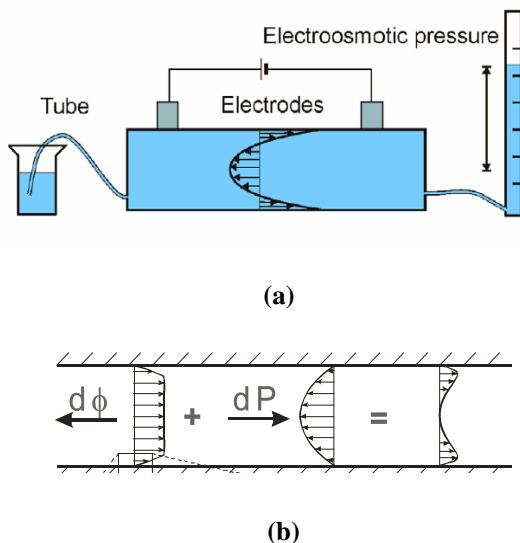


Fig. 1 (a) Schematic of EK pumps and (b) Principle of operation of EK pumps

2.2. 지배방정식

EK Pumps 내의 유동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\mu \nabla^2 u - \epsilon \nabla^2 \psi E_x - \nabla P = 0 \quad (1)$$

위 식은 완전 발달 유동을 만족하게 되어 유동의 대류 항이 생략된 식이다. 좌변의 첫 항은 점성력을 의미하는 항이고 둘째 항은 외부에서 걸어준 전기장에 의한 전기력을 나타내고, 마지막 항은 유동 방향으로의 압력 강하를 의미한다.

식 (1)은 순수한 Electroosmotic Flow 와 Pressure Driven Flow 으로 다음과 같이 두 식으로 분리 되어진다.

$$\mu \nabla^2 u_{eo} - \epsilon \nabla^2 \psi E_x = 0 \quad (2)$$

$$\mu \nabla^2 u_p - \nabla P = 0 \quad (3)$$

여기서 $u = u_{eo} + u_p$ 이다. 즉 EK Pumps 내의 유체 유동은 Electroosmotic Flow 에 의한 유동과 그 반대 방향으로 Pressure Driven Flow 의 선형적인 결합으로 이루어 진다. 식 (2)의 구동력을 의미하는 전기력은 EK Pumps 내에 발생하는 Electric Potential, ψ 에 의해 결정된다. Electric Potential 은 Poisson-Boltzmann 식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\nabla^2 \psi = \frac{2n_0 e z}{\epsilon} \sinh\left(\frac{ze\psi}{kT}\right) \quad (4)$$

2.3. Volume Averaging 방법

그림 2 에서 보듯이, 다공성 매질로 이루어진 EK Pumps 내의 유동을 해석하기 위해서 Volume Averaging 접근법을 이용하여 간단히 해석하고자 한다. 이를 위해서 Local Volume Averaging 방법을 이용하여 앞에서 제시된 지배방정식들을 다음과 같이 Volume-Averaged Equations 으로 유도하고자 한다.

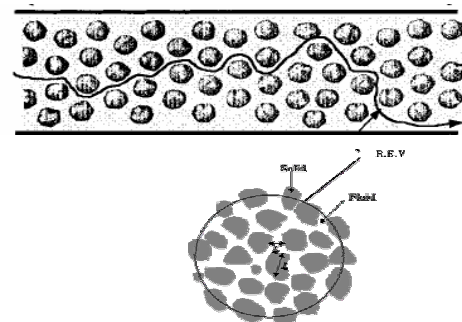


Fig. 2 Porous EK Pumps

Local Volume Averaging 은 다음과 같이 정의 된다.

$$\langle \Psi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \Psi dV \quad (5)$$

유체 상 (Fluid Phase)에서의 Intrinsic Averaging 다음과 같다.

$$\langle \Psi \rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \Psi dV \quad (6)$$

위 두 종류의 Averaging 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\langle \Psi \rangle = \xi \langle \Psi \rangle_f \quad (7)$$

또한, Gradient 항을 다룰 때 사용되는 다음과 같은 Volume Averaging Theorem 이 있다.

$$\langle \nabla \Psi \rangle = \nabla \langle \Psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \Psi \cdot \mathbf{n} dA \quad (8)$$

식 (6)와 (8)를 식 (2)와 (3)에 대입하여 다음 식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \langle u_{eo} \rangle_f - \varepsilon \nabla^2 \langle \psi \rangle_f E_x \\ + \frac{1}{V_f} \int_{A_{sf}} [\mu (\nabla u_{eo} \cdot \mathbf{n}) - \varepsilon (\nabla \psi \cdot \mathbf{n}) E_x] dA_s = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

$$\mu \nabla^2 \langle u_p \rangle_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_{sf}} \mu (\nabla u_p \cdot \mathbf{n}) dA_s - \nabla \langle P \rangle_f = 0 \quad (10)$$

식 (9)와 (10)은 Pure Electroosmotic Flow 와 Pressure Driven Flow 대한 Local Volume Averaging 된 지배 방정식들이다.

식 (10) 좌변의 첫째항은 Macroscopic Viscous Force 를 그리고 두번째 항은 Microscopic Viscous Force 를 의미한다. 전자는 벽면 근처에서 발생하는 전단력을 의미하므로 벽면 근처에서 지배적이며, 후자는 다공성 매질 안의 고체 상 표면에서 발생하는 전단력이므로 벽면에서 떨어진 다공성 매질 내에서 크기가 지배적이 된다. 이 항은 또한 Darcy term 으로 알려져 있다. 식 (10)는 잘 알려진 Brinkman Darcy extended 식으로 표현된다.

$$\mu \nabla^2 \langle u_p \rangle_f + \frac{\mu}{K} \langle u_p \rangle_f - \nabla \langle P \rangle_f = 0 \quad (11)$$

여기서 K 는 Pressure Driven Flow 에서 정의되어지는 Permeability 이다.

Pressure Driven Flow 와 마찬가지로 식 (9)의 첫째와 둘째항은 각각 Macroscopic Viscous Force 항과 Macroscopic Electric Force 항을 나타낸다. 또한 식 (9)의 셋째와 넷째 항은 Microscopic Viscous Force

와 Microscopic Viscous Force 항을 각각 의미한다. 벽면에서 떨어진 다공성 매질 내에서는 Microscopic Force 항들이 Macroscopic Force 항들에 비해 지배적이다. 즉 다공성 매질 내에서는 Microscopic Viscous Force 와 Microscopic Electric Force 가 힘의 평형을 이룬다. 이와 반대로, 벽면 근처에서는 Macroscopic Viscous Force 와 Macroscopic Electric Force 가 힘의 평형을 이룬다. Pressure Drive 유동에서 Microscopic Viscous Force 항이 Darcy 항으로 모델링 된 것과 마찬가지로 Electroosmotic Flow 에서는 Microscopic Force 항들은 다음과 같이 모델링하고자 한다.

$$\nabla^2 \langle u_{eo} \rangle_f - \varepsilon \nabla^2 \langle \psi \rangle_f E_x + \left[\mu \frac{\langle u_{eo} \rangle_f}{K_E} - \varepsilon \frac{\zeta - \langle \psi \rangle_f}{K_E} E_x \right] = 0 \quad (12)$$

여기서 K_E 는 Electroosmotic Flow에서 정의 되는 Permeability이다. 벽면에서 떨어진 다공성 매질내의 유동은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\langle u_{eo} \rangle_f = \varepsilon \frac{\zeta - \langle \psi \rangle_f}{\mu} E_x \quad (13)$$

식(13)는 또한 벽면 근처에서의 Macroscopic 힘들의 평형을 만족하게 되어, 다공성 매질을 갖는 EK Pump 내에서 발생하는 Electroosmotic Flow 에 대한 전체 구간 속도해가 된다. 식 (13)에서의 Volume-averaged Electric Potential 의 값을 결정함으로써 속도장을 결정할 수 있다.

Volume-averaging 방법을 식 (4)에 적용하여 Volume-averaged Potential 식을 다음과 같이 유도한다.

$$\nabla^2 \langle \psi \rangle_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_s} (\nabla \psi \cdot \mathbf{n}) dA = \frac{2n_0 e z}{\varepsilon} \left\langle \sinh \left(\frac{ze\psi}{kT} \right) \right\rangle_f \quad (14)$$

식 (14)는 다음과 같이 간단해 질 수 있다.

$$\nabla^2 \langle \psi^* \rangle_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_s} (\nabla \psi^* \cdot \mathbf{n}) dA = \frac{1}{\lambda_D^2} \langle \sinh \psi^* \rangle_f \quad (15)$$

여기서 $\psi^* \equiv \frac{ze\psi}{kT}$.

식 (15)의 좌변은 다음과 같이 수식적으로 처리되어 질 수 있다.

$$\psi^* = \langle \psi^* \rangle + \tilde{\psi}^* \quad (16)$$

여기서 $\langle \psi^* \rangle \gg \tilde{\psi}^*$ 을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \sinh\langle\psi^*\rangle + \tilde{\psi}^* \\ &= \sinh\langle\psi^*\rangle \cosh(\tilde{\psi}^*) + \cosh\langle\psi^*\rangle \sinh(\tilde{\psi}^*) \quad (17) \\ &= \sinh\langle\psi^*\rangle + \cosh\langle\psi^*\rangle \tilde{\psi}^* \end{aligned}$$

식 (17)의 양변에 Volume Averaging 을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \langle \sinh\langle\psi^*\rangle + \cosh\langle\psi^*\rangle \tilde{\psi}^* \rangle \\ &= \sinh\langle\psi^*\rangle + \cosh\langle\psi^*\rangle \langle \tilde{\psi}^* \rangle = \sinh\langle\psi^*\rangle \quad (18) \end{aligned}$$

따라서 Volume-averaged Poisson-Boltzman 식은 다음과 같다.

$$\nabla^2\langle\psi^*\rangle_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_{sf}} (\nabla\psi^* \cdot \vec{n}) dA = \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh\langle\psi^*\rangle_f \quad (19)$$

위 식의 첫째항은 채널 벽면사이에 Electric Debye layer 에서 발생하는 Electric Potential 을 의미하고, 둘째항은 다공성 매질 내의 고체상의 면을 따라 발생하는 Electric Potential 을 의미한다. 같은 의미로, 다공성 매질 내에서는 둘째항과 좌변이 평형을 이루게 되고, 벽면 근처에서는 첫째항과 좌변이 평형을 이루게 된다. 식 (19)는 다음과 같이 된다.

$$\nabla^2\langle\psi^*\rangle + a_s \nabla\psi^*|_{\text{particle}} = \frac{1}{\lambda_D^2} \sinh\langle\psi^*\rangle \quad (20)$$

여기서 a_s the wetted area per volume이다 ($a_s \equiv A_{sf}/V$).

만약 $\psi^* < 1$ 을 만족하게 되면 식(20)의 좌변은 다음과 같이 간단히 표현하게 된다. 이를 Debye-Huckel Linearization 이라 부른다.

$$\nabla^2\langle\psi^*\rangle + a_s \nabla\psi^*|_{\text{particle}} = \frac{\langle\psi^*\rangle}{\lambda_D^2} \quad (21)$$

여러 형상을 갖는 다공성 매질에 대하여 $\nabla\psi^*|_{\text{particle}}$ 의 크기가 표 1 에 잘 나타나 있다.

Debye-Huckel Linearization의 가정 없이 식 (20)에서의 $\nabla\psi^*|_{\text{particle}}$ 의 값도 다음과 같이 근사적으로 구할 수 있다 [9].

$$\nabla\psi^*|_{\text{particle}} \sim \frac{2 \sinh(\zeta^* p/2)}{\lambda_D} \quad (22)$$

식 (22)는 Debye length \gg Characteristic length 경우에 성립하는데, 이 가정은 일반적으로 적용 가능하다.





3. Microchannel EK Pumps 의 해석해

앞에서 유도되어진 Volume- Averaged Equations 을

이용하여 Microchannel EK Pumps 에서 유동장을 구해보고자 한다.

그림 3 에서 보이듯, 일반적으로 Microchannel 은 이상적인 다공성 매질로 간주되어 다공성 매질 접근법을 이용하여 해석되어 진다. [9]

[표 1] Gradient of Electrical Potential and Permeability for various geometries

Geometry	Figure	$\nabla\psi _{\text{wall}}$	K
Sphere of radius a		$\nabla\psi _{\text{wall}} = -\zeta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\lambda_D} \right)$	$K = \frac{\varepsilon^3}{36k_c(1-\varepsilon)^2} a^2$ $k_c = 5$
Circular cylinder of diameter a		$\nabla\psi _{\text{wall}} = -\frac{\zeta}{\lambda_D} \frac{K_1(a/\lambda_D)}{K_0(a/\lambda_D)}$	$K = \frac{\varepsilon^3}{16k_c(1-\varepsilon)^2} a^2$
Circular tube of diameter a		$\nabla\psi _{\text{wall}} = -\frac{\zeta}{\lambda_D} \frac{I_1(a/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}$	$K = \frac{\varepsilon a^2}{8}$
Parallel plate channel of width $2a$		$\nabla\psi _{\text{wall}} = -\frac{\zeta}{\lambda_D} \tanh(a/\lambda_D)$	$K = \frac{\varepsilon a^2}{3}$

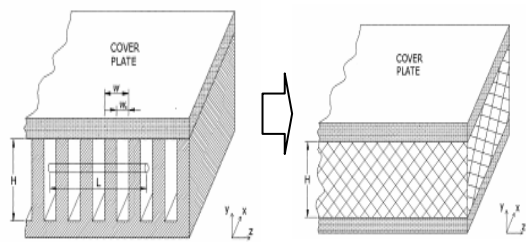


Fig. 3 Porous Medium Approach [10]

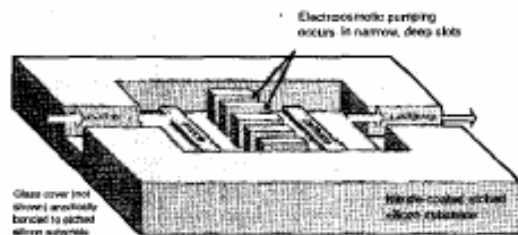


Fig. 4 Microchannel EK Pumps [7]

Microchannel EK Pumps 에서의 Electric Potential 관한 Volume-averaged Equations 과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 \langle \psi^* \rangle_f}{dY^2} + \frac{1}{AR} \left. \frac{\partial \psi^*}{\partial Z} \right|_{Z=AR} = \frac{\sinh \langle \psi^* \rangle_f}{\lambda^{*2}} \quad (23)$$

$$\langle \psi^* \rangle_f = \zeta^* \text{ at } Y=1; \quad (24a)$$

$$d \langle \psi^* \rangle_f / dY = 0 \text{ at } Y=0 \quad (24b)$$

여기서 AR은 Aspect Ratio로 채널 폭과 채널 높이의 비를 의미한다. (AR=w_c/H)

경계조건 (24a)와 (24b)를 만족하는 식 (23)의 해석해는 다음과 같다.

$$\langle \psi^* \rangle_f = 4 \tanh^{-1} \left[\tanh \left(\frac{\zeta^* - \langle \psi_\infty^* \rangle}{4} \right) e^{\left(\frac{Y-1}{\lambda^*} \right)} \right] + \langle \psi_\infty^* \rangle \quad (25)$$

여기서 $\langle \psi_\infty^* \rangle = \sinh^{-1} [2 \sinh(\zeta^*/2) \times \lambda^*/AR]$

Debye-Huckel Linearization을 만족하는 경우에 대한 해석해를 다음과 같다.

$$\langle \psi^* \rangle_f = \zeta^* \frac{\cosh(Y/\lambda^*)}{\cosh(1/\lambda^*)} + \frac{\lambda^*}{AR} \zeta_p^* \tanh \left(\frac{AR}{\lambda^*} \right) \left[1 - \frac{\cosh(Y/\lambda^*)}{\cosh(1/\lambda^*)} \right] \quad (26)$$

마이크로 채널에서의 Electroosmotic Flow 와 Pressure Driven Flow 에서의 속도장은 각각 다음과 같다.

$$\langle u_{eo} \rangle_f = \frac{\varepsilon \zeta}{\mu} \left[1 - \langle \psi^* \rangle_f \right] E_x \quad (27)$$

$$\langle u_p \rangle_f = \left(-\frac{a^2}{\mu} \frac{dP}{dx} \right) Da \left[1 - \frac{\cosh(Y/\sqrt{Da})}{\cosh(1/\sqrt{Da})} \right] \quad (28)$$

여기서 a는 channel 높이의 반 폭이다.

따라서 EK Pumps 내의 전체 유량은 식(27)과 식(28)의 합에 의해 다음과 같다.

$$Q = A \left[-\frac{a^2}{\mu} \frac{dP}{dx} g_1 + \frac{\varepsilon \zeta}{\mu} E_x g_2 \right] \quad (29)$$

여기서

$$g_1 = Da \left[1 - \sqrt{Da} \tanh(1/\sqrt{Da}) \right]$$

$$g_2 = \int_0^1 \left[1 - \langle \psi^* \rangle_f \right] dY$$

식 (29)에서 Q=0 인 경우 EK Pumps 가 발생하는 최대 압력을 얻는다.

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon \zeta}{a^2} \Delta V \frac{g_2}{g_1} \quad (30)$$

또한 P=0 인 경우의 최대 유량은 다음과 같다.

$$Q_{\max} = A \frac{\varepsilon \zeta}{\mu} E_x g_2 \quad (31)$$

4. 모델의 검증

본 모델의 타당성을 검증하기 위해 Microchannel EK Pump 를 도입하였다. Microchannel EK Pumps 에 대하여 직접 수치적인 방법을 통하여 Electric Potential 와 속도장에 대한 수치해를 구하였다. Electric Potential 에 대한 식 (4)와 속도에 대한 식 (1)를 CVM 을 이용한 수치적인 방법에 의해 구했으며, 어떠한 가정이 없이 정확한 해로 간주되어진다. 이렇게 얻은 수치해와 앞에서 Volume Averaging 방법을 이용하여 얻은 해석해를 비교한 결과는 다음과 같다. 그림 5 에서 수치해와 해석해가 잘 일치함을 알 수 있다.

또한 Laser 등은 Microchannel EK Pumps 를 제작하여 유동 실험을 하였다 [7]. 이들이 제시한 실험 결과와 본 연구에서 제시한 해석결과의 비교는 그림 6 에 나타나 있다. 본 해석해는 그들이 제시한 실험 결과를 잘 예측함을 알 수 있다.

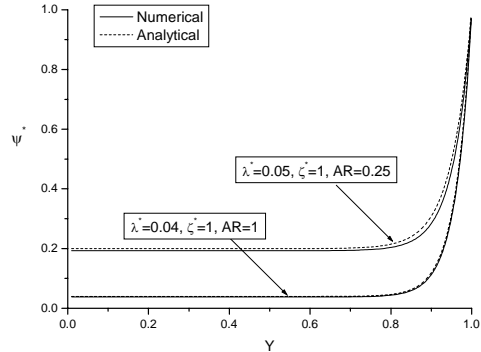


Fig. 5 Comparison between the numerical and the analytical solutions for Electric Potential

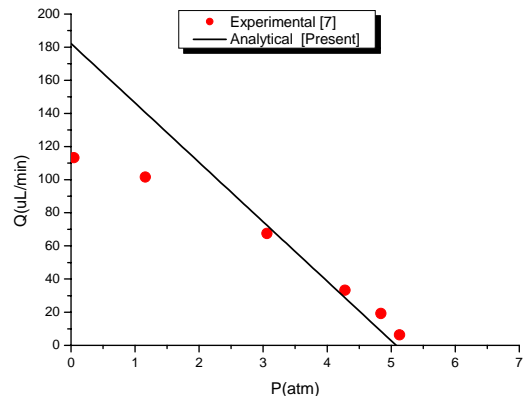


Fig. 6 Comparison between the experimental [7] and the analytical solutions

5. 결론

다공성 매질을 이용한 EK Pumps 의 유체 유동을 예측하는 해석적 모델을 제시하였다. 이를 위해서 Local Volume Averaging 방법을 적용하여 Electric Potential 및 속도에 관한 Volume-averaged 식들을 유도하였다. 본 연구에 대한 타당성을 검증하기 위해 이상적인 다공성 매질로 간주되어 지는 Microchannel EK Pumps 를 도입하였다. Microchannel EK Pumps 의 규칙적 형상의 장점을 이용하여 수치적인 방법을 이용하여 Electric Potential 과 속도장에 대한 수치해를 구하였다. 이 수치해와 앞에서 구한 해석해를 비교하여 본 연구의 해석적인 방법의 타당성을 검증하였다. 또한 Microchannel EK Pumps 에 대한 기존 연구의 실험적 결과와 해석해를 비교하여 타당성을 다시 한번 검증하였다. 본 해석 방법은 일반적인 다공성 매질을 이용한 EK Pumps 의 정확한 성능 예측에 응용될 수 있을 거라 기대한다.

후 기

본 연구는 국가 지정 연구실 사업(2-578)에서 수행된 결과이며 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- [1] D. Burgreen and F. R. Nakache, Electrokinetic flow in ultrafine capillary slits, *J. Phys. Chem.* 68 (1965) 1084.
- [2] R. F. Probstein, *Physicochemical Hydrodynamics*, 2nd ed. New York: Wiley (1994)
- [3] P. H. Paul, D. W. Arnold, D. J. Rakestraw, Electrokinetic generation of high pressure using porous microstructures, *Proc. Micro Total Analysis Systems 1998*, Kluwer Academic, Banff, Canada (1998) 49.
- [4] C. H. Chen, J. G. Santiago, A planar Electroosmotic Micropump, *J. Microelectromechanical sys.* 11 (2002) 672-683
- [5] S. Zeng, C. H. Chen, J. C. Mikkelsen Jr., J. G. Santiago, Fabrication and characterization of electroosmotic micropumps, *Sens. Act. B-Chemical* 79 (2001) 107-114.
- [6] L. Jiang, J. Koo, S. Zeng, J. C. Mikkelsen, L. Zhang, P. Zhou, J. Maveety, A. T. Quan, T. W. Kenny, J. G. Santiago, and K. E. Goodson, Two-phase microchannel heat sinks for an VLSI cooling system, *IEEE semiconductor thermal measurement and management Symp* (2001) 153-157
- [7] D. L. Laser, A. M. Myers, S. Yao, K. F. Bell, K. E. Goodson, Silicon electroosmotic micropumps for integrated circuit thermal management, *Proc. IEEE Solid State Sensors, Actuators and Microsystem 2003*, Boston (2003) 151-155.
- [8] J. Y. Min, E. F. Hasselbrink, S. J. Kim, On the efficiency of electrokinetic pumping of liquids through nanoscale channels, *Sens. Act. B-Chem.* 98 (2004) 368-377.
- [9] S. K. Griffiths, R. H. Nilson, Electroosmotic Fluid Motion and Late-Time Solute Transport for Large Zeta Potentials, *Anal. Chem.* 72 (2000) 4767-4777.
- [10] S. J. Kim, D. Kim, D. Y. Lee, On the local thermal equilibrium in microchannel heat sinks, *Int. J Heat Mass Transfer* 43 (2000) 1735-1748.