이산 웨이블릿 변환을 이용한 3차원 난류 채널 유동에 관한 연구

김강식† · 이 상 환*

A Study of 3-Dimensional Turbulent Channel Flow using Discrete Wavelet Transform

Kangshik Kim , Sanghwan Lee

Key Words : Coherent Structure(응집구조), Direct Numerical Simulation(직접수치모사), Discrete Wavelet(이산 웨이블릿), Energy(에너지), Large Eddy Simulation(큰 에디 모사)

Abstract

Discrete Wavelet Transform (DWT) has been applied to the Direct Numerical Simulation (DNS) data of turbulent channel flow. DWT splits the turbulent flow into two orthogonal parts, one corresponding to coherent structures and the other to incoherent background flow. The coherent structure is extracted from not vorticity field but velocity's since the channel flow is not isotropic. By comparing DWT's result of channel flow with that of isotropic flow, it is shown that coherent structure maintains the properties of original channel flow. The velocity field of coherent structures can be represented by few wavelet modes and that these modes are sufficient to reproduce the velocity probability distribution function (PDF) and the energy spectrum over the entire inertial range. The remaining incoherent background flow is homogeneous, has small amplitude, and is uncorrelated. These results are compared with those obtained for the same compression rate using large eddy simulation (LES) filtering. In contrast to the incoherent background flow of DWT, the LES subgrid scales have a much larger amplitude and are correlated, which makes their statistical modeling more difficult.

1. 서 론

최근 신호처리 분야에서 각광 받고 있는 wavelet 변환의 등장으로 유체역학 분야에서도 이를 이용한 연구가 활발히 이루어지고 있다.

Wavelet 변환을 이용한 난류에 관한 연구는 주로 난류의 해석, 응집 구조(coherent structure)의 가시화, 난류의 자유도 감소 등으로 나누어 볼 수 있으며, 특히 응집구조 추출을 통한 난류성향의 정량적 연구는 Farge[1, 3]와 Schneider[2, 4] 등에 의해 활발히 연구되어 왔다.

그들의 연구에 의하면 난류의 응집 구조는 유동 대부분의 에너지와 엔스트로피(enstrophy)를 포함하고, 에너지 전이(cascade)에 크게 관여하는 유동 내 지배적 구조이다. 또한 난류 유동의 특성을 모두 가지고 있는 구조로서 실제 3% 내외의 wavelet 모드(mode) 수만을 가지고 표현 가능하다는 것이 밝혀졌다.

기존 응집 구조를 추출하는 wavelet 관련 논문들은 난류 유동의 차원에 관계없이 와도장(vorticity field)을 wavelet 변환 및 분리하여 그것의 응집 구조를 추출하고 해석해 왔다. 이는 난류 역학적으로 와도는 난류 유동 현상에 가장 큰 영향을 주는 성분으로 난류 유동장 내에 다른 성분, 즉 속도장 이나 압력장 보다 더욱 밀집(localized) 되어 더 많은 에너지와 엔스트로피를 포함할 것이라는 가정이 뒷받침 되었기 때문이다.

위와 같이 기존의 연구는 난류의 지배적 성향을 연구하는데 목적을 두고 그 성향을 가장 잘 나타내는 와도를 추출 대상으로 함으로써 손쉽게 와도장을 얻을 수 있는 등방성 유동(isotropic flow)에 대해 활발히 이루어져 왔다.

† 삼성물산

* 한양대학교 기계공학부
E-mail : shlee@hanyang.ac.kr
TEL : 02) 2290 - 0445

그러나, 등방성 유동은 고체 벽면과의 접촉 또는 다른 유동과의 간섭에 의해 쉽게 깨지는 등 실 생활에서 관찰하기 쉽지 않은 제한적 유동이라는 단점이 있다. 게다가 유동의 공학적 측면에서 직접적인 관심의 대상은 속도장과 압력장인 경우가 많으며, 이에 대한 연구의 경우 등방성 유동이 비효율적일 수 있다. 따라서 비등방성 유동(anisotropic flow)에 대한 연구의 필요성이 제기되는 것이다.

비등방성 유동은 적어도 한쪽 방향 이상이 비균질(inhomogeneous) 유동이어야 하며, 이러한 비균질 성향은 곧바로 수치계산 비용의 증가와 수치해석의 난해함으로 연결된다. 그러므로 실질적인 응용문제 적용에 대한 가능성을 유지하면서 수치해의 어려움을 극복하기 위해 한쪽방향만이 비균질한 것으로 가정할 수 있는 채널유동(channel flow)에 관심을 가지게 된다.

채널유동에서 등방성의 두 방향은 주기 경계조건(periodic boundary condition)의 적용을 통해 좀더 빨리 해를 구할 수 있는 이점이 있으며, 한쪽의 방향성으로 인해 공학적 응용 범위를 넓힐 수 있는 장점이 있다.

2. 직접 수치 모사와 큰 에디 모사

2.1 직접 수치 모사

채널유동에 대한 직접 수치 모사의 지배 방정식은 분할(fraction) 절차에 의해서 비선형 항과 압력 항은 명시(explicit)형태로 차분이 전개되고 선형 항은 암시(implicit)방식으로 전개 된다. 즉, 비선형의 경우엔 3 차 Runge-Kutta 방식이나 Adams-Bashforth 방식으로 접근하며 선형 항의 경우 Crank-Nicolson 방법으로 푸는 일반적인 방법을 사용한다.

또한 주기 경계 조건이 만족되기 때문에 Fourier 급수를 물리 영역과 파동수 영역에 대해 적용한다.

채널내 유동의 초기 형상은 Poiseuille 속도분포를 적용하며, 이때의 유속 U_P 에 대한 레이놀즈 수는 $\mathrm{Re}_P = U_p h/\nu$ 이고, 벽면에서의 마찰 속도(Friction velocity) $U_\tau = \sqrt{\nu \partial u/\partial x \,\big|_{x=0}}$ 로부터 벽면의 레이놀즈 수는 $\mathrm{Re}_\tau = U_\tau h/\nu$ 이다.

Kolmogorov scale $(\eta = \nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ 정의로부터 벽면에 대한 격자 수 128×128 로 $\mathrm{Re}_\tau = 175.5$ 에서 계산이 수행 되었다.

2.2 큰 에디 모사

큰 에디 모사[17]를 위한 필터링이 수행된 Navier-Stokes 방정식은 Fourier-Chebyshev 준스펙트럴 법(pseudo-spectral method)을 사용하여 균일 방향은 Fourier 급수를 사용하였고, 벽에 수직인 방향은 Chebyshev 다항식을 적용하여 이산화 하였다.

직접 수치 모사에서와 같이 시간 이산화 과정은 분할 단계법(Fractional step method)을 사용하여 적분하였으며 비선형 항과 아격자(sub-grid) 모델로 인해서 생기는 항은 명시적 3 차 Runge-Kutta 방법을 사용하였고, 선형항은 암시적인 Crank-Nicholson 방법을 사용하였다.

아격자 모델링을 위해 Dynamic 에디 점성 모델을 적용했으며, 이때 아격자의 기준은 test filter 와 grid filter 간 너비의 추정을 통해 최적화 하였다.

위 직접 수치 모사 및 큰 에디 모사의 프로그램은 선행연구들[17,18]에 의하여 그 정확성과 신빙성이 검증된 바 있다.

3. Wavelet

3.1 3 차원 이산 wavelet 의 다중 해상도 분석

3 차원 다중 해상도 분석[6](Multi Resolution Analysis : MRA)은 2 차원 다중 해상도 분석과 동일한 방식으로 확장되어 수행된다. Fig.1 은 3 차원 다중 해상도 분석의 개략으로서, 체적 형태의 입력 데이터를 8 가지의 고주파와 저주파 영역으로 분리하고, 분해된 저주파 영역을 다시 고 • 저주파의 8 가지의 영역으로 분리하여 wavelet 계수화 한다. 이를 데이터 개수 $N = 2^{3J}$ 인 임의의 3 차원 체적 신호 $C(x, y, z)$ 에 3 차원 다중 해상도 분석을 적용하였다.

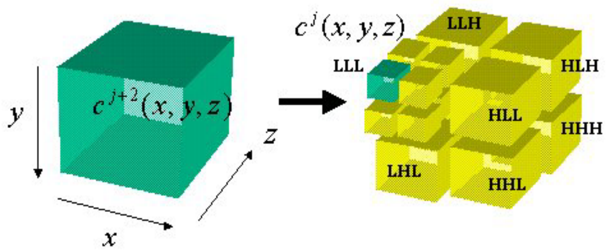


Fig. 1 3-Dimensional Multi Resolution Analysis

3.2 Wavelet 기저

주어진 데이터의 wavelet 스케일 분석시 가장 중요한 것이 필터의 선정이다. 필터의 특성에 따라서 주어진 데이터의 압축 성향이나 특징을 전혀 고려하지 못한 결과를 낳을 수 있기 때문이다. 일반적으로 wavelet 필터를 선택할 때 가장 주의해야 할 점은 선택될 필터의 wavelet 함수와 wavelet 변환될 데이터의 파고가 얼마나 닮았는지의 여부이다. 본 연구에서 wavelet 변환 이 적용될 난류의 속도장을 공간적으로 재배치한 결과를 구한 후 그 것의 파고와 가장 닮은 wavelet 함수의 필터를 찾아 본 결과, Battle-Lemarie 6th Order 의 모,부함수(mother, father function)를 사용하였다. Fig. 3 에 Battle-Lemarie filter 의 wavelet 및 척도구성 함수를 나타내었다.

3.3 임계치(threshold)의 결정

난류를 응집 구조와 비응집 구조로 분리할 때 기준이 되는 값이 임계치이다. 다중 해상도 분석을 통해 확보된 절대값의 wavelet 계수에서 임계치 미만의 값을 잡음 성분으로 간주하고 임계치 이상의 값에 해당되는 wavelet 계수는 확보하고자 하는 압축 성분으로 간주하여 두 영역으로 분리한다. 각각 분리된 wavelet 계수를 wavelet 역변환하면, 전자의 잡음 성분은 속도장의 비응집 구조, 후자의 압축 성분은 응집구조에 해당된다.

따라서 이상과 같은 과정에서 임계치 확보는 중요한 과제인데, 본 연구에서는 Donoho[8]가 제안한 wavelet 축소 계수법에 에너지의 개념을 도입한 선행연구[18]의 임계치를 알고리즘에 적용하였다. 즉, Donoho 가 제안한 초기 임계치를 우선 적용 후 응집구조에 해당하는 wavelet 계수의 에너지 백분율 P 가 90% 이상이 될 때까지 Trial method 개념의 반복 알고리즘을 통해 최적의 임계치를 확보하게 된다.

4. 결과 및 고찰

4.1 Wavelet 변환 전과 후의 정량적 비교

Wavelet 분리 전의 3 차원 채널 유동의 난류와 분리 후 응집 구조와 비응집 구조의 정량적 특성을 Table 1 을 통해 비교한다. 응집구조의 속도장과 와도장은 분리전의 skewness 및 flatness 와 거의 일치하는 경향을 보여 통계학적 정량적 관점에서도 그 성향이 매우 비슷하다는 것을 알 수 있다. 그러나 비응집 구조의 경우에는 분리 전의 성향과 동일함을 찾을 수 없다. 이러한 결과는 Fig. 2 를 통해서도 분명하게 확인할 수 있는데 응집 구조의 속도장 등선은 원래 값(wavelet 변환 전)의 그것과 거의 일치하는 모습을 보이지만, 비응집 구조의 속도장 등선의 경우엔 벽면근처에 집중적으로 모여있어 원래 값과 확연히 다른 것을 알 수 있다.

이상과 같이 응집구조가 원래 값을 대체할 수 있다는 사실로부터 데이터의 압축 효과도 기대할 수 있다. 즉 연구에 사용된 3 차원 속도 데이터는 $128^3 \times 3$ 형식의 데이터 파일로서 그 용량은 102MB 에 이른다. 이 데이터를 다중 해상도 분석 MRA 를 적용한 후 주파수 레벨 공간에서 임계치보다 큰 wavelet 계수의 위치와 그 wavelet 계수의 값을 표시하면 $1.97\% N \times 2$ 의 개수를 지닌 행렬 형태의 데이터 파일이 된다. 그 결과 102MB 용량의 원래 데이터는 성질이 동일한 1.5MB 의 응집구조로 표현 가능하다.

4.2 등방성 유동과의 비교

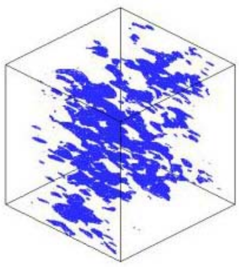
등방성 유동과 달리 채널 유동의 경우 벽면에서의 점착효과에 영향을 받는다. 즉, 채널 난류 유동에서 레이놀즈 수가 증가 할수록 점성에 의한 벽면 경계층 두께는 ν / u_τ 라는 scale 로 작아지고, 이런 유동에서는 가장 작은 에디 크기는 레이놀즈 수에 반비례하여 작아진다. 결국 Kolmogorov scale 이하의 작은 에디들은 소산(dissipation)에 관여하며, 큰 에디들이 대부분의 에너지를 차지할 것이다.

따라서 Table 1 에서 보는 바와 같이 채널 유동의 경우 등방성 유동에 비해 더 적은 wavelet 모드(1.97%)로 더 많은 에너지(98.86%)를 함유하는 것을 볼 수 있는데 이는 에너지의 양극화 현상 즉, scale separation 이 발생하여 관성영역(inertial subrange)이 뚜렷하게 나타나는 현상으로 설명 가능하다. 이러한 사실은 Fig. 2 에서도 확인 할 수 있는데, 유동 내 대부분의 에너지를 갖는 응집구조는 채널의 중심부에 위치하는 반면 작은 에디들의 구성으로 예상할 수 있는 비응집 구조는 벽면 근처에 집중 되 있는 것을 볼 수 있다.

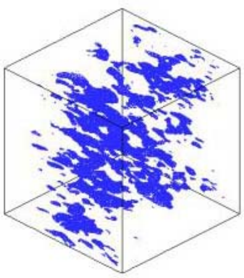
한편, 채널유동에서의 skewness 가 등방성 유동보다 큰 값을 가지는 것으로부터 채널 유동의 방향성을 가늠해 볼 수 있으며, 특히 벽면 근처에 집중 되 있을 것으로 예상되는 비응집 구조의 경우 그 skewness 값이 1 에 가까울 정도로 방향성이 강하게 나타남을 알 수 있다.

quantity	original	coherent	incoherent
Channel Flow			
Mode %	$\vec{v}$ (100%)	$\vec{v}_C$ (1.97%)	$\vec{v}_I$ (98.03%)
Energy	12.7	12.56	0.14
%	100%	98.86%	1.14%
Skewness	0.371	0.385	0.987
Flatness	3.128	3.348	30.428
Isotropic Flow			
Mode %	$\vec{v}$ (100%)	$\vec{v}_C$ (3.19%)	$\vec{v}_I$ (96.81%)
Energy	38.10	37.43	0.67
%	100%	98.23%	1.76%
Skewness	-0.051	-0.051	-0.003
Flatness	2.921	2.924	3.45

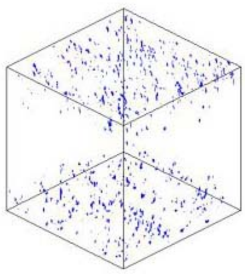
Table 1 Statistical Properties
Channel vs. Isotropic Flow [18]



(a)



(b)

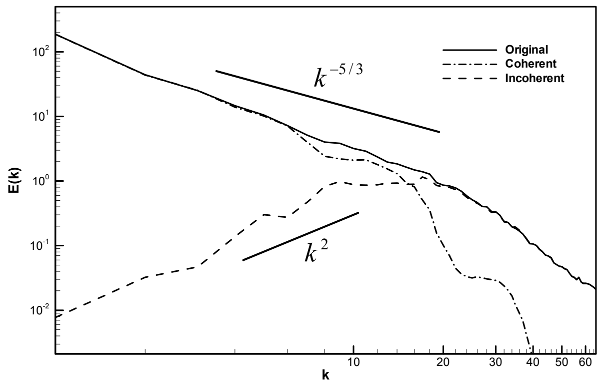


(c)

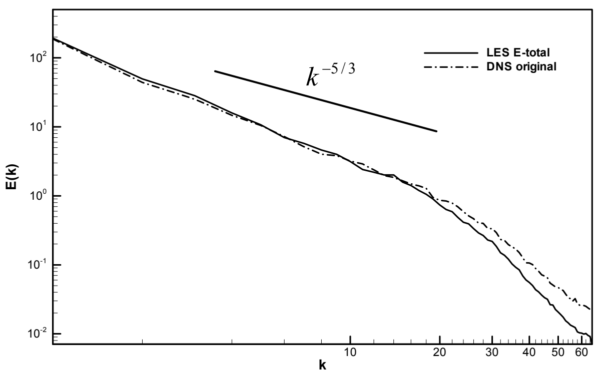
Fig. 2 Velocity Field Contour $|\vec{v}| = 1.7\sigma$
(a) Original (b) Coherent (c) Incoherent

4.3 응집, 비응집 구조의 에너지 스펙트럼

3 차원 난류 채널유동의 에너지 스펙트럼과 wavelet 변환 후의 응집 구조, 비응집 구조의 그것을 Fig. 3 (a)에 도시하였다. 파동수 k가 작은 난류 에너지 발생 영역에서 응집구조의 에너지 스펙트럼 곡선이 wavelet 분리 전의 난류 분포와의 그것과 $k^{-5/3}$의 분포와 일치하는 것을 확인할 수 있다. 이는 난류 에너지 발생 영역에서는 응집구조의 영향이 난류 유동에 지배적이라는 것을 의미한다. 웨이브 수가 큰 소산 영역에서 응집구조의 에너지는 비응집 구조의 에너지 곡선에 비해 더욱 급격히 감소하고 있다. 이로 미루어 난 류의 소산 영역 내 응집구조의 에너지는 비응집 구조의 에너지로 전환되어 소산한다고 판단된다. 비응집 구조의 에너지 스펙트럼 곡선은 k^2의 비례 양상을 보이며 증가하다 높은 파동수 영역(약 k=20)에서 절정을 이룬 후 원래의(wavelet 변환전) 스펙트럼과 동일한 분포로 감소한다. 이는 기존의 3 차원 난류 이론에 부합하는 결과이다.



(a) Coherent vs. Incoherent



(b) DNS vs. LES

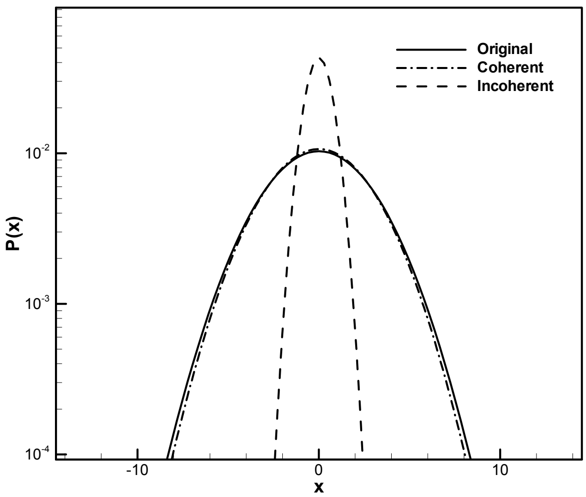
Fig. 3 Comparison of Energy Spectrum

4.4 큰 에디 모사와의 비교

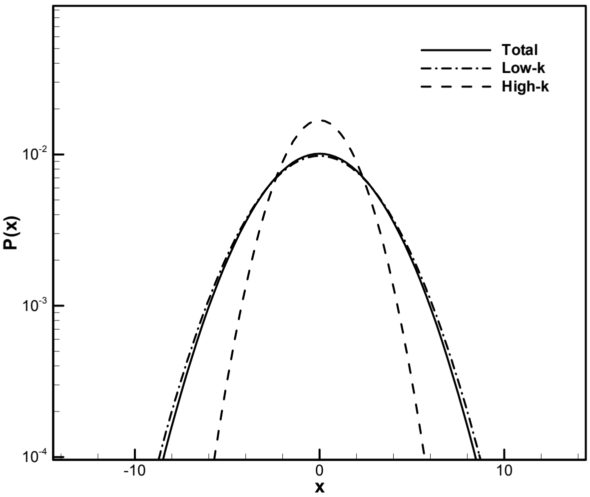
직접 수치 모사와 큰 에디 모사 결과, 각각의 에너지 스펙트럼을 Fig. 3 (b)에 나타내었다. 직접 수치 모사의 경우 응집구조의 스펙트럼은 원래 에너지 스펙트럼과 거의 일치함을 알 수 있고, 비응집 구조의 경우 관성영역까지 증가하다 큰 파동수로 갈수록 다시 감소함을 볼 수 있다.

큰 에디 모사의 전체 에너지 스펙트럼 결과 역시 직접 수치 모사의 그것과 크게 다르지 않음을 알 수 있다. 전체적인 값에 큰 차이가 없으면서 빠른 결과를 낼 수 있는 큰 에디 모사의 강점이다. 그러나 큰 파동수 영역으로 갈수록 그 값이 급격하게 감소함을 볼 수 있는데 이는 아격자 모델링에 따른 오차로 추정된다. 즉 큰 에디 모사에서 지배방정식의 계산에 직접 관여하는 큰 에디 영역(작은 파동수 영역)을 직접 수치 모사의 응집구조와, 모델링 되는 작은 에디 영역(큰 파동수 영역)을 비응집 구조와 대비시켜보면 다음과 같은 사실을 알 수 있다
.

(1) Fig. 4 에 각각의 확률 밀도 함수를 나타내었다. 직접 수치 모사의 경우 비응집 구조의 확률 밀도 함수가 원래 값의 그것과 매우 다름을 알 수 있는데 반해, 큰 에디 모사의 경우 small scale 의 확률 밀도 함수가 원래 값의 그것과 유사한 형태를 보임에 따라 전체 유동현상에 좀더 연관(correlation)되어 있다고 볼 수 있다. 즉 직접 계산 과정에 관여하지 않고 버려지는 높은 파동수 영역이 실제론 의미 있는 값일 수 있다는 점이다. 이와 같은 사실이 큰 에디 모사에 있어 그 통계학적 모델링을 더욱 어렵게 만드는 요인이 된다.



(a) PDF of DNS



(b) PDF of LES

Fig. 4 Probability Density Function

(2) 실제 유동에 있어선 작은 에디가 큰 에디로 에너지를 전달하는 back-scatter 현상이 존재하나 큰 에디 모사의 경우 작은 에디가 모델링으로 대체 되어 이러한 현상을 반영할 수가 없다. 따라서 큰 파동수 영역에서 에너지가 급격히 감소함을 알 수 있고 이 영역에서의 정확성은 직접 수치 모사의 것보다 부정확하다는 사실을 재확인 할 수 있다.

5. 결 론

등방성 유동에 관련하여 꾸준히 연구되어온 wavelet 변환을 채널유동에 적용해 보았다. 결과로서 채널 난류 유동에서도 응집구조의 추출 가능성이 확인되었고, 이를 기존의 등방성 유동에서의 결과와 비교하여 난류 채널 유동에 대한 wavelet 결과도 채널 유동의 특성을 그대로 보임을 알 수 있었다. 이로써 공학 분야에서 보다 더 실제적인 응용에 접근할 수 있는 가능성을 보였으며, 채널 유동의 방향성에 착안하여 wavelet 변환에 속도장을 이용 함으로서 다른 데이터와의 비교 연구 등 그 활용 범위를 넓혔다.

또한 wavelet 변환 전후의 직접 수치 모사 데이터를 큰 에디 모사의 결과와 비교하여 에디 크기에 따른 단순 구분 보다 응집과 비응집 구조에 따른 분류가 보다 효율적 임을 제시하였다. 즉, wavelet 변환에 의한 비응집 구조는 전체 유동장에 연관성이 없는(uncorrelated)반면 큰 에디 모사에서 필터링 된 작은 에디들은 연관되어 (correlated)있어 임의로 모델링 되거나 계산에서

제외될 경우 해석된 유동장의 정확성에 악 영향을 미칠 수 있는 가능성을 제기하였다. 따라서 큰 에디 모사의 경우도 단순히 에디의 크기만으로 계산 유무를 판단하기 보다 응집구조와 비응집 구조의 개념을 도입하여 응집구조에 해당하는 부분을 계산할 수만 있다면 큰 에디 모사의 장점인 빠른 연산 시간을 유지하면서 정확도 또한 높일 수 있을 것으로 사려된다.

끝으로, wavelet 변환을 이용하여 데이터 압축을 실현 함으로써 계산의 정확성을 유지하면서 큰 에디 모사 보다 더 압축된 직접 수치 모사 데이터를 확보할 수 있음을 확인 하였다.

참고문헌

(1) Farge, M., Kevlahan, N., Perrier, V., and Goirand, E., 1996, “Wavelets and Turbulence”, Proceedings of the IEEE, Vol. 84, No. 4, pp. 639-669.

(2) Farge, M., Schneider, K., Pellergrino, G., Wary, A. and Rogallo, R., 2000, "CVS Decomposition of 3D Homogeneous Turbulence Using Orthogonal Wavelets", Center for Turbulence Research Summer Program 2000.

(3) Farge, M., 1992, "Wavelet Transform and Their Applications to Turbulence", Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 24, pp. 395-457.

(4) Farge, M., Schneider, K. and Kevalahan, N., 1999, " Non-Gaussianity and Coherent Vortex Simuation for Two-Dimension Turbulence Using an Adaptive Orthogonal Wavelet Basis", Physics of Fluids, Vol. 11, pp. 2187-2201.

(5) Bonnet J., Cole D., Deville J., Flauser M., and Ukeiley L., 1994, "Stochastic Estimation and Proper Orthogonal Decomposition : Complementary Techniques for Identifying Structure. " Experiments in Fluids., Vol 17.

(6) Mallat, S., 1989, "A Theory for Multi Resolution Signal Decomposition," IEEE Trans. on PIAI., Vol. 11, pp. 674-493.

(7) Daubechies, I., 1992, “Ten Lectures on Wavelets”, SIAM

(8) Donoho, D., 1993, "Unconditional Bases are Optimal Bases for Data Compression and Statistical Estimation," Appl. Comput. Harmon. Anal., Vol. 1.

(9) Berkooz G., Holms P., and Lumley J., 1993, "The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows", Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 25

(10) Brasseur J. and Wang, Q. 1992, "Structural Evolution of Intermittency and Anisotropy at a Different Scales Analyzed Using Three-Dimensional Wavelet Transform", Physics of Fluids, Vol. 4.

(11) Everson, R., and Sirovich, L., 1990, “Wavelet Analysis of the Turbulent Jet”, Physics Letters, Vol. 145, No. 6, pp. 314-322.

(12) Goswami, J. and Chan, A. “Fundamental of Wavelets”, 1999, Wiley Inter-Science.

(13) Li, H., 1997, “Wavelet Analysis on Coherent Structure Dynamics in a Plane Turbulent Jet”, Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics 1997. Edizioni ETS, PISA, pp. 1175-1782.

(14) Li, H., 1997c, “Wavelet Velocity Correlation Analysis in a Plane Turbulent Jet”, Proceedings of the 11th Symposium on Turbulent Shear Flows, Vol. 3, P3-101-106

(15) Liandrat, J., and Moret-Bailly, F., 1990, “The Wavelet Transform : Some Applications to Fluid Dynamics and Turbulence”, European Journal of Mechanics B/Fluids, Vol. 9., No. 1, pp. 1-19.

(16) Meyer, Y., 1993, Wavelets : Algorithm and Applications, SIAM.

(17) 최호종, 이상환, 2003, “Test Filter 너비의 추정을 통한 난류 채널 유동의 Large Eddy Simulaion”, 대한기계학회 논문집 B, 2003, 27, 7

(18) 정재윤, 2002, “이산 Wavelet 변환을 이용한 3차원 등방성 난류의 응집구조 추출”, 한양대학교 대학원 공학 석사 논문.

(19) 정재훈, 2001, “직교 웨이블릿을 이용한 난류 Wake 의 응집 구조 해석”, 한양대학교 대학원 공학 석사 논문

(20) 김대경, 강현배, 서진근, 2001, 웨이블릿 이론과 응용, 아카넷