

# RBF Network 를 이용한 표면온도 역추정에 관한 연구

정법성<sup>†</sup> · 이우일<sup>\*</sup>

## Inverse Estimation of Surface Temperature Using the RBF Network

Bup Sung Jung, Woo Il Lee

**Key Words :** Inverse Heat Conduction Problem(역열전도문제), Neural Network(신경회로망), Radial Basis Function

### Abstract

The inverse heat conduction problem (IHCP) is a problem of estimating boundary condition from temperature measurement at one or more interior points. Neural networks are general information processing systems inspired by the connectionist theory of human brain. By properly training the network by the learning rule, the neural network method can handle many non-linear or other complex problems. In this work, neural network is applied to complicated inverse heat conduction problems. Efficiency of the procedure is enhanced by incorporating the radial basis functions (RBF). The RBF is trained faster than other neural network and can find smooth solution. In order to demonstrate the effectiveness of the current scheme, a typical one-dimensional IHCP is considered. At one surface, the temperature as well as the heat flux is known. The unknown temperature of interest is estimated on the other side of the slab. The results from the proposed method based on RBF neural network are compared with the conventional method.

### 기호설명

|                |                         |
|----------------|-------------------------|
| $\mathbf{p}$   | : 입력벡터                  |
| $\lambda$      | : 연결가중치                 |
| $\mathbf{c}_i$ | : $i$ 번째 RBF 센터         |
| $\phi(\cdot)$  | : Radial Basis Function |
| $\ \cdot\ $    | : Euclidean distance    |
| $\mathbf{s}$   | : 출력벡터                  |
| $T$            | : 온도                    |
| $t$            | : 시간                    |
| $x$            | : 거리                    |
| $Y$            | : 측정 온도                 |

### 1. 서론

일반적인 열전도 문제는 계의 기하학적인 조건과 지배방정식, 초기조건 및 경계조건이 모두 알려진 상태에서 온도분포를 결정짓는 것과 연관되어 있다. 이와는 반대로 물체 내부에서의 온도 분포 및 이력을 이용하여 초기 조건 및 경계조건 등을 결정할 수 있는데, 이 경우를 역열전도 문제라고 한다. 역열전도 문제는 표면의 경계 조건을 찾아내는 문제, 경계의 일부가 알려지지 않은 물체의 형상을 찾아내는 문제, 그리고 물체의 열적 물성치를 찾아내는 문제로 구분할 수 있다. 본 연구에서는 물체 내의 몇몇 점에서 측정된 온도 이력을 통하여 경계조건 중 하나인 물체 표면 온도를 추정하는 문제에 관한 해석을 수행하였다. 직접열전도 문제 해석 시에 정확한 경계조건을 아는 것이 매우 중요하지만, 많은 문제에 있어서 경계

<sup>†</sup> 서울대학교 대학원 기계공학부  
E-mail: bupsung2@snu.ac.kr  
TEL: (02)880-7122 FAX: (02)883-0179

<sup>\*</sup> 서울대학교 기계항공공학부  
E-mail: wilee@snu.ac.kr  
TEL: (02)880-7116 FAX: (02)883-0179

조건을 정확히 찾아내는데 어려움이 따르게 된다. 즉, 표면의 물리적 상황은 센서를 부착하기에 부적합한 경우가 많으며 표면에 센서가 부착됨으로 인하여 경계조건 구현에 심각한 오차가 발생할 수 있게 된다. 역열전도 기법을 적용하면 경계 이외의 위치에 센서를 부착하여 시스템에 방해가 되지 않고 경계조건을 추정할 수 있다.

일반적으로 역열전도 문제는 수학적으로 불안정한 문제이고, 이런 문제들은 측정오차에 극단적으로 민감하기 때문에 해석하기가 쉽지 않다. 따라서 정확한 역열전도 문제의 해를 얻기 위해서는 상대적으로 부정확한 측정과 어려운 해석적 접근이라는 두 가지 어려움을 동시에 최소화 시킬 수 있는 방법이 필요하며, 이에 관한 많은 연구가 진행되고 있다. 역해석기법으로는 규준화 방법, 순차적 함수 지정 방법, 연계 문제법을 이용한 방법 등이 대표적이며 해의 정확도를 높이기 위한 수정된 방법들이 제안되고 있다. 그러나 이러한 역해석기법들은 수학적으로 매우 복잡해 지는 경향이 있다.

최근 널리 이용되고 있는 신경회로망 알고리즘을 역열전도 문제에 적용하면 수학적 어려움을 줄일 수 있으며, 축적된 데이터를 이용하여 보다 빠르게 해를 구할 수 있다. 인공 신경회로망은 생물체의 뇌 신경 정보처리 메커니즘을 모방한 것으로서 수학적으로 보면 입력값과 출력값 사이의 관계를 회로망으로 구성한 것이다. 신경회로망은 서로 거미줄처럼 연결되어있는 여러 개의 뉴런으로 구성되어 있으며 각각의 연결은 가중치 값을 가지고 있다. 인공 신경회로망은 충분한 훈련 데이터와 적절한 학습알고리즘을 이용하여 회로망이 특정한 작업을 효율적으로 수행할 수 있도록 학습시킬 수 있다. 학습과정에서 입력값과 출력값으로 이루어진 훈련 데이터와 회로망을 통하여 계산된 값의 차이가 최소화 되도록 연결가중치 값을 조정하게 된다. 학습과정에서 시간이 소요되지만 일단 학습된 신경회로망은 단순한 수치계산만으로 이루어지므로 보다 빠르게 결과값을 출력할 수 있다.

본 연구에서는 여러 신경회로망 중 비교적 학습과정이 빠른 것으로 알려진 RBF(Radial Basis Function) network 을 구성하여 유한한 두께를 갖는 일차원 판의 표면온도를 역추정하였다. 또한 RBF

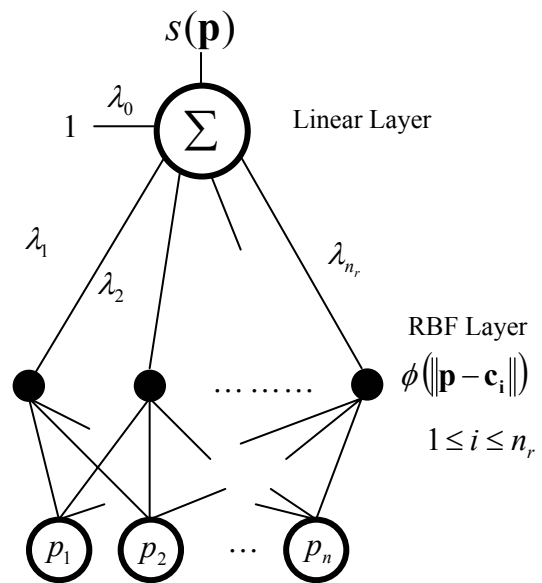


Fig. 1 Schematic of RBF network

network 을 이용하여 추정한 표면 온도를 기존방법과 비교하여 해의 효율성 및 타당성을 살펴 보았다.

## 2. Radial Basis Function Network

### 2.1 RBF network 의 구조

RBF network 은 기본적으로 Radial Basis Function 을 이용한 Nonlinear transformation layer 와 linear layer 두 개의 layer 로 구성되어있다.  $n$  개의 입력과 스칼라 출력을 갖는 RBF network 의 기본 구조를 Fig. 1 에 나타내었다. 이 network 에서 출력되는 값은 다음과 같다.

$$s(\mathbf{p}) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_r} \lambda_i \phi(\|\mathbf{p} - \mathbf{c}_i\|) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  는 입력벡터,  $\phi(\cdot)$  은 Radial Basis Function,  $n_r$  은 RBF 의 개수,  $\mathbf{c}_i \in \mathbf{R}^n$ ,  $1 \leq i \leq n_r$  는  $i$  번째 RBF 의 센터,  $\|\cdot\|$  는 입력벡터와 센터와의 거리(Euclidean distance),  $\lambda_i$ ,  $0 \leq i \leq n_r$  는 연결가중치이다. Radial Basis Function 의 선택은 network 의 효율에 별다른 영향을 주지 않는 것으로 알려져 있으며, 다양한 함수가 사용될 수 있는데 일반적으로 Gaussian function 이 가장 널리 사용된다.

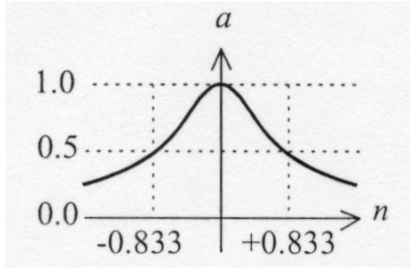


Fig. 2 Gaussian Function

RBF 뉴런은 0 에서부터 1 까지의 반응값을 가지며, 입력벡터와 센터의 거리에 따라 비선형적인 반응을 나타낸다. 즉, 입력벡터와 센터의 거리가 멀수록 0 에 가까운 값을 가지며 가까워지면 1 에 가까운 값을 가진다.

Fig. 1 에 나타낸 network 을 m 개의 출력을 갖는 network 으로 확장하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A_{11} & \cdots & A_{1n_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & A_{n1} & \cdots & A_{nn_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{01} & \cdots & \lambda_{0m} \\ \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

$$\mathbf{s}_i = (s_{i1} \quad s_{i2} \quad \cdots \quad s_{im}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-2)$$

$$A_{ij} = \phi(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}_j\|), \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_r \quad (2-3)$$

식(2)로부터 연결가중치  $\lambda$  는 다음과 같다.

$$\lambda = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} \quad (3)$$

식(3)에서 연결가중치는 선형 최소자승법을 이용하여 구할 수 있다

### 2.2 Orthogonal least squares 학습알고리즘

RBF network 을 구성하는데 연결 가중치 이외에도 RBF 와 센터  $\mathbf{c}_i$  의 선택이 중요한 역할을 한다. 앞에서 언급한 바와 같이 RBF 의 선택은 network 의 성능에 큰 영향을 주지 않는 것으로 알려져 있다.

가장 일반적인 RBF 의 센터 선택 방법은 훈련 데이터 중에서 임의로 센터를 선택하거나 훈련 데이터 전체를 센터로 정하는 방법이다. 이러한 방법은 복잡한 과정 없이 간단하게 센터를 정할 수 있지만, 임의로 센터를 선택할 시에 network 가 적절하게 학습 되는 것을 보장하지 못할 뿐만 아니

라 모든 훈련 데이터를 센터로 정하게 되면 불필요한 RBF 뉴런까지 계산에 포함시키게 되어 오히려 해의 정확성을 떨어뜨릴 수 있게 되는 단점이 있다.

이러한 문제점을 극복하기 위하여 Chen 등은 Orthogonal least square 알고리즘을 이용하여 센터를 선택하는 방법을 제안하였다. OLS 알고리즘을 이용하면 RBF network 에 큰 영향을 미치는 중요한 센터만으로 network 를 구성할 수 있게 된다.

식(1)을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{s} = \Phi \lambda + \lambda_0 \quad (4)$$

$\Phi$  를 대각항이 1 인 삼각행렬  $\theta$  와 각각의 열이 직교성을 갖는  $n \times n_r$  행렬  $\mathbf{W}$  로 분해하면,

$$\Phi = \mathbf{W} \theta \quad (5)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} & \cdots & \theta_{1n_r} \\ 0 & 1 & \theta_{23} & \cdots & \theta_{2n_r} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \theta_{n_r-1n_r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{H} \quad (6-2)$$

$\mathbf{H}$  는 대각행렬이며 요소  $h_i$  는 다음과 같다.

$$h_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i = \sum_{t=1}^n w_i(t) w_i(t), \quad 1 \leq i \leq n_r \quad (7)$$

여기서  $\mathbf{w}_i$  는  $\mathbf{W}$  의  $i$  번째 열이다.

$\mathbf{w}_i$  와  $\theta_{ik}$  는 Gram-Schmidt 방법에 의해 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \phi_1 \\ \theta_{ik} &= \mathbf{w}_i^T \phi_k / (\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i), \quad 1 \leq i \leq k \\ \mathbf{w}_k &= \phi_k - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_{ik} \mathbf{w}_i \end{aligned} \right\} 2 \leq k \leq n_r \quad (8)$$

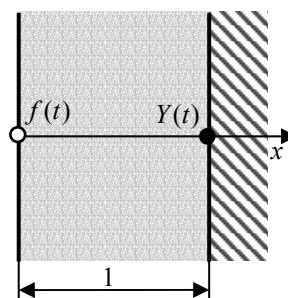


Fig. 3 Schematic of considered IHCP

여기서  $\phi_i, \mathbf{w}_i$  는 각각  $\Phi$  와  $\mathbf{W}$  의  $i$  번째 열이다.

Orthogonal LS 를 수행하기 위해 식(4)을 다음과 같은 형태로 표현한다.

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{g} + \lambda_0 \quad (9)$$

$\hat{\mathbf{g}}$  는 orthogonal LS 의 해이며, 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{s} \quad (10-1)$$

$$\hat{g}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{s} / (\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i) \quad (10-2)$$

$i \neq j$  일 경우  $\mathbf{w}_i$  와  $\mathbf{w}_j$  는 서로 직교하므로 식(9)의 에너지분을 구해보면 다음과 같다.

$$\mathbf{s}^T \mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n_i} g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i + \lambda_0^T \lambda_0 \quad (11)$$

식(11)에서 마지막 항을 무시하면,  $g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i$  은  $\mathbf{s}^T \mathbf{s}$  의 증분이 된다.

여기서 다음과 같이 오차감소비를 정의하면,

$$[err]_i = g_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i / \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (12)$$

$\mathbf{W}$  의 각 열 중에서 오차감소비를 최대로 하는  $\mathbf{w}_i$  를 구할 수 있는데, 이 값과 식(8)을 통해 구한  $\phi_i$  를 RBF 의 센터로 선택한다. 센터의 선택은 다음 식을 만족할 때까지

$$1 - \sum_{j=1}^{M_\varepsilon} [err]_j < \varepsilon \quad (13)$$

즉, 훈련 데이터와 network 의 출력값의 차가 기준 이하가 될 때까지 반복하며 각각의 계산단계에서 오차감소비를 최대로 하는 열을 센터로 선택한다.

요약하면, 다음과 같은 과정을 수행하여 센터를 찾아낸다.

- (1) 식(7)~식(12)을 이용하여 오차감소비를 최대로 하는  $\phi_i$  를 센터로 선택한다.
- (2) 앞에서 선택된 센터를 이용하여 network 의 출력값을 구한다.
- (3) 식(13)이 만족되면 센터를 결정하고 학습을 끝낸다.
- (4) 앞에서 구한  $\phi_i$  을 제외한 나머지 열중에서 오차감소비를 최대로 하는 열을 센터로 선택한다.
- (5) (2) 단계로 돌아간다.

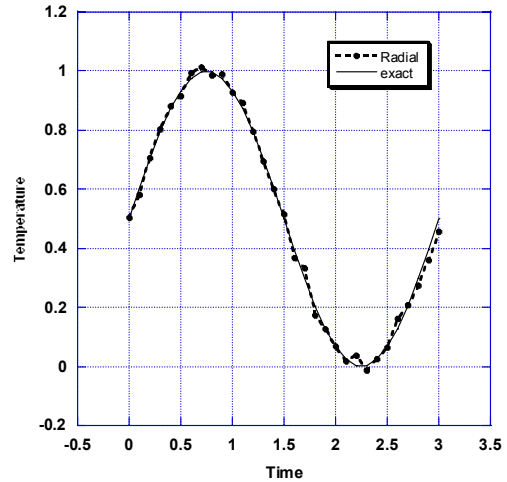


Fig. 4 Estimation of sine temperature profile

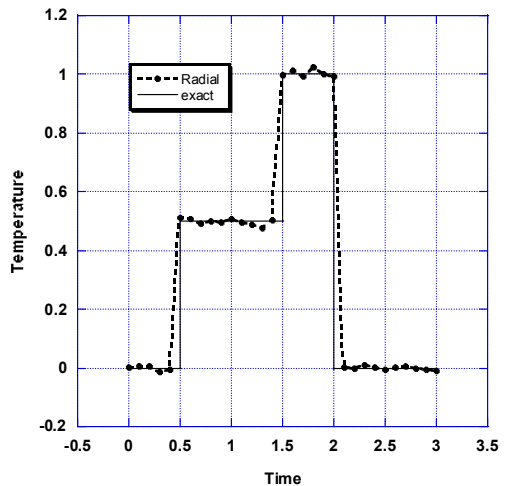


Fig. 5 Estimation of rectangular temperature profile

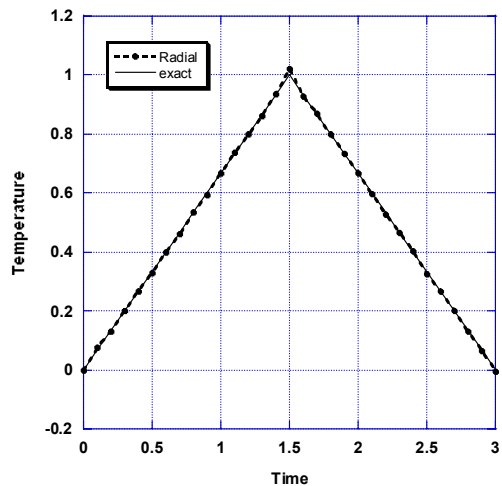


Fig. 6 Estimation of triangle temperature profile

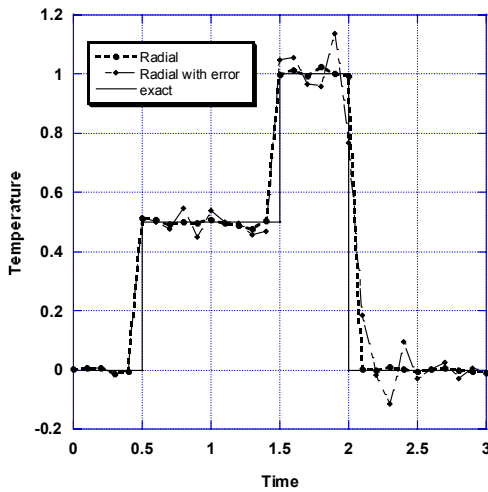


Fig. 7 Estimation of rectangular temperature profile with error data

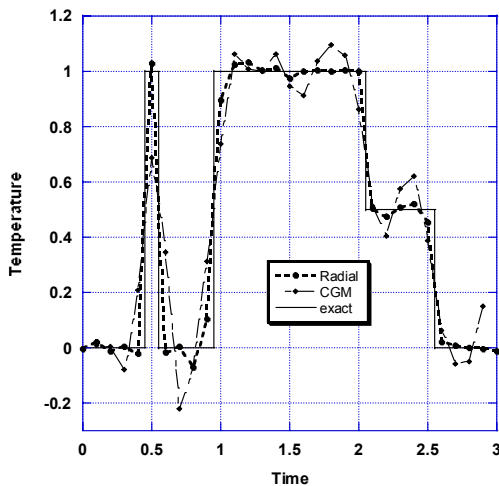


Fig. 8 Estimation of rectangular temperature profile compared with CGM

### 3. 결과 및 논의

#### 3.1 Direct Problem

Network 을 학습시키기 위해서는 훈련 데이터가 필요한데, 직접문제를 풀어서 역해석에 필요한 훈련 데이터를 확보할 수 있다. 수치해석을 통해서 다양하고 충분한 훈련데이터를 확보할 수 있다.

본 연구에서는 유한한 두께를 갖는 판의 일차원 열전도에 대한 해석을 수행하였다. 판의 한쪽 면 ( $x=0$ ) 은 표면온도가 시간에 따라 변하고, 다

른 면 ( $x=1$ ) 은 단열되어 있으며, 이곳에 센서를 부착하여 온도를 측정하였다. 이를 Fig. 3 에 나타내었다. 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (14-1)$$

$$T(0,t) = f(t) \quad (14-2)$$

$$\frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (14-3)$$

$$T(x,0) = 0 \quad (14-4)$$

여기에  $T, x, t$  는 모두 무차원 변수이고, 각각 온도, 거리, 시간을 나타낸다. 열확산계수  $\alpha$  는 온도에 일정한 값 1 을 갖는다고 가정하였다. 3 초 동안 0.1 초의 간격으로 온도데이터를 측정하였다.

수치실험을 통해서 단열된 면 ( $x=1$ ) 에서 측정된 온도데이터  $Y(t)$  를 입력값으로, 경계조건인  $x=0$  에서의 온도데이터  $f(t)$  를 출력값으로 갖는 훈련 데이터를 얻을 수 있다.  $f(t)$  를 변화시켜 280 개의 훈련 데이터를 얻었으며, 이를 이용하여 표면온도를 추정 할 수 있도록 network 을 학습시켰다.

#### 3.2 결과 및 토의

학습된 network 과 측정온도를 이용하여 시간에 따라 변화하는 표면온도를 재현해 보았다. 다양한 형태의 표면온도 이력을 복원해 보았는데, 사인함수 형태, 삼각형 형태, 사각형 형태로 변하는 표면온도 등이다. 이를 Fig. 4~ Fig. 6 에 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이 사인함수의 형태처럼 부드럽게 변화하는 온도뿐만 아니라 사각형 온도변화처럼 급격한 온도 변화가 있는 부분도 잘 복원하는 것을 볼 수 있다. 또한 측정데이터에 인위적인 오차를 포함하여 표면온도를 복원해보았다. 오차는 평균이 0 이고 표준편차 0.01 을 가지는 가우스분포를 따르도록 생성되었다. 오차가 없는 경우와 비교하여 Fig. 7 에 나타내었다. 오차가 있는 경우에도 안정된 거동을 보임을 볼 수 있다. CGM 방법으로 구한 온도와 비교를 Fig. 8 에 나타내었다. 기존의 CGM 방법보다 RBF network 이 온도가 급격히 변하는 부분의 최대값과 변화시점을 더 잘 복원하는 것을 볼 수 있다.

훈련 데이터를 증가시켜 network 을 학습시킬 경우 학습시간은 길어지겠지만 복잡하게 변하는 해의 복원 시에도 안정성 및 해의 정확도는 더욱 증가 할 것 이다.

## 후 기

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실 사업과 교육부 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Beck, J.V., Blackwell, B., and St. Clair, C.R. Jr., 1985, *Inverse Heat Conduction*, Wiley.
- (2) Alifanov, O.M., 1994, *Inverse Heat Transfer Problem*, Springer-Verlag.
- (3) S. Chen, C.F.N. Cowan, and P.M. Grant, 1991, "Orthogonal Least Squares Learning Algorithm for Radial Basis Function", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 2, No.2, pp.302-309.
- (4) Sun Kung Kim, Bup Sung Jung, Joon Sik Lee, and Woo Il Lee, 2002, "An Inverse estimation of surface temperature using the maximum entropy method", *Proceeding of the Twelfth International Heat Transfer Conference*, pp.33-38.
- (5) D.S. Broomhead and David Lowe, 1988, "Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks", *Complex Systems*, Vol. 2, pp.321-355.
- (6) J. Krejsa, K.A. Woodbury, J.D. Ratliff, and M. Raudensky, 1999, "Assessment of Strategies and Potential for Neural Networks in the Inverse Heat Conduction Problem", *Inverse Problem in Engineering*, Vol. 7, pp. 197-213.
- (7) Daniel Graupe, 1997, *Principles of Artificial Neural Networks*, World Scientific
- (8) Ozisik, M.N., 1993, *Heat Conduction*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley
- (9) A. Björck, 1967, "Solving linear least squares problem", *Numerische Mathematik*, vol.7, pp. 206-216