

발열 전도체가 존재하는 밀폐계 내부의 자연대류 현상에 대한 수치적 연구

이재룡[†]·하만영^{*}

A Numerical Study of Natural Convection in a Horizontal Enclosure with Heat-Generating Conducting Body

Jae Ryong Lee and Man Yeong Ha

Key Words: natural convection(자연대류), 복합열전달(Conjugate heat transfer)

Abstract

The physical model considered here is a horizontal layer of fluid heated below and cooled above with a heat-generating conducting body placed at the center of the layer. The body generates a constant amount of heat as initial condition. Two-dimensional solution for unsteady natural convection is obtained using an accurate and efficient Chebyshev spectral methodology for various of Rayleigh number from 10^3 to 10^6 . Multi-domain Technique is used to handle heat-generating conducting body. The results for the case of heat-generating body are also compared to those of adiabatic body.

기호설명

g	: gravity	t^*	: dimensional time
L	: length of the enclosure	t_p	: period of time integration
n	: normal direction	T	: temperature
Nu	: local Nusselt number	u_i	: dimensionless velocity in the i -direction
\overline{Nu}	: surface-averaged Nusselt number	u_i^*	: dimensional velocity in the i -direction
x_i	: dimensionless i -directional coordinate	α	: thermal diffusivity
x_i^*	: dimensional i -directional coordinate	β	: thermal expansion coefficient
P	: dimensionless pressure	ν	: kinematic viscosity
Pr	: Prandtl number	θ	: dimensionless temperature
Ra	: Rayleigh number	k^*	: dimensionless conductivity ratio
t	: dimensionless time	ΔT^*	: dimensionless temperature ratio

1. 서론

수직으로 온도구배가 존재하는 밀폐계 내부의 Rayleigh-Bénard 대류현상은 지난 100여년간 연구가 진행되어온, 유체유동 연구의 대표적인 예이다. 온도가 일정한 평면위에서의 유체경계층은

[†] 부산대학교 기계공학과 대학원

E-mail : multidomain@pusan.ac.kr

TEL : (051)510-3090 FAX : (051)512-9835

^{*} 부산대학교 기계공학부

Rayleigh수가 1708일 때 불안정해지고 정상상태의 순환 cell을 형성한다.⁽¹⁾ Rayleigh 수가 증가함에 따라 유동은 다양한 불안정성을 유발하고, $Ra=10^7$ 에서 완전난류영역으로 천이된다.^{(2)~(3)}

공학적 관점에서는 형상이 단순 경계층보다 복잡해 진다. 관심이 있는 형상은 밀폐계 내부에 물체가 존재하는 경우이다. House *et al*⁽⁴⁾는 밀폐계 내부에 존재하는 전도체의 영향에 대해서 발표하였다. 열전도체와 밀폐공간의 면적비 및 열전도체와 유체의 열전도비를 변수로 하여 계산을 수행하였는데, 그 결과에 따르면 같은 Rayleigh 수와 Prandtl 수에 대해 열전도비가 1보다 상당히 낮은 열전도체가 밀폐공간 내부에 존재하는 것이 그렇지 않은 것보다 열전달을 향상시킨다는 것을 알 수 있다. 또한, 보다 높은 Ra수에 대한 영역에 대해서 Ha *et al*⁽⁵⁾가 발표하였다. 최근에 Ha *et al*⁽⁶⁾는 정사각 밀폐계 내부에 다양한 온도조건을 가지는 물체가 존재하는 경우에 대한 결과를 발표하였다. Ra수 또한 복잡한 유동 패턴을 보일 만큼 충분히 큰 영역까지 고려하였다.

본 연구에서는 내부에 발열 전도체가 존재하는 밀폐계 내부의 유동의 변화를 예측하기 위해 수치적 연구를 수행하였다. 발열 전도체는 무차원 온도구배가 0일 때부터 25일 때까지 증가하면서 계산하였고, Ra수는 10^3 에서부터 10^6 까지 증가시켰으며, 이는 복잡한 유동현상을 잘 표현할 수 있을 정도의 값이다. 내부 유체의 Pr 수는 0.7로서 공기의 유동에 해당한다.

2. 지배방정식

연속 방정식, 일정 물성치의 비압축성의 운동량 보존 방정식 (Navier-Stokes equation) 그리고 에너지 방정식이 본 계산에서 사용되었다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Ra} \text{Pr} \theta \mathbf{k}_2 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_f = \nabla^2 \theta_f \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \alpha^* \nabla^2 \theta_s + \frac{\Delta T^*}{(\rho C_p) A^*} \quad (1d)$$

무차원 변수들은 다음과 같이 정의하였다.

$$t = \frac{t^* \alpha}{L^2}, \quad x_i = \frac{x_i^*}{L}, \quad u_i = \frac{u_i^* L}{\alpha},$$

$$P = \frac{P^* L^2}{\rho \alpha^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad (2)$$

위 식에서, ρ, T 그리고 α 는 각각 밀도, 차원의 온도 그리고 열확산성이다. (2) 식에서 *는 차원변수를 나타내며, u_i, P, t 그리고 θ 는 각각 무차원된 속도, 압력, 시간 그리고 온도를 나타낸다. 본 연구에서의 중요한 무차원 파라미터로는 Pr수와 Ra 수가 있다. 즉,

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Ra} = \frac{g \beta L^3 (T_h - T_c)}{\nu \alpha}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha_s}{\alpha_f}$$

$$(\rho C_p)^* = \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}, \quad \Delta T^* = \frac{\dot{q} W^2 / k_f}{T_h - T_c} \quad (3)$$

여기서 ν, g 그리고 β 는 각각 동점성계수, 중력, 열팽창 계수이다. 본 계산에서는 Pr수를 0.71로 고정하였다. 이는 공기의 물성치를 나타낸다. 그리고 Ra수는 10^3 에서부터 10^6 까지 변화한다.

3. 수치해석 방법

본 연구에서 사용한 밀폐계는 중형비가 1이고, 그림 1에서 나타난 바와 같다. 두개의 평행판 사이의 높이가 L이고, 그 사이에 좌우 각각 $W = L/3$ 인 발열 전도체가 존재하고 있다. 아래 평판은 고온, T_h 이고, 윗 평판은 저온, T_c 로 고정되어 있다. 본 연구에서의 형상은 z 방향으로 불변이라고 가정한다. 그렇기 때문에 사각의 단면적을 가지는 2차원의 실린더라고 표현할 수 있다. 유체의 물성치는 일정하다고 가정하였으며, 복사

효과는 무시되는 것으로 가정하였다. 또한 Boussinesq 가정에 따라 부력항에서 밀도를 제외한 유체의 모든 물성치 즉, 점성계수, 열전도계수 등은 상수로서 일정하다고 가정하였다. 단, 이 Boussinesq 근사는 비교적 온도차가 적은 계에서의 유체를 유동을 잘 기술하는 방법이다. 중력가속도의 방향은 그림 1에서 나타난 바와 같이 수직 벽과 평행한 방향으로 향한다.

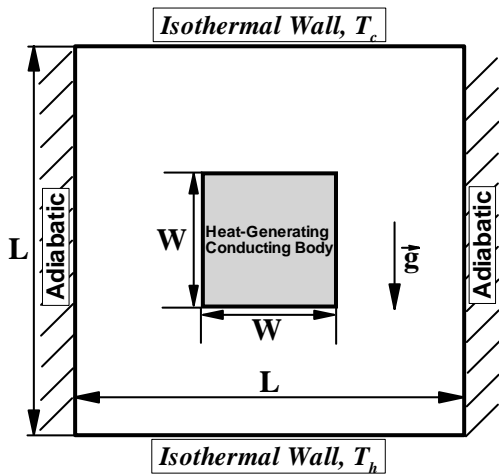


Fig 1. Schematics of the geometry

위의 지배 방정식에 대한 수치해를 구하기 위하여 다영역 스펙트럴 방법 (multi-domain spectral method)을 사용하였다. 수평 및 수직 방향에 아래 식 (4)과 같이 정의된 Gauss-Lobatto점을 이용한 Chebyshev 급수를 사용하여 공간 좌표에 대한 적분을 수행하였다.

$$\begin{aligned}
 x_i &= -\cos\left[\frac{\pi i}{N_x}\right] \\
 y_j &= -\cos\left[\frac{\pi j}{N_y}\right], \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N_{i,j}-1 \quad (4)
 \end{aligned}$$

시간에 대한 적분을 위하여 2단계 시간 분할 방법 (two-step time-splitting method)를 사용하였다. 첫 번째 시간 적분 단계인 'n' 시간에서 중간 시간 '*' 단계에서는 대류-확산 방정식 (advection-diffusion equation)에 대한 해를 구한다. 이때 비선형 항인 대류항의 적분을 위하여 3차의 양해법 (explicit method)인 Adams-Bashforth 기법을 사용하였다. 확산 항에 대한 적분을 위하여 음해법 (implicit method)인

Crank-Nicolson 기법을 적용하였다. 이렇게 구한 속도장을 사용하여, 압력에 대한 포아송 (Poisson) 방정식에 대한 해를 음해법을 사용하여 구하였다. 압력-수정 단계인 'n+1' 단계에서 최종의 divergence-free 조건을 만족하는 속도를 구한다. 온도장에 대한 해는 속도장과 유사한 방법을 사용하여 구한다.⁽⁷⁾ 그림 2는 다영역 기법 (multi-domain)을 이용해서 구현한 계산격자이다. 계산 영역은 9개의 하위 계산영역(subdomain)으로 나누어져 있다.

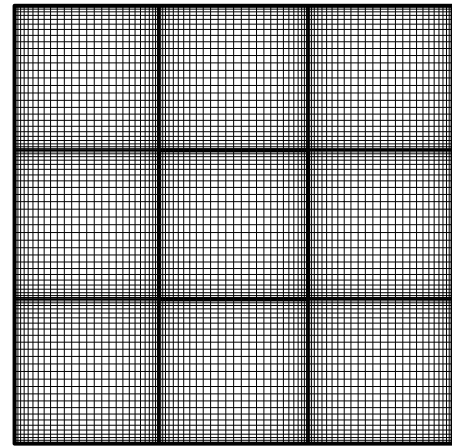


Fig 2. Grid distribution of system

각각의 Nu수에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Nu &= \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{wall} & \overline{Nu} &= \frac{1}{W} \int_0^W Nu \, dS \\
 \langle Nu \rangle &= \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} Nu \, dt & \langle \overline{Nu} \rangle &= \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \overline{Nu} \, dt \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서, n 은 벽면에 수직한 방향이고 W 는 계산 영역의 가로면 전체 길이를 나타내며, t_p 는 시간 적분 구간을 나타낸다.

4. 결과 및 해석

초기에 밀폐 공간 내부의 온도는 냉벽 온도와 동일하며, 내부 전도체에서 발열이 시작된다고 가정하였다. 이러한 조건에서는 밀폐계 내부의 형

성되는 열유동은 냉·온벽 간의 온도차 ($T_h - T_c$)와 발열량(\dot{q})에 의해 발생하는 온도차의 상대적인 크기에 의하여 결정되어 진다. 여기서 이 두 온도차의 비를 하나의 무차원 변수(ΔT^*)로 정의하여 본 연구에서 사용한다. 그러므로 온도차비(ΔT^*), Rayleigh 수 그리고 유체와 고체의 열전도도비(k^*) 등이 밀폐계 내부의 열유동 패턴을 결정하는 중요한 무차원 변수들이다. 표 1은 본 연구에서 사용한 이들에 대한 조건을 보여주고 있다.

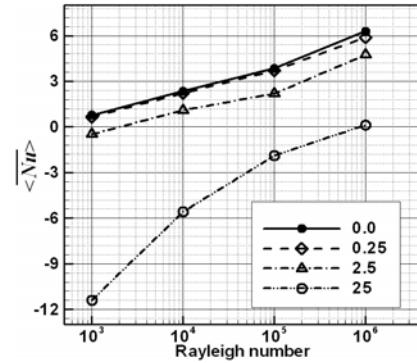
Table 1. Parameters used in this study

k^*	Ra	ΔT^*
0.01, 1 and 148	10^3	0.0
		0.25
		2.5
		25
	10^4	0.0
		0.25
		2.5
		25
	10^5	0.0
		0.25
		2.5
		25
10^6	0.0	
	0.25	
	2.5	
	25	

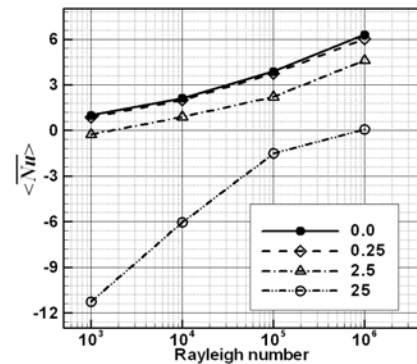
그림 3은 표 1에 보여준 조건의 변화에 따라 고온 벽면에서 계산된 평균 Nu 수를 보여주고 있다. 전체적으로 온도차 비(ΔT^*)와 Ra 수가 내부의 열유동을 결정하는 중요한 변수임을 알 수 있다. ΔT^* 가 2.5일 때, 저 Ra 수에서 평균 Nu 수는 음의 값을 가진다. 즉 부력에 의한 영향보다 내부 발열에 의한 영향이 전체 유동장을 지배한다는 것을 알 수 있다.

유체와 고체의 열전도도의 비가 상대적으로 크고 ($k^*=148$), Rayleigh 수가 10^4 보다 작은 경우에 발열량이 크지 않다면 Rayleigh 수의 변화에 따른 평균 Nu 값의 변화는 거의 없다. 그러나 Ra 수가 10^4 이상으로 증가하면, 부력에 의한 유동의 영향이 점차 증가한다. ΔT^* 가 25인 경우에 Rayleigh 수가 10^4 보다 작은 영역에서는 고체의 발열로 인한 영향이 증가하여 Rayleigh 수가 10^3

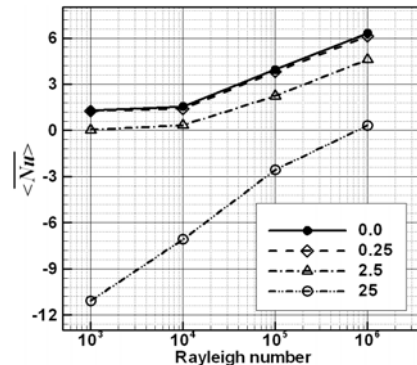
에서 10^4 으로 증가하면 Nusselt 수도 증가한다.



(a) $k^*=0.01$



(b) $k^*=1$



(c) $k^*=148$

Fig 3. Time and surface-averaged Nusselt number at the hot wall as a function of Rayleigh number

그림 4는 발열이 없는($\Delta T^*=0$) 경우, 다양한 Ra 수에 대한 밀폐계 내부의 온도장을 나타낸 것이다. Ra 수가 10^3 일 때는 마지막 정상상태에서 속도성분은 거의 무시할 만하며, 열전달은 거의 전도에 의한 영향이 지배적이다. 즉, 유동이 없고, quasi-steady conduction state 이다.⁽⁷⁾ $Ra=10^4$ 일 때는 부력에 의한 유동이 발생하며,

그림 4(a)에서 보는 바와 같다. 유동은 반시계방향으로 하나의 convecting cell을 형성하며, 초기 조건에 따라서 cell의 회전방향은 반대로 될 수도 있다. 무차원 열전도비(k^*)가 달라짐에 따라 내부의 온도장은 사각 물체를 중심으로 많은 차이가 나타난다. 그러나 Ra 수가 증가함에 따라서 무차원 열전도비의 영향은 부력의 영향에 비해서 적다는 것을 알 수 있다.

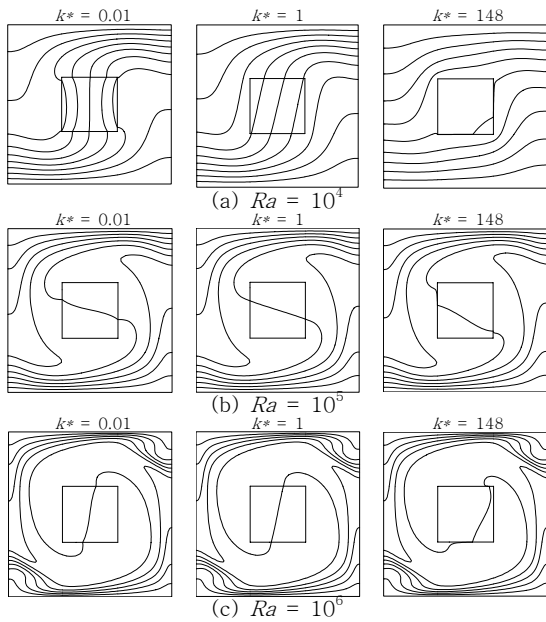


Fig 4. Isotherms for $\Delta T^*=0$ at different Rayleigh number

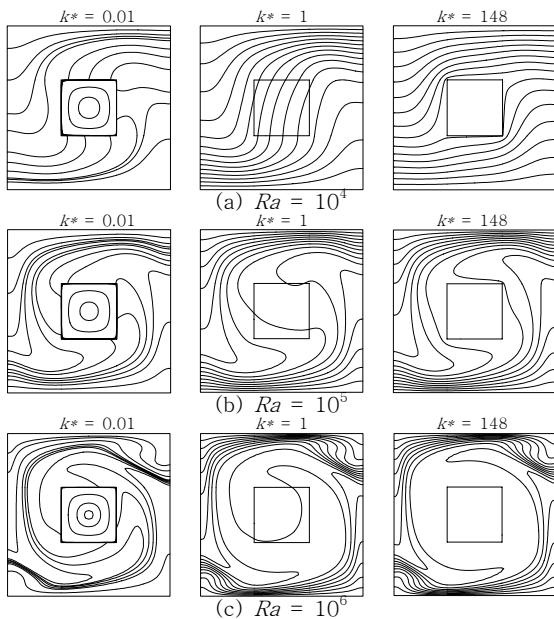


Fig 5. Isotherms for $\Delta T^*=0.25$ at different Rayleigh number

그림 5는 무차원 온도차비, $\Delta T^*=0.25$ 일 때의 온도장을 나타낸 그림이다. 발열이 없을 때와 비교하여, 큰 차이는 없지만, 전체적으로 유동이 가속되어서 밀폐계의 벽면 주위에 온도구배가 크다는 것을 알 수 있다.

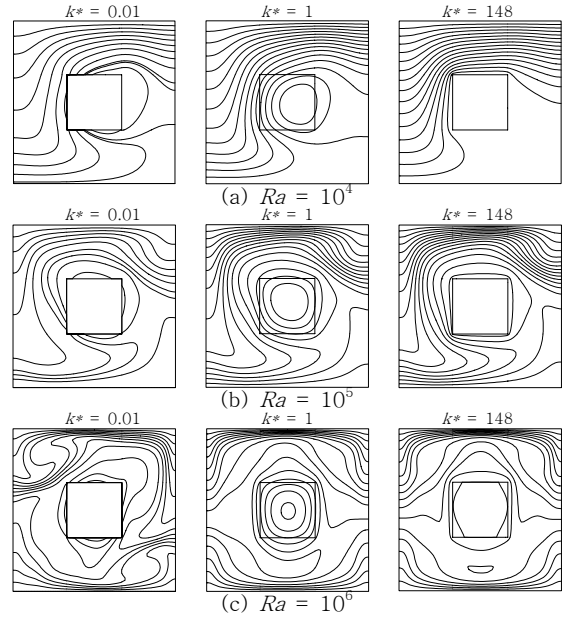


Fig 6. Isotherms for $\Delta T^*=0.25$ at different Rayleigh number

그림 6은 무차원 온도차비(ΔT^*)가 2.5 일 때, 각각의 Ra 수에 대한 밀폐계 내부의 온도장을 나타낸 것이다. 발열의 영향이 내부 유동장에 전반적으로 나타나기 시작하며, 동시에 Ra 수가 증가함에 따라서도 유동이 달라진다. 열전도비가 0.01일때와 1인 경우에는 Ra 수가 비교적 적을때 ($Ra < 10^5$) 내부 유동의 패턴은 비슷하다. 그러나 $Ra=10^6$ 일 때는 $k^*=0.01$ 인 경우 diagonal symmetry만 만족하며, $k^*=1$ 인 경우에는 수평, 수직 한 경우에도 symmetry가 만족한다.⁽⁷⁾ $Ra=10^4$ 일 때, 무차원 온도차비(ΔT^*)가 0.25인 경우에는 부력의 영향이 더 큰 반면, 2.5인 경우에는 발열의 영향이 더 크다. 그렇기 때문에, 그림 6(a)에 밀폐계의 우측 하부에 온도구배가 매우 작은 것을 볼 수 있다. $k^*=148$ 인 경우에는 내부의 발열 전도체가 일정한 온도 조건을 가지는 경우⁽⁶⁾과 유동패턴이 전체적으로 비슷한 것을 알 수 있다.

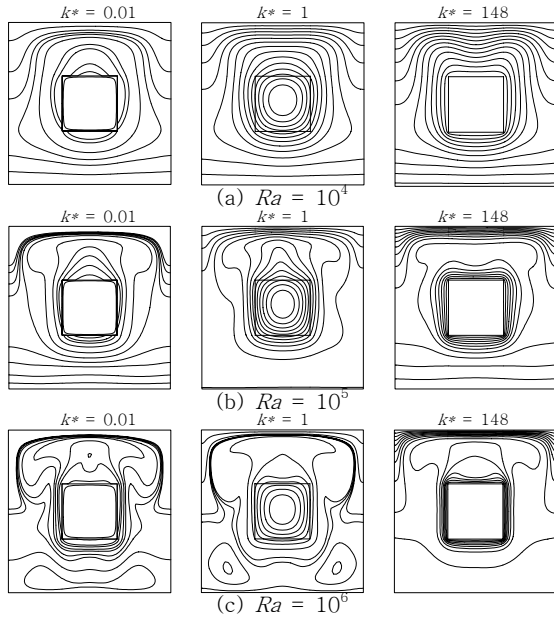


Fig 7. Isotherms for $\Delta T^* = 0.25$ at different Rayleigh number

그림 7은 무차원 온도차비(ΔT^*)가 25인 경우의 내부 온도장을 나타낸 것이다. 부력의 영향에 비해서 온도차비가 매우 지배적이기 때문에 그림 7(a)에서는 유동장이 k^* 값에 상관없이 전체적으로 유사한 패턴을 보인다. $k^* = 148$ 인 경우에는 사각 물체의 하부 영역에는 온도 구배가 거의 없다. 그렇기 때문에 유동은 정체되어 있으며, 상부에만 두개의 convecting cell을 형성한다.

5. 결론

본 연구에서는 사각 실린더가 존재하는 밀폐계 내부의 자연대류 현상에 대해서 수치해석을 수행하였다. 내부의 사각 실린더를 고려하기 위해서 multi-domain 기술이 사용되었고, 정확한 수치해석 결과를 얻기 위해서 spectral method를 사용하여 계산을 수행하였다.

유체와 고체의 열전도도의 비가 상대적으로 크고 ($k^* = 148$), Rayleigh 수가 10^4 보다 작은 경우에 발열량이 크지 않다면 Rayleigh 수의 변화에 따른 평균 Nu 값의 변화는 거의 없다. 그러나 Ra 수가 10^4 이상으로 증가하면, 부력에 의한 유동의 영향이 점차 증가한다. ΔT^* 가 25인 경우에 Rayleigh 수가 10^4 보다 작은 영역에서는 고체

의 발열로 인한 영향이 증가하여 Rayleigh 수가 10^3 에서 10^4 으로 증가하면 Nusselt 수도 증가한다.

후 기

본 연구는 BK21, NRL 그리고 2003년 과학재단의 지역대학 우수과학자 지원사업에 의해서 수행되었다.

참고문헌

- (1) P. G. Drazin and W. H. Reid, 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, UK
- (2) F. B. Lipps, 1976, "Numerical Simulation of Three-Dimensional Bénard Convection in Air," J. Fluid Mech. 75, 113
- (3) S. Balachandar, M.R. Maxey and L. Sirovich, 1988, "Numerical simulation of high Rayleigh number convection," J. Sci. Comput. 4, 219
- (4) J. M. House, C. Beckermann, C., and T. F. Smith, T. F., 1990, "Effect of a Centered Conducting Body on Natural Convection Heat Transfer in an Enclosure," Numerical Heat Transfer A 18, 213
- (5) M.Y. Ha, M.J. Jung and Y.S. Kim, 1999, "A Numerical Study on Transient Heat Transfer and Fluid Flow of Natural Convection in an Enclosure with a Heat-Generating Conducting Body," Numerical Heat Transfer A 35, 415
- (6) M.Y. Ha, H.S. Yoon, K.S. Yoon, S. Balachandar, I. Kim, J.R. Lee and H.H. Chun, 2002, "Two-Dimensional and Unsteady Natural Convection in a Horizontal Enclosure with a Square Body", Numerical Heat Transfer, Vol 41, pp. 183-210,
- (7) J.R. Lee, M.Y. Ha, S. Balachandar, H.S. Yoon and S.S. Lee, 2004, "Natural convection in a horizontal layer of fluid with a periodic array of square cylinders in the interior", Physics of Fluids, In press