복합 물리 시스템 위상 최적설계를 위한 요소 연결 매개법

윤길호† · 김윤영*

Optimal Design of Nonlinear Coupled Multiphysics Structural Systems using The Element Connectivity Parameterization

Yoon Gil Ho, Kim Yoon Young

Key Words : Topology Optimization (위상최적화), Multiphysics Systems (복합물리계), Nonlinear Problem (비선형 문제), Undershoot (언더슛트), Element Connectivity (요소 연결법)

Abstract

Though the standard element density-based topology optimization method has been applied for the optimal design of multiphysics systems, some theoretical problems, such as material interpolation, undershoot temperature prediction, and unstable elements, still remain to be overcome. The objective of this investigation is to present a new topology optimization formulation based on the element connectivity parameterization (ECP) in order to avoid the numerical problems in multiphysics system design and improve optimization results. To show the validity of the proposed approach, the designs of an optimal thermal dissipation and an electro-thermal-compliant actuator were considered.

1. 서 론

위상 최적화는 기존의 치수(Size)와 형상(Shape) 최적화를 포함하며 1980 년대에 Bendsøe 와 Kikuchi 에 의해 연구 된 후 많은 연구자에 의해 활발히 연구 되고 있는 분야이다. (1) 이 위상최적화는 80 년대 이후 지금까지 주로 컴플라이언스 최소화 문제에 대해 주로 이론적인 연구가 되어 왔다. 최근에는 비선형 구조 설계 문제, 둘 이상의 물리계가 연성된 복합 물리계 설계 문제 등에 적용하는 시도가 증가되고 있다. 하지만, 전통적인 위상최적화 기법을 비선형 구조 설계 문제와 복합 물리계에 적용할 때 여러 형태의 수치적 불안정성이 나타나는 문제점이 발생하고 있고 이에 대한 연구가 진행중이다.(2)

이 논문에서는 기존의 위상최적화 기법을 다물리계가 연성된 비선형 복합 물리계 구조물 설계에 적용할 때 발생하는 문제점의 원인을 살펴본다. 그리고, 이를 효과적으로 해결하기 위한 새로운 위상최적화 정식화 기법으로 요소 연결 매개법 (Element Connectivity Parameterization Method)이라는 새로운 방법을 제안하고자 한다.(3,4) 제안된 방법을 복합 물리계가 연성된 MEMS 구조물의 위상최적 설계, 열전달 구조물의 위상최적 설계에 적용하여 제안된 요소 연결 매개법의 특징을 살펴보고자한다. 구체적인 연구 대상으로 Fig. 1에서 정의된 전기-열-비선형 구조 방정식이 연성된 미소 액츄에이터의 위상최적 설계문제를 선택하였다.(5,6,7) 이

† 서울대학교 정밀 기계 설계 연구소,
멀티스케일설계 창의 사업단 연구원
E-mail : pilot@idealab.snu.ac.kr
TEL : (02) 880-7130
*서울대학교 기계항공공학부 교수

문제는 전기장과 온도장 해석을 위한 포아송 방정식(Poission Equation), 그리고, 기하 비선형 (Geometrical nonlinear) 포함된 탄성 방정식을 동시에 고려해야만 한다. 이 논문에서는 각각의 지배 방정식을 순차적으로 푸는 방법을 사용한다.

2. 기존 위상최적화 기법의 복합 물리계 시스템에서의 적용과 문제점

2.1 복합 물리계 시스템의 정식화

지금까지의 위상최적화 기법의 핵심 아이디어는 먼저 설계 영역을 유한 요소로 분할한 다음 각 유한 요소의 물성치를 각 요소에 정의한 설계 변수인 상대 밀도로 보간하여 요소에서의 재료의 존재 여부를 모사한다. 그리고, 정의된 목적 함수와 구속조건을 만족시키는 밀도 설계 변수의 분포를 최적화 기법을 사용하여 찾아간다. 예를 들어 Fig. 1 에서 정의된 복합 물리계 구조물을 최적화하기 위해서는 식 (1)과 같은 정식화를 사용한다.[1,2]

$$\text{Max}: \ U_{\text{out}}$$

$$\text{Subject to } H(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{N} \int_{\Omega_e} \rho_e d\Omega - M_0 \le 0$$

$$\left(\frac{\hat{U}_{out}}{U_{out}} \right)^2 \le \varepsilon^* \quad (\varepsilon^* = 0.01) \qquad (1)$$

여기서 U_{out} 는 액츄에이터의 성능을 나타내는 것으로 원하는 방향으로의 변위를 나타낸다. $\hat{U}_{out}$ 는 U_{out} 방향과 수직으로 액츄에이터가 움직인 변위를 나타낸다. M_0 와 N 은 각각 재료 구속조건과 유한 요소의 개수를 나타낸다. 이 정식화를 사용하여 미소 복합 물리계의 액츄에이터를 설계하고 제작할 수 있다.[5] 이 최적화 문제를 사용하고 요소에 정의된 밀도를 이용하여 위상을 정의하는 기존의 전통적인 위상최적화 기법은 지금까지 많은 문제에 성공적으로 적용되어 왔다. 하지만, 복합 물리계를 포함한 여러 문제에 위상최적화를 적용함에 있어서 발생하는 문제점 또한 보고 되었다.[2]

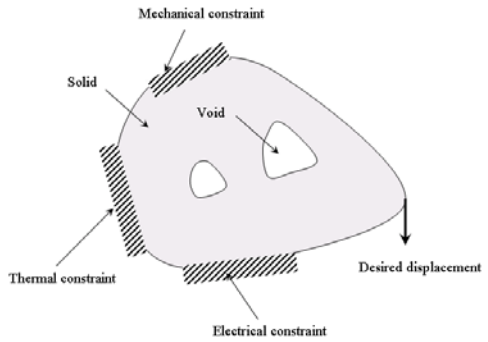


Fig. 1 Loading and boundary conditions for topology synthesis of an electro-thermal-compliant actuator.

2.2 기존 위상최적화의 문제점

전통적인 기존의 위상최적화 기법은 복합 물리계 시스템에서 극복하기 어려운 문제점을 가지고 있다. 예를 들어 기존의 위상 최적화에서는 요소에 정의된 밀도를 이용하여 해석과 관련된 물성치의 보간이 어렵다. 또한, 열전달 해석에 필요한 대류 관련 특성을 요소의 밀도 함수로 모델링하면 물리적으로 타당하지 못한 온도 분포를 얻게 된다. 이것은 언더슛트 (Undershoot)라는 이름으로 불리는 문제로 다른 유형의 문제에서도 나타난다.

마지막으로, 기하학적 비선형 변형을 (Geometrical Nonlinear Deformation) 고려하는 경우에 낮은 구조 강성을 가지는 낮은 밀도의 요소들이 수치적으로 불안정성(Unstable)을 띄게 된다. 이 현상으로 인하여 뉴톤 랩손법(Newton Raphson)을 이용하여 평형 상태를 찾아가는 수치적 반복법의 수렴성을 심각하게 훼손할 뿐만 아니라 최적화 전과정의 수렴성을 어렵게 만들며 심각한 경우에는 해를 구할 수 없다고 알려져 있다.[7]

3. 복합 물리계 시스템의 위상최적화를 위한 요소 연결 매개법

3.1 기본 개념

이 절에서는 위상최적화를 수행하는 요소 연결 매개법의 기본 아이디어을 제시한다. 그리고, 이 새로운 방법이 복합 물리계가 연성되는 미소 액츄에이터의 위상 최적 설계에서 관찰되었던 기존의 난제들을 어떻게 효율적으로 해결하는지에 대해 살펴본다.

요소 연결 매개법의 기본 아이디어는 위상을 정의하기 위해 요소 내에 정의되어 있는 밀도를 변경하는 것이 아니라, 요소 사이의 연결 정도를 변경하여 최적의 위상을 찾겠다는 것이다. 예를 들어 Fig. 2(a)의 위상을 수치적으로 모델링하기 위해 기존의 밀도법이 이용한 것은 Fig. 2(b)에 도시한 것처럼 구조물 부분은 강한 밀도를 비 구조물 부분에는 약한 밀도를 대입한다. 한편, 본 연구에서 제안하는 방법은 Fig. 2(c)에 도시한 것처럼 모든 요소를 원래의 강성을 갖도록 하되 요소 사이의 연결 정도를 이용하여 원하는 위상을 표시하고 있다. 즉, 평면 요소들이 길이가 0 인 탄성링크들로 연결된 것으로 모델링 한 후 그 탄성 링크의 탄성값을 변화시킴으로써 원하는 위상을 수치적으로 표현하는 것이다. 따라서, 기존의 밀도법에서와 같이 설계 변수를 E1-E6 의 요소에 정의하는 것이 아니라, 연결시키고자 하는 링크를 정의하고, 링크의 강성을 설계 변수의 함수로 보간하게 된다.

이 논문에서는 Fig. 3이 보여주듯이 i 번째 가상 링크는 유한 요소의 노드 p 와 q 를 연결한다고 가정하고 링크의 강성을 링크에 정의되는 변수인 γ_i^{pq} 로 식 (2)같이 모델링 하였다.

$$k_e^{link} = l_0(\gamma_e^{pq})^n k_{link} \tag{2-a}$$

$$l_i^{pq} = l_0(\gamma_i^{pq})^n \tag{2-b}$$

$$\gamma_{i,LOW}^{pq} \le \gamma_i^{pq} \le \gamma_{i,UPPER}^{pq} = 1 \tag{2-c}$$

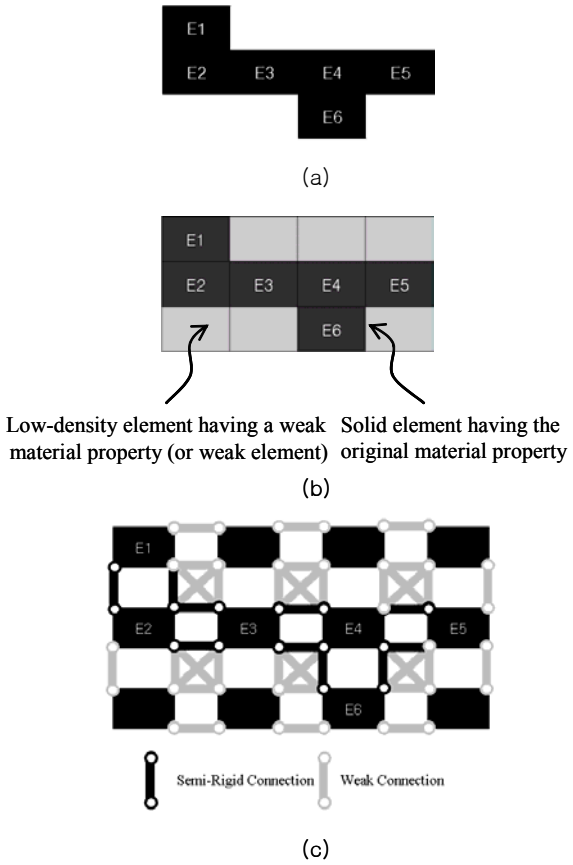


Fig. 2 Comparison between the density methods and ECP method.

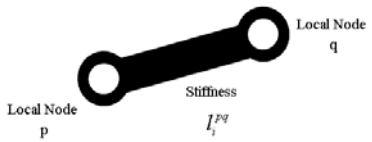


Fig. 3 Zero-length link connecting node p and node q.

식 (2)에서 γ_i^{pq} 는 설계 변수로 $\gamma_{i,LOW}^{pq}$ 부터 $\gamma_{i,UPPER}^{pq}$ 까지 연속적으로 변화한다. γ_i^{pq} 가 $\gamma_{i,UPPER}^{pq}$ 일 때에는 이 링크가 노드 p 와 노드 q 를 강하게 연결하게 되고 $\gamma_{i,LOW}^{pq}$ 일 때에는 이 링크는 약한 링크가 되어 노드 p 와 노드 q 가 떨어진 것으로 해석한다. l_0 는 링크 강성의 상한값으로 구조물의 강성을 생각해서 결정한다. 이 논문에서는 구조물의 탄성계수의 약 10 배에서 10^5 값을 사용한다. 또한, n 은 벌칙 역할을 하는 것으로 밀도법의 벌칙 지수와 마찬가지로 중간값의 변수를

$\gamma_{i,LOW}^{pq}$ 와 $\gamma_{i,UPPER}^{pq}$ 로 효과적으로 수렴할 수 있게 도와준다.

열전달 및 전기장 문제에서는 절점당 한 개의 자유도를 구조 문제에서는 절점당 2 개내지 3 개의 자유도를 갖기 때문에 위상을 정의하는 가상 링크 또한 적용하는 문제에 따라 그 자유도가 바뀌게 된다. 열전달 및 전기장 문제에서는 다음의 식 (3), 그리고, 구조 문제에서는 다음의 식 (4)을 이용하여 링크의 강성을 표현한다.

$$k_{i,(pq)}^{link} = l_0(\gamma_i^{pq})^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} k_{i,(pq)}^{link} &= l_i^{pq} k_{nominal}^{link} \\ &= l_0(\gamma_i^{pq})^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

3.2 표현법

기존의 밀도법에서는 요소의 유무 정도를 그 요소에 정의된 밀도값에 비례하도록 하였다. 하지만 요소 연결 매개법은 평면 유한 요소의 밀도가 항상 상한값으로 유지되기 때문에 기존의 밀도법과는 다른 표현법이 필요하다. 이 논문에서는 두 개의 표현법을 제시한다. 하나는 골격그림법 (Skeleton Representation Method)이고 다른 하나는 레스터 표현법 (Raster Representation Method)이다.

먼저 골격 그림법은 Fig. 4(c)과 같이 구조물의 유한 요소는 표시하지 않고 단지 실제 링크 분포만을 그리는 것이다. 여기서 실제 링크는 두께와 길이가 없지만, 시각적 표현을 위해서 Fig. 4(c)와 같이 유한 요소의 크기에 비례하여 일정한 길이와 두께의 선을 그렸다.

두번째 방법에서는 각 평면 요소에 연결되어 있는 4 개의 링크의 설계 변수의 평균을 그 요소의 밀도값으로 간주한다. 각 요소의 가상 밀도값이 구해지면, 기존의 밀도법에서처럼 Fig. 4(d)로 요소의 유무가 표현된다. 하지만, 해석시 평면 요소의 강성은 원래의 값을 가지고 있다는 사실에 주목할 필요가 있다.

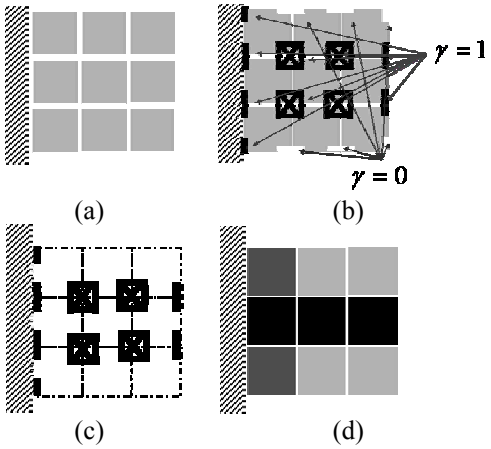


Fig. 4 Representation method (a) structural elements, (b) possible link distribution, (c) skeleton Image, and (d) raster image.

4. 요소 연결 매개법을 이용한 MEMS 액츄에이터 설계

본 연구에서 제안된 요소 연결 매개법을 이용하여 강성 최대화 문제, 열전달 구조 설계 문제, 전기-열-비선형 구조 해석이 연성된 MEMS 액츄에이터를 설계한다. 먼저 Fig. 5(a)의 스냅(Snap-Through) 구조물의 강성 최대를 위해 요소 연결 매개법을 적용하여 Fig. 5(b)와 같은 해를 얻을 수 있었다. 이 문제에서는 선형 해석이 고려할 수 없는 좌굴을 고려하기 위해 기하학적 비선형 해석이 필수적이다.[2] 또한, 이 최적화 문제를 기존의 밀도법으로 최적의 위상을 구하면 불안정 요소(Unstable

Element)가 발생하여 심각한 수치적 문제가 발생함이 알려져 있다.(2) 하지만, 이 논문에서 제안된 요소 연결 매개법으로 불안정 요소를 완전히 해결할 수 있었고 또 최적화의 수렴 속도도 크게 향상시킬 수 있었다.

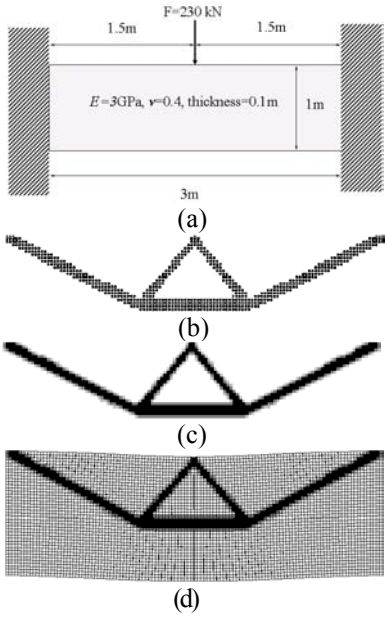
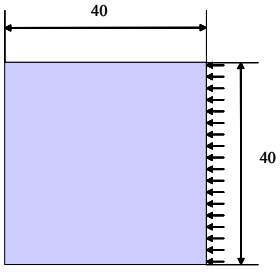
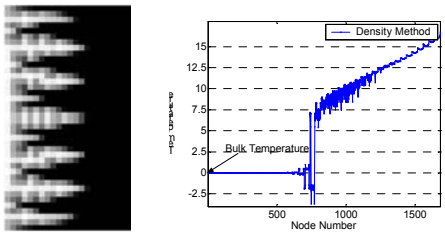


Fig. 5 A result with the element connectivity parameterization method for snap-through (W_{opt}=12,549J) (a) mass constraint ratio=10%, domain discretized by 120×40, (b) skeleton image, (c) raster image, (d) deformed shape.

다음예제로 요소 연결 매개법을 이용하여 열을 가장 잘 방출 할 수 있는 구조를 설계해 보았다. Fig. 6은 기존의 밀도법으로 설계 한 것으로 Fig. 6(c)에서 볼 수 있듯이 상온(Bulk Temperature)보다 낮은 온도를 보이는 언더슛트(Undershoot) 현상을 관찰할 수 있었다. Fig. 7은 요소 연결 매개법으로 위상최적화를 수행한 것으로 온도 분포를 살펴보았을 때 Fig. 6(c)와는 다르게 상온보다 낮은 온도 분포를 보이지 않는다.

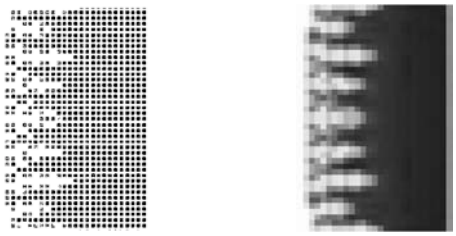


(a)

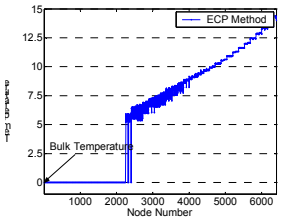


(b) (c)

Fig. 6 A result with the density based method (a) densitydistribution, (b) temperature distribution. (Thermal conductivity=1, surface convection coefficient=0.002, Uniform heat input=0.5 at nodes, Bulk temperature T_∞=0, the mass constraint=40% of design domain, and 40×40 finite element discretization)



(a) (b)



(c)

Fig. 7 A result by the element connectivity parameterization method (a) skeleton image, (b) raster image, (c) temperature.

마지막으로, Fig. 8에서 정의된 전기-열-비선형 구조 방정식이 연성된 액츄에이터를 최적설계 하였다. 먼저 요소 연결 매개법을 사용하여 설계 영역내의 전기와 열분포를 구했으며 이를 이용하여 기하 비선형을 고려한 액츄에이터의 변형량을 계산하였다. 또한, Fig. 9의 결과를 얻기 위해 구조물의 측면에서 발생하는 대류현상 또한 고려하였다.

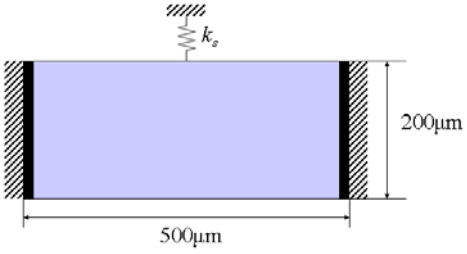
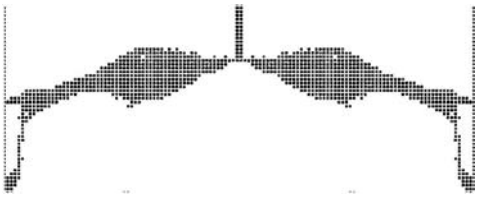
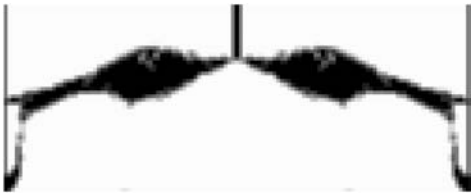


Fig. 8 Problem definition for the electro-thermal-compliant MEMS device (k_s =100N/m, Mass constraint = 30%, thickness=15 ㎛, Young's Modulus = 200 GPa, Poisson ratio = 0.31, the electric conductivity= 6.4×10^{6}K(Ωm)$^{-1}$, the thermal conductivity=90.7 W/(Km), the convection coefficient=18.7×10^{3}W/(m^{2}K), Thermal Expansion Coefficient=15×10^{-6}K^{-1}, Applied voltage = 0.3 Volt)



(a)



(b)

Fig. 9 A result with the element connectivity parameterization (a) skeleton image representation, (b) raster image representation.

5. 결론

이 논문에서는 MEMS 구조물과 같은 비선형 복합 물리계의 연성 해석이 요구되는 구조 시스템을 위상 최적 설계 할 수 있는 새로운 정식화 방법인 요소연결 매개법을 제안하였으며, 제안된 방법을 MEMS 구조 설계에 적용하여 물리적으로 타당한 위상을 효과적으로 얻을 수 있었다. 제안된 요소연결 매개법이 기존의 방법에 비해 설계 변수와 물리계 방정식의 물성치 사이의 관계의 모호성을 해결할 수 있었고, 전기장이나 온도장에서 기존의 방법과는 다르게 물리적으로 타당한 해석결과를 줄 수 있음을 확인하였다. 또한, 기하비선형을 고려하는 최적설계문제에서 나타나는 수치적 불안정성 문제를 해결할 수 있었다.

참고문헌

(1) Bendsøe M.P. and Kikuchi N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Comp. Meth. Appl. Mechs. Engng.,* Vol. 20, pp. 197~224.
(2) Bendsøe MP. and Sigmund O., 2003, *Topology Optimization,* Springer, New York.
(3) Yoon G.H., 2004, *Geometrical nonlinear topology optimization with feature scale control*, Ph.D Thesis, Seoul National University.
(4) Yoon G.H. and Kim Y.Y., 2004, "Inter-element connectivity parameterization for topology optimization of geometrically nonlinear structures," Submitted.
(5) Heo S., Yoon G.H., and Kim Y.Y., 2004, "The robust design for micro electro-thermal actuators," SPIE 2004.
(6) Mankame N.D. and Anathasuresh G.K., 2001, "Comprehensive thermal modeling and characterization of an electro-thermal-compliant microactuator," *Journal of Micromechanics and Microengineering,* Vol. 11, pp 1~11.
(7) Sigmund O., 2001, "Design of Multiphysics Actuators using Topology Optimization – Part I: One Material Structure," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* Vol. 190(49-50), pp. 6577~6604.