

동하중을 고려한 설계의 필요성에 관한 고찰

강병수[†] · 김주성^{**} · 박경진^{*}

An Investigation of Dynamic Characteristics of Structures in Optimization

B. S. Kang, J. S. Kim and G. J. Park

Key Words : Dynamic Load(동하중), Static Load(정하중), Dynamic Analysis(동적해석), Static Analysis(정적해석), Natural Frequency(고유진동수), Homogeneous Solution(일반해), Particular Solution(특수해), Equivalent Force(등가하중), Optimization (최적설계)

Abstract

All the loads in the real world are dynamic loads and it is well known that structural optimization under dynamic loads is very difficult. Thus the dynamic loads are often transformed to the static loads using dynamic factors. However, due to the difference of load characters, there can be considerable differences between the results from static and dynamic analyses. When the natural frequency of a structure is high, the dynamic analysis result is similar to that of static analysis due to the small inertia effect on the behavior of the structure. However, if the natural frequency is low, the inertia effect should not be ignored. Then, the behavior of the dynamic system is different from that of the static system. The difference of the two cases can be explained from the relationship between the homogeneous and the particular solutions of the differential equation that governs the behavior of the structure. Through various examples, the difference between the dynamic analysis and the static analysis are shown. Also the optimization results considering dynamic loads are compared with static loads.

1. 서 론

정하중은 시간의 변화에 관계없이 일정한 크기를 갖고 영구적으로 작용하는 이상적인 하중이다. 반면 동하중은 시간의 변화에 따라 하중의 크기가 바뀌는 것으로서 현실적인 하중이다.

현실적으로 모든 구조물에 작용하는 하중은 동하중이다. 하지만 해석의 편리함과 시간, 경제성 등의 이점을 위해 구조물을 정적해석 하는 경우가 많다. 많은 경우에 동하중에서 정하중을 산출할 때에 동적계수(dynamic factor)를 동하중의 최대 크기에 곱하는 방법이 사용되고 있다.⁽¹⁾ 이때 사용되

는 동적계수는 경험이나 설계지침서 등에 의해서 결정된다. 일반적으로 동적계수에 의하여 계산된 정하중은 동하중이 작용하는 방향과 동일한 방향으로 적용된다. 그러나 동하중을 받는 구조물은 진동하며 구조물이 동하중의 반대방향으로 변형했을 때 파손될 수 있다.

1996년 최우석은 동하중을 정하중으로 변환할 때 사용되는 동적계수의 적용이 적절하지 못할 수 있음을 제시하였다.⁽²⁾ 또한 2003년 이종남은 구조물에서 동적해석과 정적해석의 최대응력이 나타나는 위치가 달라질 수 있음을 제시하였다.⁽³⁾

일반적으로 구조물의 강성이 매우 커지거나, 질량이 매우 작아지면 감쇠를 무시한 구조물의 동적 평형방정식에서 관성(inertia)의 영향이 강성에 비하여 상당히 작아진다.^(4,5) 이때의 동적해석은 정적해석과 유사한 결과를 나타낸다. 하지만 관성의 효과를 무시할 수 없는 경우에는 동적해석과 정적

[†] 한양대학교 최적설계기술연구센터

^{*} 한양대학교 기계경영정보학부

^{**} 현대자동차

해석은 서로 예측하기 어려운 결과를 나타낼 수 있다. 그러므로 두 해석의 특성에 대한 비교 및 동적해석의 필요성에 대한 연구가 필요하다.

구조물의 고유진동수가 하중의 진동수에 비하여 매우 큰 경우에는 동적계수를 적절히 선정하여 정적해석을 해도 성공적인 해석 및 설계가 가능할 수 있다. 하지만 그렇지 않은 경우에는 반드시 동적효과를 고려한 해석 및 설계가 필요하다. 또한 이러한 결과는 미분방정식의 해에서 일반해(homogeneous solution)와 특수해(particular solution)의 관계로 설명할 수 있다.⁽⁴⁻⁶⁾

동적효과를 포함한 설계의 예로서 2000년 최우석이 제안한 등가정하중의 개념과 이를 이용한 구조최적설계에 대하여 논한다.⁽⁷⁾ 또한 이 최적화 결과와 동적계수를 이용한 최적화의 결과를 비교하여 동적 효과를 포함하지 않은 설계가 위험한 결과를 도출할 수 있음을 보인다.

2. 동적해석의 필요성

2.1 동적해석과 정적해석

정하중이 가해지는 구조물의 해석은 다음의 정적평형방정식(static equilibrium equation)을 사용한다

$$\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{x}=\mathbf{s} \quad (2.1)$$

여기서 \mathbf{K} 는 강성행렬(stiffness matrix), \mathbf{b} 는 설계변수(design variables), \mathbf{x} 는 정적변위벡터(static displacement vector)이고, \mathbf{s} 는 정적하중벡터(static load vector)를 의미한다. 반면 동하중이 가해지는 구조물의 해석은 다음의 동적평형방정식(dynamic equilibrium equation)을 사용한다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{d}}(t)+\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{d}(t)=\mathbf{f}(t) \quad (2.2)$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량행렬(mass matrix), \mathbf{d} 는 동적변위벡터(dynamic displacement vectors), \mathbf{f} 는 동하중벡

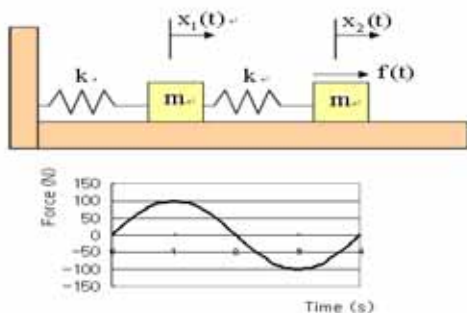


Fig. 1 A spring-mass system with two degrees of freedom and the applied dynamic load

터(dynamic load vectors)이다. 감쇠(damping)는 무시

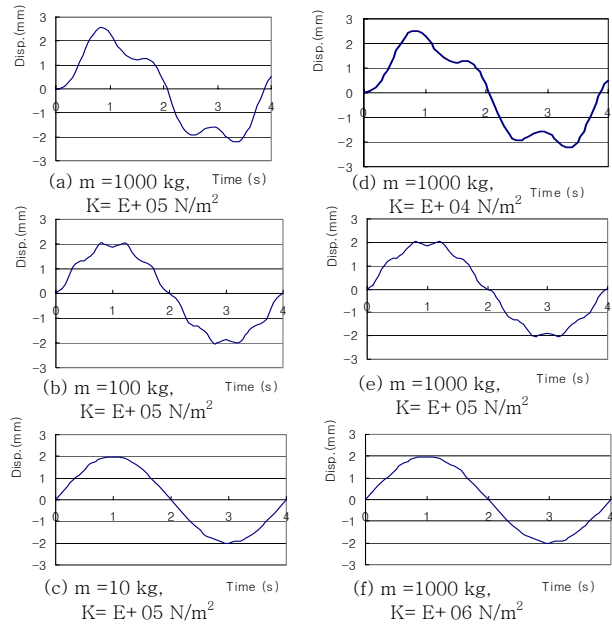


Fig. 2 The mass and stiffness effects on behaviors of the system

하였다.

하중이 변하지 않는 상태에서 구조물의 질량이 매우 작아지면 식 (2.2)의 좌변 중 첫째 항의 영향이 둘째 항의 영향에 비해 매우 작아지는 것을 알 수 있다. 즉 관성의 효과가 작아지는 것을 알 수 있다. 또한 구조물의 강성이 매우 큰 경우에도 같은 현상이 발생한다. 이러한 경우 정적시스템과 동적시스템은 거의 유사한 거동을 한다. Fig. 1은 2자유도 스프링-질량 시스템과 작용하는 하중 개형을 나타낸다. 여기서 질량과 지면사이의 마찰은 무시한다. 이 시스템에서 질량과 스프링 강성의 크기를 변화시킬 때의 x_2 의 결과들을 Fig. 2에 나타내었다. Fig. 2의 왼편 그래프는 시스템의 거동에 대한 질량의 효과(mass effect)를 나타낸다. Fig. 2의 오른편 그래프는 스프링의 강성의 효과(stiffness effect)를 나타낸다. Fig. 3은 Fig. 2(f)와 같은 조건에서 하중의 개형을 따라 여러 개의 정하중으로 나눠 다중하중조건(multiple loading condition)으로 정적해석 한 결과이다.

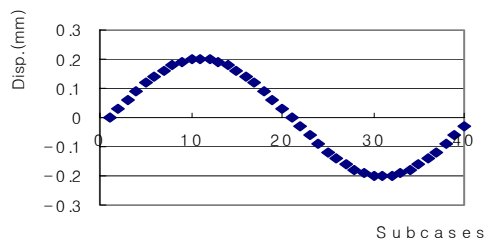


Fig. 3 The results of static analysis with multiple loading condition when the system is very stiff

2.2 설계관점에서 본 동적해석의 필요성

외부 가진이 주어지는 무감쇠 다자유도 시스템의 지배방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [K]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{Q}(t)\} \quad (2.3)$$

고유치문제를 풀어 시스템의 고유진동수와 정규화된 모드행렬(Normalized Modal Matrix)을 구한 후 연성된 자유도를 비연성 시키기 위하여 다음과 같은 선형변환(linear transformation)을 한다.

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{V}]\{\boldsymbol{\eta}\} \quad (2.4)$$

여기서 $[\mathbf{V}]$ 는 정규화 된 모드행렬이다. (2.4)식을 (2.3)에 대입한 후 $[\mathbf{V}]^T$ 를 전적(premultiplying)하면 다음과 같이 비연성 방정식이 된다.

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = [\mathbf{V}]^T \{\mathbf{Q}(t)\} \quad (2.5)$$

식 (2.5)의 해석적인 해를 구하기 위하여 가해지는 하중을 다음과 같이 정의한다.

$$Q_i(t) = P_i \sin(\omega_f)_i t \quad (2.6)$$

여기서 $(\omega_f)_i$ 는 하중의 진동수이다. 식 (2.6)을 (2.5)에 대입한 후 일반해와 특수해를 구한다.

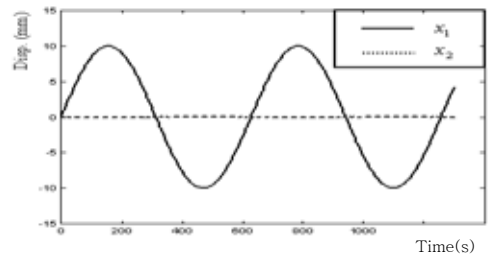
$$(\eta_i)_h = A \cos \omega_i t + B \sin \omega_i t \quad (2.7)$$

$$(\eta_i)_p = \frac{[\mathbf{V}]^T \{\mathbf{P}\}}{\omega_i^2 - (\omega_f)_i^2} \sin(\omega_f)_i t \quad (2.8)$$

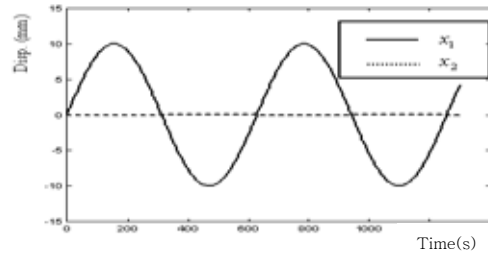
일반해와 특수해를 더한 후 다시 선형변환 시킨다. 그리고 초기조건 0을 대입하고 간단하게 정리하면 다음과 같은 전체 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{q}_i(t) = D_i \sum_{j=1}^{DOF} \left(\frac{1}{\omega_j^2 - (\omega_f)_j^2} \right) \left(\sin(\omega_f)_j t - \frac{(\omega_f)_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \quad (2.9)$$

식 (2.8)에서 $\sin(\omega_f)_i t$ 항은 특수해의 영향을, $\frac{(\omega_f)_i}{\omega_i} \sin \omega_i t$ 항은 일반해의 영향을 나타낸다. 일반해는 구조물의 고유한 특성의 영향을 받는 해이고, 특수해는 가해지는 하중의 영향을 받는 해이다. 일반해에서 구조물의 고유진동수가 하중의 진동수



(a) Total solution



(b) Particular solution only

Fig. 4 The total solution and particular solution where the particular solution is dominant

에 비하여 매우 크면 일반해의 영향이 작아지고 특수해가 시스템 거동에 지배적이 된다. 반대로 하중의 진동수가 구조물의 고유진동수에 비하여 매우 크면 일반해의 영향이 지배적이 된다.

예를 들어 조화가진(harmonic excitation)이 가해지는 2자유도 스프링-질량 시스템을 고려한다. Fig. 4는 하중의 진동수가 매우 작을 때 전체 변위와 특수해 만을 고려했을 때의 변위를 나타낸다. 이 경우 두 결과가 거의 같음을 알 수 있다. 결과적으로 시스템의 응답은 구조물의 고유진동수와 하중의 진동수의 상대적인 크기의 영향을 받는다. 구조물의 고유진동수가 하중의 진동수보다 월등히 크면 정적해석과 유사한 결과를 얻을 수 있다. 이것은 정상상태(steady-state)와 유사하다.⁽⁴⁻⁵⁾ 하지만 이와 같이 특수해가 지배적인 시스템이 아니라면 일반해의 영향을 무시할 수 없고 오히려 x_2 의 최대값이 x_1 의 최대값보다 더 큰 경우가 존재한다. 그러므로 동적효과를 충분히 반영하는 해석 및 설계가 필요하다. 한가지 방법으로 2.3장에서는 2000년 최우석이 제안한 등가정하중에 개념과 이를 이용한 구조최적설계에 대하여 논한다.⁽⁷⁾

2.3 동적효과를 반영하고 있는 정하중을 이용한 최적설계 방법

등가정하중(equivalent static load)은 동하중이 구조물에 작용할 때 임의의 시간에 발생하는 변위장과 같은 변위장을 만들어내는 정하중을 말한다. 식 (2.1)과 (2.2)로부터 동하중 하의 과도응답해석(transient response analysis)을 할 때 임의의 시간 t_a 에 발생하는 변위장과 동일한 변위장을 발생시키

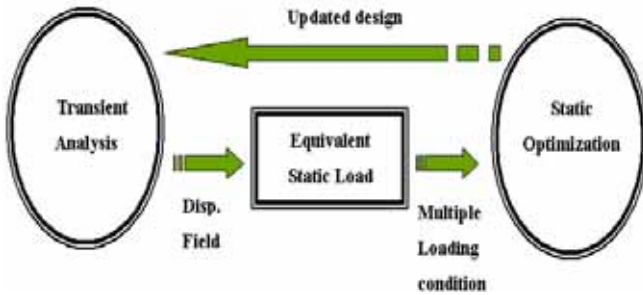


Fig. 5 An optimization technique using the equivalent static loads

는 등가정하중은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$s = Kd(t_a) \quad (2.10)$$

이며 여기서

$$s = f(t) - M(b)\ddot{d}(t) \quad (2.11)$$

s 는 변위법에 의한 등가정하중을 나타내며 식 (2.10)로부터 외력과 관성력을 포함하고 있음을 알 수 있다. 그러므로 2.2절에서 설명한 동적효과를 포함하고 있는 정하중이라고 할 수 있다. 동적 외력은 구조물의 특정한 질점에 작용하지만, 실제 그 영향은 모든 질점에 미치게 된다. 등가정하중은 이런 영향을 충분히 포함하여 구조물의 모든 자유도에 작용하며, 이산화 된 시간 영역에서 계산되므로 시간영역의 모든 순간에서의 모든 질점에서 그 값을 갖는다.

등가정하중을 이용한 구조최적설계 방법으로 매시간단계에 대해 계산된 등가정하중을 다중하중 조건으로 적용하는 것이 제안되었다.⁽⁸⁻¹⁰⁾ Fig. 5는 등가정하중을 산출하고 이를 다중하중조건으로 적용하여 해석영역(analysis domain)과 설계영역(design domain)을 왕래하며 반복수행을 통해 수렴시키는 방법을 보여준다.

3. 예 제

이번 장에서는 구조물의 고유진동수와 가해지는 하중의 진동수에 따른 동적해석과 정적해석의 결과에 대하여 논한다. 또한 동하중이 작용하는 구조물에서 동적계수를 사용한 정적반응최적화와 동하중의 효과를 충분히 반영하고 있는 등가정하중을 사용한 정적반응최적화를 수행하여 그 결과를 비교한다.⁽¹¹⁻¹³⁾

3.1 11부재 트러스

Fig. 6은 11부재 트러스(eleven-bar-truss) 구조물과 하중개형을 나타낸다. 이 때 가해지는 하중의 진동수는 62.8 rad/s이다.

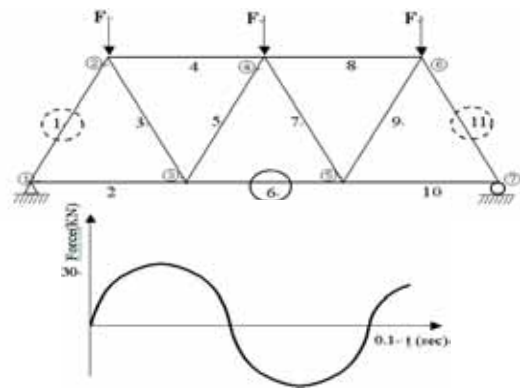


Fig. 6 An eleven bar truss and the applied dynamic loads

정적해석과 동적해석의 결과를 비교하기 위하여 시스템에 정하중을 가했을 때 최대응력이 발생하는 부재는 1번과 11번 이었다.

동적 해석에서 구조물의 고유진동수와 하중의 진동수의 영향을 알아보기 위해 하중의 진동수보다 매우 작은 고유진동수를 갖는 구조물과 매우 큰 고유진동수를 갖는 구조물을 비교하였다. 먼저 하중의 진동수에 비하여 매우 작은 10.51 rad/s의 첫번째 고유진동수를 갖는 구조물이다. 이 경우 정적해석과 달리 6번 부재에서 최대응력이 발생하는 것을 알 수 있다. 이와 반대로 하중의 진동수에 비하여 매우 큰 89.32 rad/s의 첫번째 고유진동수를 갖는 구조물은 정적해석과 같이 1번과 11번 부재에서 최대응력이 발생하였다.

또한 하중의 진동수와 구조물의 고유진동수와의 상관관계를 알아보기 위하여 하중의 진동수가 매우 큰 경우를 생각해 보았다. 하중의 진동수가 628.3 rad/s일 때이다. 첫번째 비교 대상은 앞에서 고려한 89.32 rad/s보다 더 큰 105.12 rad/s의 첫번째 고유진동수를 갖는 구조물이다. 이 경우는 앞의 결과와 달리 6번 부재에서 최대응력이 발생하는 것을 알 수 있다. 이 결과로서 구조물의 고유진동수와 하중의 진동수는 서로 상관관계가 있음을 알 수 있다. 하중의 진동수가 매우 큰 경우에는 비교적 큰 고유진동수를 갖는 구조물에서도 동적해석과 정적해석에서 최대응력이 발생하는 위치가 달라질 수 있다. 그러므로 이런 경우 설계를 할 때 반드시 동적해석, 혹은 동적 효과를 충분히 반영하는 정하중으로의 변환이 필요하다.

3.2 5부재 트러스

Fig. 7은 5부재 트러스 구조물의 하중조건 및 구속조건과 가해지는 동하중의 개형을 나타낸다. 하중의 진동수는 62.8 rad/s이다.

동적해석과 정적해석의 차이점을 알아보기 위

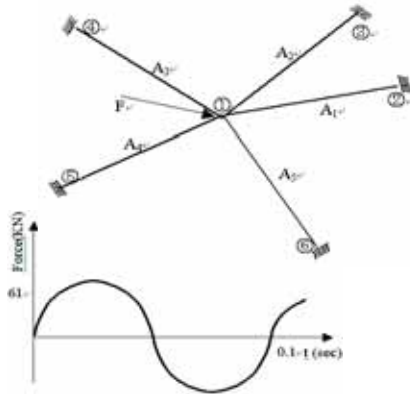


Fig. 7 A five bar truss and the applied dynamic load for the size optimization

해 동적계수를 이용한 정적반응최적화와 동하중의 효과를 반영하는 등가정하중을 이용한 정적반응최적화로 치수최적화(size optimization)를 수행하였다. 또한 하중의 진동수와 구조물의 고유진동수의 관계를 알아보기 위해 하중의 진동수의 크기에 따른 결과를 비교하였다.

최적화의 정식화는 다음과 같다.

Find Design variables A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (3.1a)

To minimize weight (3.1b)

Subject to $|\sigma_i| < 50 \text{ MPa}$ ($i = 1, \dots, 5$) (3.1c)

첫번째는 구조물의 고유진동수가 하중의 진동수보다 매우 큰 경우로 첫번째 고유진동수가 89.04 rad/s이다. 이 경우 동적계수를 사용한 최적화에서 1번 부재가 가장 두껍게 설계된다. 그리고 등가정하중을 이용한 최적화도 역시 1번 부재가 가장 두껍게 설계된다. 또한 전체적인 설계 경향

Table 1 The optimum values of the five bar truss with higher natural frequency

	Weight (kg)	A_1 (mm ²)	A_2 (mm ²)	A_3 (mm ²)	A_4 (mm ²)	A_5 (mm ²)
Initial	2.796	400.0	400.0	400.0	400.0	400.0
Dynamic factor	1.968	831.2	40.0	473.1	40.0	40.0
E. S. L.	1.295	589.4	40.0	220.3	40.0	40.0

Table 2 The optimum values of the five bar truss with lower natural frequency

	Weight (kg)	A_1 (mm ²)	A_2 (mm ²)	A_3 (mm ²)	A_4 (mm ²)	A_5 (mm ²)
Initial	2.796	400.0	400.0	400.0	400.0	400.0
Dynamic factor	1.968	831.2	40.0	473.1	40.0	40.0
E. S. L.	2.670	354.3	351.6	376.3	231.1	348.4

도 유사하게 나타난다. 결과는 Table. 1에 나타나 있다.

두번째는 구조물의 고유진동수가 하중의 진동수에 비하여 매우 작은 경우로 첫번째 고유진동수가 12.67 rad/s이다. 이 경우 동적계수를 사용한 최적화는 첫번째 경우와 같이 1번 부재가 가장 두껍게 설계된다. 반면 등가정하중을 사용한 최적화는 오히려 3번 부재가 가장 두껍게 설계된다. 그리고 전체적인 설계경향도 많은 차이를 보인다.

3.3 연결봉

이 예제는 2003년 이중남이 등가정하중을 이용하여 형상최적화(shape optimization)한 연결봉(connecting rod)이다.⁽³⁾ Fig. 8은 연결봉의 구속조건과 하중조건, 그리고 가해지는 하중의 개형을 나타내고 있다. 하중의 진동수는 62.8 rad/s이다.

첫번째 경우는 구조물의 고유진동수가 하중의 진동수보다 매우 큰 경우로 그 첫번째 고유진동수가 94.75 rad/s이다. 이 경우 최대응력은 하중의 작용 절점 주변에서 발생하는 것을 알 수 있다. 이것은 정적해석과 같은 결과이다. 두번째 경우는 구조물의 진동수가 하중의 진동수보다 매우 작은 경우로 첫번째 고유진동수가 3.0 rad/s이다. 이 경우는 이전 결과와 달리 고정된 구멍 주변에서 최대 응력이 발생한다.

구조물의 고유진동수의 영향을 설계의 관점에서 주시하기 위하여, 고유진동수가 매우 큰 경우와 작은 경우에 대하여 등가정하중을 이용한 형상최적화를 수행하였다. Fig. 9는 형상최적화를 위한 설계변수를 나타낸다.

문제의 정식화는 다음과 같다.

Find design variables (3.2a)

To minimize weight (3.2b)

Subject to $|\sigma_{\max}| < 250 \text{ MPa}$ (3.2c)

형상최적화 결과는 Fig. 10에 나타나 있다. 고유진동수가 높은 경우는 정적해석을 했을 때와 거의 같이 힘을 가한 쪽이 가장 넓게 설계되었다. 반면

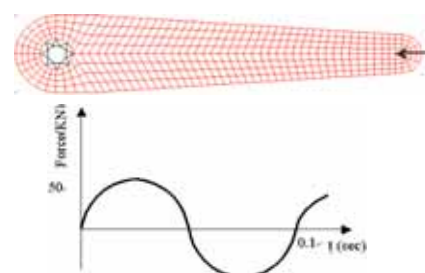


Fig. 8 A connecting rod and the applied dynamic load



Fig. 9 Design variables for the shape optimization of the connecting rod

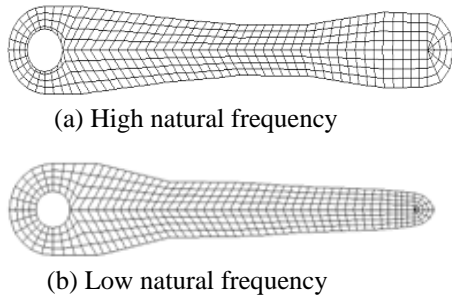


Fig. 10 Optimum results of the connecting rod using the equivalent static loads with the corresponding natural frequency

고유진동수가 매우 낮은 경우에는 구멍 주위가 더 넓게 설계됨을 알 수 있다.

4. 결 론

동적시스템의 해석 및 최적설계를 하기 위하여 동적계수를 이용하여 동하중을 정하중으로 변환하는 방법이 사용되고 있다. 동적계수를 적절히 선택하여 성공적인 설계를 수행하는 경우도 존재한다. 하지만 동적효과를 반영하지 않은 시스템은 실제 거동과 전혀 다른 결과를 보일 수 있음을 예제를 통하여 확인하였다. 또한 동적시스템에서 구조물의 고유진동수와 하중의 진동수의 상관관계에 따라 구조물의 해석 및 최적설계는 정적시스템과 전혀 다른 거동을 보일 수 있음을 알 수 있었다.

이런 결과는 동적시스템의 지배방정식의 해에서 일반해와 특수해의 관계로 설명된다. 시스템의 고유한 특징인 일반해를 무시할 수 없는 경우에는 동적해석과 정적해석은 상이한 결과가 나올 수 있다. 일반해는 하중의 진동수가 구조물의 고유진동수보다 상대적으로 클수록 전체 시스템의 거동에 더 큰 영향을 미치는 것을 확인하였다.

기준에 제안되었던, 동적효과를 충분히 반영하고 있는 등가정하중을 이용한 최적화에 대하여 논하였다. 그리고 동적계수를 사용한 방법과 비교하였다. 고유진동수가 작은 구조물은 두 방법이 전혀 다른 설계경향을 보였다. 그러므로 반드시 동적효과를 고려한 해석 및 설계가 필요하다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Haftka, R.T., Gurdal, Z., 1991, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- (2) Choi, W.S, Kang, S.C, Shin, M.J, Park, G.J, 1996, "Transformation of a Dynamic Load into an Equivalent Static Load and Shape Optimization of the Road Arm in Self-Propelled Howitzer," *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 20, No. 12, pp. 3767-3781.
- (3) Park, K.J, Lee, J.N, Park, G.J, 2003, "Structural Shape Optimization under Static Loads Transformed from Dynamic Loads," *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 27, No. 8, pp. 1363-1370.
- (4) James, M.L., Smith, G.M., Wolford, J.C., Whaley, P.W., 1994, *Vibration of Mechanical and Structural Systems*, HarperCollins College Publishers, New York, U.S.A.
- (5) Robert, F. Steidel, Jr., 1989, *An Introduction to Mechanical Vibrations*, John Willy and Sons INC, New York, U.S.A.
- (6) Erwin, K., 1999, *Advanced Engineering Mathematics*, John Willy and Sons INC, New York, U.S.A.
- (7) Choi, W.S, Park, G.J, 2000, "Quasi-Static Structural Optimization Technique Using Equivalent Static Loads Calculated at Every Time Step as a Multiple Loading Condition," *Transactions of the KSME(A)*, Vol. 24, No. 10, pp. 2568-2580.
- (8) Kang, B.S., Choi, W.S. and Park, G.J., 2001, "Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *Computer and Structures*, Vol. 79, No. 2, pp.145-154.
- (9) Choi, W.S. and Park, G.J., 2002, "Structural Optimization Using Equivalent Static Loads at All the Time Interval," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2105-2122.
- (10) Kang, B.S. and Park, G.J., 2003, "Optimization of flexible multibody dynamic systems using equivalent static load method," *The Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, May 19 - 23, Lido di Jesolo, Italy, pp. 319-320.
- (11) Truman, K.Z. and Petruska, D.J., 1991, *Optimum Design of Dynamically Excited Structural Systems Using Time History Analysis*, OPTI91, Boston, MA, June 25-27.
- (12) Hsieh, C.C. and Arora, J. S., 1985, "Design sensitivity analysis and optimization of dynamic response," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 195-219.