부분 시스템 해석을 위한 상대 직교 좌표를 이용한 다물체 동역학 공식

김성수† ·송금정**·허재영*

Multibody Dynamics Formulation based on Relative Cartesian Coordinates for Subsystem Dynamic Analysis

Sung-Soo Kim, Kum-jung Song, Jae Young Huh

Key Words : Subsystem (부분 시스템), Relative Cartesian Coordinates(상대 직교 좌표), Independent Coordinates(독립 좌표)

Abstract

Multibody dynamics formulation has been developed based on relative cartesian coordinates for subsystem analysis. Relative cartesian coordinates are defined with respect to a reference body of a subsystem. Relative cartesian formulation inherits the same merits of absolute cartesian formulation, such as generality and easy implementation. Two methods have been applied. One is Largrange Multiplier Elimination method and the other is independent coordinate method. A 1/4 car simulation has been carried out to verify the formulations. Since both methods provide identical results, it proves the validity of the formulation.

.

1. 서 론

다물체 시스템은 여러 가지의 부분 시스템으로 구성되어 있다. 예를 들어 차량 시스템은 현가 부분 시스템, 조향 부분시스템 등으로 이루어 져 있다. 또 다른 예로는 굴삭기 시스템은 트랙시스템과 캐빈 시스템, 굴삭기 매니퓰레이터 부분 시스템으로 구성되어 있다. 이러한 부분시스템의 해석에 있어서, 상대좌표계를 사용하는 것은 해석을 부분 시스템의 기준 물체에 대한 상대적인 운동을 기술하므로, 독립적인 부분 시스템의 해석이 가능하다[1, 2].

다물체 공식에는 크게 두 가지의 다른 좌표계가 사용되는데, 하나는 직교(Cartesian) 좌표계이고 다른 하나는 상대 조인트(relative joint) 좌표계이다. 직교 좌표 공식에서는 각 물체의 운동을 기술하기 위해서 직교 좌표를 각 물체에 대해 설정하므로 큰 규모의 미분 대수 방정식이 생성된다. 이 공식은 큰 규모의 운동방정식을 풀어야 하는 단점을 가진 반면, 공식의 유도가 단순하고 체계적인 장점을 가지고 있다. 반면에 상대 조인트 좌표 공식에서는 작은 규모의 운동방정식이 생성되므로 효율적이지만 절단 조인트 선정 등의 시스템의 위상해석과 계산의 순서들이 결정되어야 하는 전처리 과정이 필요하고 또한 일반화가 용이하지 않다. 또한 조인트로 연결되지 않고, 부시와 같은 힘요소로 연결된 경우는 상대 조인트좌표 공식을 사용할 수 없거나, 사용하게 되더라도, 운동방정식을 생성하는 효율성 면에서는 차이가 없게 된다.

본 논문에서는 부분시스템의 해석을 위해서 공식이 간단하며, 계산 순서 등의 시스템 위상 해석이 필요 없는 상대 직교 좌표계를 이용한 공식을 제안한다. 또한 보다 효율적인 운동방정식의 도출을 위해서, 상대직교 좌표계와 부분 시스템의 자유도 개수만큼 추가적인 독립좌표를 동시에 사용하는 부분시스템 운동방정식을 유도하고, 영공간으로의 좌표변환을 통한 독립 좌표에 의한 운동방

† 책임저자, 정회원, 충남대학교 메카트로닉스공학과
**삼성전자
* 충남대학교 대학원 메카트로닉스공학과
E-mail : sookim@cnu.ac.kr
TEL : (042)821-6782 FAX : (042)823-4919

정식을 생성하는 방법을 제안한다.

2. 상대 직교 좌표의 기구학

부분 시스템의 운동방정식을 개별적으로 유도하기 위해서, 부분 시스템의 각 물체의 운동은 Fig. 1 에 있는 가상적인 기준 물체에 대해 상대적으로 표현되어져야 한다. Fig. 1 은 가상 기준 물체에 대한 부분 시스템 내의 각 물체의 운동을 기술하기 위한 상대 직교 좌표계를 정의하고있다.

X-Y-Z 좌표는 직교 기준 좌표를 나타내고, x'-y'-z' 좌표는 물체 고정 기준 좌표를, 그리고 x^*_0-y^*_0-z^*_0 좌표는 관성 기준 좌표에 대한 가상 기준 물체 0 의 물체 고정 기준 좌표를 나타낸다. 관성 기준 좌표에 대한 물체 i 기준 좌표의 자세 행렬 $\mathbf{A}_i$ 는 다음의 좌표 변환에 의해 나타내어진다.

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_o\mathbf{A}_{io} \tag{1}$$

여기서, $\mathbf{A}_o$ 는 가상 기준 물체 0 의 자세행렬, $\mathbf{A}_{i0}$ 는 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대적인 자세를 나타낸다. 또한, 물체 i 의 위치 벡터 $\mathbf{r}_i$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{r}^*_{i0} \tag{2}$$

여기서, $\mathbf{r}_0$ 는 가상 기준 물체 0 의 위치 벡터이고, $\mathbf{r}^*_{i0}$ 는 x^*_0-y^*_0-z^*_0 좌표에서 표현된 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대적 위치 벡터이다.

물체 i 의 각속도는 가상 기준 물체 0 의 각속도와 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대 각속도에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\omega}'_i = \mathbf{A}^T_{i0}\boldsymbol{\omega}^*_0 + \boldsymbol{\omega}'_{i0} \tag{3}$$

여기서, $\boldsymbol{\omega}'_i$ 은 물체 i 의 기준 좌표에서 표현된 물체 i 의 각속도, $\boldsymbol{\omega}^*_0$ 은 물체 0 의 기준 좌표에서 표현된 물체 0 의 각속도, 그리고 $\boldsymbol{\omega}'_{i0}$ 은 물체 i 기준 좌표에서 표현된 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대각속도이다. 물체 i 의 속도 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 는 식(2)를 시간에 대해 미분함으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{A}_0\tilde{\boldsymbol{\omega}}^*_0\mathbf{r}^*_{i0} + \mathbf{A}_0\dot{\mathbf{r}}^*_{i0} \tag{4}$$

여기서, $\dot{\mathbf{r}}_0$ 은 가상 기준 물체 0 의 속도 벡터, $\dot{\mathbf{r}}^*_{i0}$ 은 물체 0 에 대한 물체 i 의 상대 직교 속도 벡터이다. 식 (3) 과 (4)를 복합 속도 벡터 $\mathbf{y}_i = [\dot{\mathbf{r}}^T_i, \boldsymbol{\omega}^T_i]^T$, $\mathbf{y}_{i0} = [\dot{\mathbf{r}}^{*T}_{i0}, \boldsymbol{\omega}'^T_{i0}]^T$, $\mathbf{y}_0 = [\dot{\mathbf{r}}^T_0, \boldsymbol{\omega}^{*T}_0]^T$ 로 나타내면 다음의 복합 속도 관계식이 얻어진다.

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{E}_{i0}\mathbf{y}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{y}_{i0} \tag{5}$$

여기서, $\mathbf{E}_{i0} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}_0\tilde{\mathbf{r}}^*_{i0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T_{i0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_0 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ 이다.

물체 i 와 가상 물체 0 사이의 가속도 관계는 식 (5)를 시간에 대해 미분함으로써 얻어진다.

$$\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{E}_{i0}\dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{G}_0\dot{\mathbf{y}}_{i0} + \mathbf{h}_{i0} \tag{6}$$

여기서, $\mathbf{h}_{i0}$ 는 속도 연성항(velocity coupling term)이다.

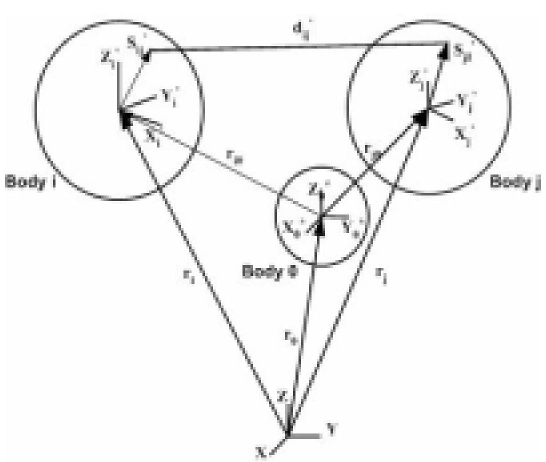

Fig. 1 Relative Cartesian coordinate kinematics

3. 구속조건식

부분 시스템의 물체들은 조인트로 연결되어 있으므로 부분시스템의 가상적인 기준물체에 관한 상대적인 운동을 나타내는 상대 직교좌표 들은 조인트의 운동조건에 따른 구속 조건식을 만족해야 한다.

3 차원 다물체 시스템의 조인트에 의한 구속 조건은 몇 개의 기본적인 구속 조건식 들의 조합으로 나타낼 수 있다[3]. 첫번째의 기본적인 구속 조건식은 물체 i 와 물체 j 가 서로 한 점

에서 만나는 조건인 구면조인트(Spherical Joint) 구속조건식이다. 즉 Fig. 1 의 물체 i 의 한 점 P_i 와 물체 j 의 한 점 P_j 가 항상 공간상에서 동일한 위치를 갖는 조건으로 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{\Phi}^{sph} = \mathbf{r}_{j0}^* + \mathbf{A}_{j0}\mathbf{s}'_{ji} - \mathbf{r}_{i0}^* - \mathbf{A}_{i0}\mathbf{s}'_{ij} = \mathbf{0} \qquad (7)$$

두 번째의 기본적인 구속 조건식은 Fig. 2 에서 나타난 바와 같이 물체 i 상에 고정된 벡터 $\mathbf{f}_i$ 가 물체 j 상에 고정된 벡터 $\mathbf{g}_i$ 와 항상 직각을 이루는 조건인 다음과 같은 스칼라 곱(dot product)이 0 인 조건식이다.

$$\mathbf{\Phi}^{dot1} = \mathbf{f}'^{}_{ij}\mathbf{A}_{i0}^T\mathbf{A}_{j0}\mathbf{g}'_{ji} = \mathbf{0} \qquad (8)$$

세 번째의 기본적인 구속 조건식은 Fig. 1 에서의 물체 i 의 한 점 P_i 와 물체 j 의 한 점 P_j 가 사이의 거리가 항상 일정한 조건으로 다음의 식으로 표현된다.

$$\mathbf{\Phi}^{dist} = \mathbf{d}'^T_{ij}\mathbf{A}_{i0}^T\mathbf{A}_{i0}\mathbf{d}'_{ij} - l^2 = \mathbf{0} \qquad (9)$$

앞서 기술한 3 가지의 기본적인 구속 조건식을 조합하여 이용하면, 3 차원 기구 시스템에서 많이 사용되는 회전조인트(Revolute Joint), 훅조인트(Universal Joint), 실린더조인트(Cylindrical Joint), 병진조인트(Translational joint) 등의 구속조건식을 생성할 수 있다[3].

여기서 모든 구속조건식은 상대 직교좌표로 표현됨을 알 수 있고 표현의 형태는 절대 직교좌표와 형식이 유사함을 알 수 있다.

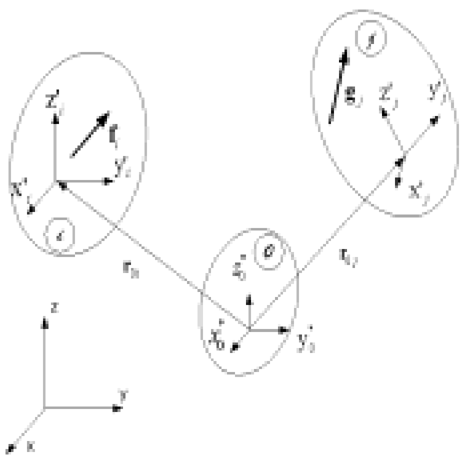

Fig. 2 Dot 1 Constraint Conditions

4. 힘 요소

부분 시스템의 물체들이 스프링-댐퍼-액튜에이터의 힘 요소로 연결되었을 때는 이 힘 요소에 의하여 각 물체에 작용하는 일반화된 힘(generalized force)을 구해야 한다. 이러한 일반화된 힘은 운동방정식에 일반화된 힘 벡터로 포함될 수 있다.

Fig.3 은 TSDA(Translational Spring Damper Actuator)로 연결된 두 물체를 나타내고 있다. TSDA 에 의한 가상일은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta W = -f\,\delta l \qquad (10)$$

여기서 f 는 TSDA 에 의한 힘의 크기를 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$f = k(l - l_0) + c\dot{l} + F(l, \dot{l}) \qquad (11)$$

식(10), (11)의 l 은 TSDA 로 연결된 두 점 사이의 거리를 나타내며, 이 거리에 관한 변분은 상대 직교좌표의 가상 변위로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta l = \left(\frac{\mathbf{d}_{ij}^*}{l}\right)^T (\delta\mathbf{r}_{j0}^* + \mathbf{A}_{j0}\delta\tilde{\boldsymbol{\pi}}'_{j0}\mathbf{s}'^P_{ji} - \delta\mathbf{r}_{i0}^* - \mathbf{A}_{i0}\delta\tilde{\boldsymbol{\pi}}'_{i0}\mathbf{s}'^P_{ij}) \qquad (12)$$

식(12)를 식(10)에 대입하여 정리하면 가상일은 상대 직교좌표의 가상변위벡터와 일반화된 힘벡터의 스칼라 곱으로 표현되어, 일반화된 힘을 구할 수 있다.

$$\delta W = \delta\mathbf{z}_{j0}^T\mathbf{Q}_j + \delta\mathbf{z}_{i0}^T\mathbf{Q}_i \qquad (13)$$

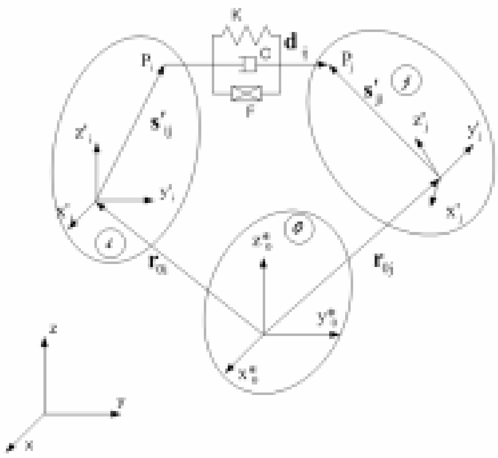

Fig. 3 TSDA element

이때, $\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} -\frac{f}{l}\mathbf{d}_{ij}^* \\ -\frac{f}{l}\tilde{\mathbf{s}}_{ji}'^P \mathbf{A}_{j0}^T \mathbf{d}_{ij}^* \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \frac{f}{l}\mathbf{d}_{ij}^* \\ \frac{f}{l}\tilde{\mathbf{s}}_{ij}'^P \mathbf{A}_{i0}^T \mathbf{d}_{ij}^* \end{bmatrix}$$

여기서 일반화된 힘은 절대 직교좌표를 사용하였을 때의 일반화 된 힘과 그 표현이 유사함을 할 수 있다.

5. 부분 시스템 운동방정식

5.1 라그랑지 승수 제거법에 의한 운동방정식

부분 시스템 운동방정식은 부분 시스템을 구성하는 물체들의 가상 일의 합으로 나타낼 수 있다.[3].

$$\delta\mathbf{z}^T\left\{\bar{\mathbf{M}}\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}\ - \bar{\mathbf{g}}\ \right\} = 0 \qquad (14)$$

여기서, $\delta\bar{\mathbf{z}}$ 는 부분 시스템 내의 모든 물체의 병진과 회전 벡터의 합성된 가상 변위 벡터이고, $\bar{\mathbf{M}}$ 는 시불변 블록 대각 관성 행렬, $\bar{\mathbf{g}}$ 는 부분 시스템의 일반화된 힘 벡터이다.

부분 시스템 내의 물체들의 가상 변위와 가상 기준 물체 0 사이의 가상 변위 벡터, 가상 기준 물체 0 에 대한 물체들의 상대적인 가상 변위 벡터의 관계식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\delta\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{E}}_{i0}\delta\mathbf{z}_0 + \bar{\mathbf{G}}_0\delta\bar{\mathbf{z}}_{io} \qquad (15)$$

또한, 부분 시스템 내의 물체들의 가속도와 가상 기준 물체와 구성 물체와의 상대적인 가속도 관계는 다음과 같은 합성 가속도 벡터로 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{E}}_{i0}\dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{G}_0\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} + \bar{\mathbf{h}}_{i0} \qquad (16)$$

식(14)를 상대 직교 좌표 공간에서 표현되는 운동방정식으로 변환하기 위해서, 식(15)와 식(16)을 식(14)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\delta\mathbf{z}_0^T\left\{\bar{\mathbf{M}}_{EE}\dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{EG}\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_E\right\}$$
$$+\delta\bar{\mathbf{z}}_{i0}^T\left\{\bar{\mathbf{M}}_{EG}^T\dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{GG}\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_G\right\} = 0 \quad (17)$$

부분 시스템의 물체들은 조인트로 연결되어 있으므로 다음과 같은 구속 조건식을 만족해야 한다.

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{r}_{10}^*\mathbf{A}_{10},\cdots,\mathbf{r}_{nb0}^*\mathbf{A}_{nb0}) = \mathbf{0} \qquad (18)$$

라그랑지 승수법칙에 의해서 식(17)은 다음과 같이 라그랑지 승수 $\boldsymbol{\lambda}$ 와 함께 나타낼 수 있다.

$$\delta\mathbf{z}_0^T\left\{\bar{\mathbf{M}}_{EE}\dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{EG}\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_E\right\} \qquad (19)$$
$$+\delta\bar{\mathbf{z}}_{i0}^T\left\{\bar{\mathbf{M}}_{EG}^T\dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{GG}\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} + \bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{io}}^T\boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{g}}_G\right\} = 0$$

가상기준물체가 구속이 되어있지 않으면 위의 식의 가상변위는 임의의 변분이으로 관련 계수항이 0 이되어 다음과 같은 시스템 운동 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{EE} & \bar{\mathbf{M}}_{EG} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}_{EG}^T & \bar{\mathbf{M}}_{GG} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{z}}_{io}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{z}}_{io}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0 \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_{io} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_E \\ \bar{\mathbf{g}}_G \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

기준 물체를 제외한 부분 시스템 운동 방정식은 식(20)의 두 번째와 세 번째 식에 의해, 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{GG} & \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{z}}_{io}}^T \\ \mathbf{\Phi}_{\bar{\mathbf{z}}_{io}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{y}}}_{io} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_G \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{EG}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0 \qquad (21)$$

위 식으로부터 라그랑지 승수 제거법에 의한 부분시스템 합성방법[1]에 의해서 다음과 같은 부분시스템의 가상기준 물체의 운동방정식을 독립적으로 구할 수 있다.

$$\breve{\mathbf{M}}^c\dot{\mathbf{y}}_0 = \breve{\mathbf{g}}^c \qquad (22)$$

여기서

$$\breve{\mathbf{M}}^c = \bar{\mathbf{M}}_{EE} - \bar{\mathbf{M}}_{EG}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{EG}^T$$
$$+\bar{\mathbf{M}}_{EG}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^T(\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^T)^{-1}\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_{EG}^T \qquad (23)$$

$$\breve{\mathbf{g}}^c = \bar{\mathbf{g}}_E - \bar{\mathbf{M}}_{EG}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{g}}_G$$
$$+\bar{\mathbf{M}}_{EG}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^T(\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^T)^{-1}\{\bar{\mathbf{\Phi}}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}\bar{\mathbf{M}}_{GG}^{-1}\bar{\mathbf{g}}_G - \bar{\boldsymbol{\gamma}}\} \qquad (24)$$

5.2 독립좌표에 의한 운동방정식

보다 효율적인 부분시스템의 운동방정식 도출을 위해서 식(17)의 운동 방정식을 독립 좌표에 의한 운동 방정식으로 나타낼 수 있다. 우선, 부분 시스템 내의 자유도 개수 만큼의

직교 좌표와는 다른 새로운 독립 좌표 벡터 $\boldsymbol{\theta}$ 를 선택한다. 이 독립 좌표와 부분 시스템의 직교 좌표 사이의 관계는 아래의 식(25)의 자유도 개수 만큼의 구속 조건식 $\boldsymbol{\Gamma}$ 로 나타낼 수 있으며, 따라서, 부분 시스템 내의 구속 조건식은 식(25)와 같게 된다.

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{r}_{10}\mathbf{A}_{10},\cdots,\mathbf{r}_{nb0}\mathbf{A}_{nb0}) \\ \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}_{10}\mathbf{A}_{10},\cdots,\mathbf{r}_{nb0}\mathbf{A}_{nb0},\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (25)$$

상대 직교 좌표에서의 가상 변위 벡터는 다음과 같이 독립 좌표계의 변분의 형태로 나타내어질 수 있다.

$$\delta\bar{\mathbf{z}}_{i0} = -\boldsymbol{\Psi}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}\delta\boldsymbol{\theta} \equiv \mathbf{N}\delta\boldsymbol{\theta} \qquad (26)$$

마찬가지로, 상대 직교 좌표에서의 가속도는 다음과 같이 식(25)를 두 번 미분하고 정리하여 독립 좌표의 가속도 형태로 나타내어진다.

$$\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} = -\boldsymbol{\Psi}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Psi}_{\bar{\mathbf{z}}_{i0}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\gamma}} \equiv \mathbf{N}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{p} \qquad (27)$$

식(26)와 (27)를 식(17)에 대입하면

$$\delta\mathbf{z}_0^T\left\{\bar{\mathbf{M}}_{EE}\dot{\mathbf{y}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_{EG}\dot{\bar{\mathbf{y}}}_{i0} - \bar{\mathbf{g}}_E\right\}$$

$$+\delta\boldsymbol{\theta}^T\left\{\mathbf{M}_{E\theta}^T\dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{M}_{\theta\theta}\ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}_\theta\right\} = 0 \qquad (28)$$

여기서, $\mathbf{M}_{E\theta} = \bar{\mathbf{M}}_{EG}\mathbf{N}$, $\mathbf{M}_{\theta\theta} = \mathbf{N}^T\bar{\mathbf{M}}_{GG}\mathbf{N}$, $\hat{\mathbf{g}}_E = \bar{\mathbf{g}}_E - \bar{\mathbf{M}}_{EG}\mathbf{p}$, $\mathbf{g}_\theta = \mathbf{N}^T(\bar{\mathbf{g}}_G - \bar{\mathbf{M}}_{GG}\mathbf{p})$ 이다. 독립 좌표의 변분들은 임의로 선택할 수 있으므로 관련 계수항이 0 이 되어, 부분 시스템 운동 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}(\mathbf{g}_\theta - \mathbf{M}_{E\theta}^T\dot{\mathbf{y}}_0) \qquad (29)$$

식(22)를 형성하기 위한 효과 관성 행렬과 힘 벡터들은 식(29)를 식(28)에 대입하여 다음과 같이 얻게 된다.

$$\breve{\mathbf{M}}^c = \bar{\mathbf{M}}_{EE} - \mathbf{M}_{E\theta}\mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}\mathbf{M}_{E\theta}^T \qquad (30)$$

$$\breve{\mathbf{g}}^c = \hat{\mathbf{g}}_E - \mathbf{M}_{E\theta}\mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}\mathbf{g}_\theta \qquad (31)$$

일단, 독립 좌표의 가속도가 얻어지면, 부분 시스템에서의 상대 직교 좌표는 식(27)을 사용함으로써 계산할 수 있다.

6. SLA 현가 장치 부분 시스템의 1/4 차량 모델

앞에서 기술한 부분 시스템을 위한 상대직교좌표 공식을 검증하기 위해서, 라그랑지 승수법에 의한 부분시스템 합성법과 독립 좌표에 의한 부분 시스템 합성 방법을 Fig. 4 의 SLA(Short and Long Arm) 현가 장치로 구성된 1/4 차량 모델에 적용하였다.

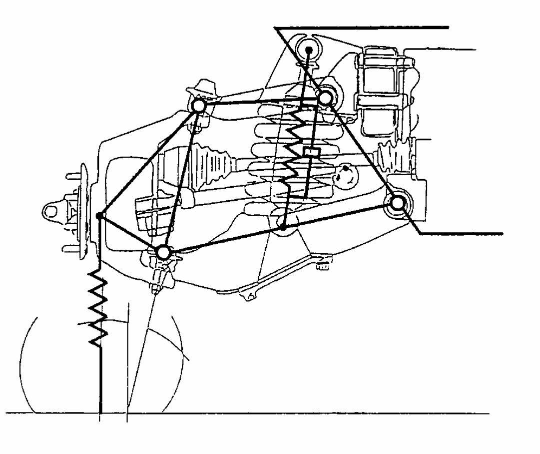

Fig. 4 SLA suspension subsystem

SLA 현가장치 부분 시스템은 LCA(Lower Control Arm), UCA(Upper Control Arm), 너클(knuckle), 그리고 타이 로드(tie rod)로 구성된다. LCA 와 UCA 는 회전 조인트를 통해 차체에 연결되어 있다. 회전 조인트는 LCA 와 Knuckle, 그리고 UCA 와 knuckle 사이를 연결하고, 타이 로드는 너클(knuckle)과 차체를 연결한다. 타이로드의 질량과 관성 모멘트가 다른 요소들에 비해 상대적으로 작으므로 무질량 링크로 모델링 하였다.

반사인 범프를 통과하는 시뮬레이션을 수행하였고 Fig. 5 와 같이 동일한 결과를 얻을 수 있었다. 이 프로그램은 Matlab 을 이용하여 구현되었고, Intel 2.4GHz CPU 의 PC 에서 실행되었다. 두 방법의 CPU 시간을 잰 결과는 Table 1.에 나타나 있다.

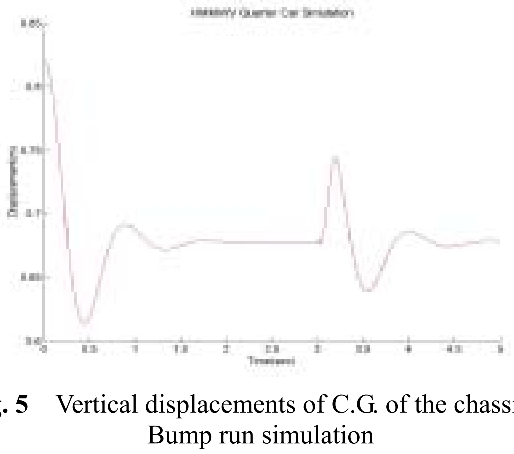

Fig. 5 Vertical displacements of C.G. of the chassis in Bump run simulation

Table 1. Result of simulation with respect to CPU time spent during HMMWV 1/4 car simulation (*5sec simulation, time step 0.01)

Relative Cartesian coordinate	**Average CPU time spent (sec/frame)**	**Ratio of average CPU time to that of most efficient formulation**
LME	0.0086	1
Independent Generalized coordinate	0.0096	1.112

7. 결론

일반적이고 프로그램의 관점에서 구현이 용이한 직교좌표공식을 이용하여 부분시스템의 해석방법을 제안하였다. 상대 직교좌표를 이용한 기구학을 정의하였고, 그에 따른 가상일에 의한 운동방정식을 유도하였다. 상대 직교좌표 공식의 검증을 위해서 SLA 형태의 현가장치를 장착한 1/4 차량 모델을 통한 범프 통과 시뮬레이션을 수행하였다. 라그랑지 승수제거법에 의한 부분시스템 합성방법과 독립좌표계를 이용한 부분 시스템 합성법을 적용하였고, 두가지 방법 모두 동일한 결과를 얻으므로, 상대 직교 좌표계에 의한 공식을 검증하였다. 두 방법의 효율성 검증을 위해, 실행소요 CPU 시간을 비교하였다. 두 방법 모두 실시간 시뮬레이션이 가능한것으로 나타났으며, 라그랑지 승수법이 이론과는 달리 약간 효율적임을 알 수 있었다.

하지만 Matlab 은 명령어를 해석하는 방식의 프로그램이므로, 프로그램의 실행문이 많으면 많을수록 실행시간이 더 걸리므로, 보다 정확한 CPU 시간의 측정을 위해서는 C 언어나 Fortran 언어로 프로그램을 개발해야 할 것이다.

참고문헌

(1) Sung-Soo Kim, 2002, “A subsystem synthesis method for efficient vehicle multibody dynamics”, *Multibody System Dynamics*, 7(2), pp.189-207.

(2) Young-Seok Oh, Sung-Soo Kim, 2001,"A real-time multibody vehicle dynamics model using a subsystem synthesis method", *Proceedings of 2001 ASME. Design Engineering Technical Conference*, September 9-12.

(3) E.J. Haug, 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon, The University of Iowa. pp.347-373