구조물의 동특성 변화로부터 변경된 질량 및 강성 해석

이 정 윤†, 오 재 응*

Analysis of detection of mass position and modified stiffness using the change of the structural dynamic characteristics

Jung Youn Lee, Jae-Eung Oh

Key Words: Mass Matrix(질량행렬), Stiffness Matrix(강성행렬), Sensitivity Coefficient(감도 계수), F.E.M(유한요소법) Dynamic Characteristics(동특성), Inverse Problem(역처리 문제)

Abstract

This study proposed the analysis of mass position detection and modified stiffness due to the change of the mass and stiffness of structure by using the original and modified dynamic characteristics. The method is applied to examples of a cantilever and 3 degree of freedom by modifying the mass. The predicted detection of mass positions and magnitudes are in good agreement with these from the structural reanalysis using the modified mass.

1. 서 론

최근 컴퓨터 분야의 지속적인 발전으로 복잡한 대형 구조물의 유한요소해석이 가능하게 되었다. 이러한 유한요소 모델을 이용하면 실험이 어려운 다양한 해석을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 근사적으로 계산할 수 있다.

구조해석을 통하여 얻어진 정적 및 동적 특성이 요구되는 범위를 벗어나게 된 경우 재설계가 이루어진다. 설계를 변경할 경우, 구조의 어느 부분을 얼마나 변경해야 하는가는 매우 어려운 문제이며 많은 시간과 계산이 소요된다. 이 분야는 실험으로 측정된 고유치와 모드 형상으로 유한요소 모델의 정확도를 높이기 위해 질량과 강성 행렬을 보정하는 유한요소모델보정 분야[(1),(2)]와 구조 변수 규명[(3),(4)], 주어진 동특성으로부터 강성변화를 구하고 이로부터 구조물의 손상을 예측하는 분야[(5),(6)] 질량변화를 구하여 구조물의 부가 질량을 찾아내는 연구[(7),(8)]로 구분된다. 최근에 위에 관한 연구들이 기계, 항공우주, 해양, 토목공학 등의 분야에서 활발히 진행되고 있다.

그러나 그 동안 다양한 연구 노력에도 불구하고 감도계수로부터 구조물의 강성과 질량부가 위치와 크기를 정확히 예측하는데 어려움이 있었다. 구조물에 질량과 강성이 변경되면 질량 행렬과 강성행렬이 변하게 된다. 지금까지 대부분의 연구가 이 변경된 질량과 강성 행렬을 구할 때 구조 변경 후 모드의 변화가 없다고 가정하였기 때문에 구조 변경량이 많으면 오차가 증가하여 구조물에 적용하는데 한계가 있었다.

구조물의 부가된 질량의 위치와 크기를 예측하는 문제는 구조물의 설계파라미터 변경에 의한 동특성 변화의 역처리 문제(inverse problem)이다.

본 연구에서는 이를 바탕으로 구조물의 질량 변경 전의 고유진동수, 진동모드, 강성행렬, 질량행렬과 구조 변경 후 고유진동수, 진동모드를 이용하여 감도계수를 해석한 다음, 이 감도계수로

† 책임저자의 소속:
경기대학교 기계시스템디자인공학부 부교수
E-mail : jylee@kyonggi.ac.kr
TEL : (031)249-9811 FAX : (031)249-9796
* 한양대학교 기계공학부 교수

부터 모드변화에 의한 질량변화를 반복법을 이용하여 해석하고 이로부터 구조물의 부가된 질량 위치 및 크기를 예측하는 방안을 제시하였으며 외팔보와 3자유도계에 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 유효성을 검증한다.

2. 이 론

구조물에 질량이 변경되면 동특성이 변하게 된다. 이때 구조 변경 전 후의 동특성은 다음과 같이 된다.

$$(K_o - \lambda_o M_o)\phi_o = 0 \tag{1}$$

$$(K - \lambda M)\phi = [(K_o + \Delta K) - (\lambda_o + \Delta\lambda)(M_o + \Delta M)](\phi_o + \Delta\phi) = 0 \tag{2}$$

여기서 K_o와 $M_o, K, M, \Delta M, \Delta K$은 각각 구조 변경 전의 강성행렬과 질량행렬, 변경 구조물의 강성 행렬 및 질량행렬, 질량행렬 및 강성행렬의 변화량이며 λ와 ϕ, $\lambda_o, \phi_o, \Delta\lambda, \Delta\phi$는 각각 구조 변경 후의 고유치와 고유벡터, 구조 변경 전의 고유치, 고유벡터, 고유치 및 고유벡터 변화량이다.

2.1 동특성 변화로부터 감도계수의 해석

Fox[9]는 고유 벡터의 변화량을 변경 전 고유벡터의 선형결합으로 표시될 수 있다고 다음과 같이 가정하였다.

$$\{\Delta\phi\}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \{\phi_o\}_k \tag{3}$$

여기서 $\{\Delta\phi\}_i$는 i차 모드의 고유벡터 변화량이고 α_{ki}는 k차 모드에 대한 i차 모드의 감도계수이며 $\{\phi_o\}_k$는 구조 변경 전 k차 모드이다. (3)식을 확장하면 다음 식으로 된다.

$$[\Delta\phi] = [\alpha][\phi_o] \tag{4}$$

$$[\alpha] = [\Delta\phi][\phi_o]^{-1} \tag{5}$$

여기서 $[\Delta\phi]$와 $[\alpha]$, $[\phi_o]$는 고유벡터 변화량행렬과 감도계수행렬, 구조 변경 전 고유벡터 행렬이다. 즉 감도계수행렬은 구조 변경 전 고유벡터행렬과 변경후의 고유벡터 변화량행렬로부터 구할 수 있으며 이것은 감도해석의 역변환 문제이다.

2.2 기존의 감도해석 방법

Fox[9]는 감도계수를 다음과 같이 구하였다.

$$\alpha_{ii} = -\frac{\Delta M_{ii}}{2} \tag{6}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{-\Delta M_{ij}\,\omega_{oj}^2 + \Delta K_{ij}}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \tag{7}$$

$$\Delta M_{ij} = \{\phi_o\}_i^T [\Delta M] \{\phi_o\}_j, \tag{8}$$

$$\Delta K_{ij} = \{\phi_o\}_i^T [\Delta K] \{\phi_o\}_j \tag{9}$$

여기서 ΔM_{ij}와 ΔK_{ij} 는 각각 모드변화에 의한 질량 및 강성 변화량 이며 ω_{oi}^2와 ω_{oj}^2 는 λ_{oi}와 λ_{oj} 이다.

(8)식과 (9)식을 행렬로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\phi_o]^T[\Delta M][\phi_o] = [\Delta M_{ij}] \tag{10}$$

$$[\phi_o]^T[\Delta K][\phi_o] = [\Delta K_{ij}] \tag{11}$$

그러나 위 방법은 구조물에 질량이나 강성 변경 후에도 고유 벡터의 변화가 없다고 가정하였기 때문에 변경량이 많으면 감도 계수의 오차가 증가하여 실제 구조물의 적용에는 한계가 있다. 이런 문제점을 개선하기 위해서 다른 방법[10]이 제안되었다.

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{2}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}^2 + \Delta M_{ii} + 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta M_{ik} + \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\,\Delta M_{qk} \right\} \quad i = j \tag{12}$$

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = -\left\{ \Delta M_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\,\Delta M_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\,\Delta M_{jk} + \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\,\Delta M_{qk} \right\} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\,\alpha_{kj} \quad i \neq j \tag{13}$$

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2 + 2\alpha_{ii}\,\omega_{oi}^2 + \Delta K_{ii} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta K_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}^2\,\omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta K_{ki} + \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta K_{qk} \quad i = j \tag{14}$$

$$\alpha_{ij}\,\omega_{oi}^2 + \alpha_{ji}\,\omega_{oj}^2 = \Delta K_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\Delta K_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj}\,\omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\,\Delta K_{jk} + \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\,\Delta K_{qk} \quad i \neq j \tag{15}$$

2.3 변경된 질량 및 강성 크기 해석

변경된 질량 과 강성 위치 및 크기를 구하기 위해 다음과 같은 방법을 사용하였다.

1) 변경된 고유벡터 변화량행렬로부터 식(5)을 사용하여 감도계수행렬을 구한다.

2) 감도계수행렬을 식(12)~(15)에 대입하여 모드 변화에 의한 질량 및 강성 변화량행렬 $[\Delta M_{ij}]$ 과 $[\Delta K_{ij}]$ 을 구한다. 먼저 질량변화량부터 살펴본다. 앞에서 구한 감도계수 α_{ij}를 식(12), (13)에 대입하면 N개 자유도일 경우 방정식은 N x N개가 나오고 미지수인 ΔM_{ij} 도 N x N 개이므로 ΔM_{ij} 을 구할 수 있다. 그러나 이렇게 하면 행렬의 크기가 자유도수 N의 제곱에 비례하여 커지므로 비효율적이 되여 다음과 같은 반복법을 사용하여 ΔM_{ij}를 해석하였다.

먼저 초기치 값을 구하기 위해 감도계수 α_{ij}와 ΔM_{ij} 은 미소량이라고 가정하면 식(12), (13)에서 2차항들은 무시할 수 있고 식(12), (13)은 다음과 같이 된다.

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{2}\Delta M_{ii}, \qquad i=j \qquad (16)$$

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = -\Delta M_{ij}, \qquad i \neq j \qquad (17)$$

(16), (17)식에서 초기치를 구하고 (12), (13)식에서 오른쪽 항에 있는 ΔM_{ii}와 ΔM_{ij}를 왼쪽으로 이동하여 정리하면 다음식과 같이 반복식의 알고리즘이 유도된다.

$$\Delta M_{ii}^{(1)} = -2\alpha_{ii} \qquad i=j \qquad (18)$$

$$\Delta M_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} \qquad i \neq j \qquad (19)$$

$$\Delta M_{ii}^{(i+1)} = -2\alpha_{ii} - \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}^{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta M_{ik}^{(i)} + \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta M_{qk}^{(i)} \Big\} \quad i=j \qquad (20)$$

$$\Delta M_{ij}^{(i+1)} = -\alpha_{ij} - \alpha_{ji} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta M_{ik}^{(i)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\Delta M_{jk}^{(i)} - \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\Delta M_{pk}^{(i)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj} \quad i \neq j \qquad (21)$$

여기서 $\Delta M_{ij}^{(i)}$ 와 $\Delta M_{ij}^{(i+1)}$ 는 각각 i 번과 $(i+1)$ 번 반복했을 때 구한 ΔM_{ij} 값이다.

질량과 같은 방법으로 강성을 해석하면 다음식과 같이 반복식의 알고리즘이 유도된다.

$$\Delta K_{ii}^{(1)} = \omega_{i}^{2} - \omega_{oi}^{2} \qquad i=j \qquad (22)$$

$$\Delta K_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij}\,\omega_{oi}^{2} + \alpha_{ji}\,\omega_{oj}^{2} \qquad i \neq j \qquad (23)$$

$$\Delta K_{ii}^{(i+1)} = \omega_{i}^{2} - \omega_{oi}^{2} - 2\alpha_{ii}\,\omega_{oi}^{2} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta K_{ik}^{(i)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}^{2} - \omega_{ok}^{2} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta K_{ki}^{(i)} - \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\Delta K_{qk}^{(i)} \qquad i=j \qquad (24)$$

$$\Delta K_{ij}^{(i+1)} = \alpha_{ij}\,\omega_{oi}^{2} + \alpha_{ji}\,\omega_{oj}^{2} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\Delta K_{i}^{(i)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj}\,\omega_{ok}^{2} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\,\Delta K_{jk}^{(i)} - \sum_{q=1}^{n} \alpha_{qi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\Delta K_{qk}^{(i)}, \quad i \neq j \qquad (25)$$

(3) 위에서 구한 ΔM_{ij} 과 ΔK_{ij} 을 행렬인 $[\Delta M_{ij}]$ 과 $[\Delta K_{ij}]$ 로 만든다.

(4) 식(10), (11)으로부터

$$[\Delta M] = \{[\phi_o]^{T}\}^{-1}[\Delta M_{ij}][\phi_o]^{-1} \qquad (26)$$

$$[\Delta K] = \{[\phi_o]^{T}\}^{-1}[\Delta K_{ij}][\phi_o]^{-1} \qquad (27)$$

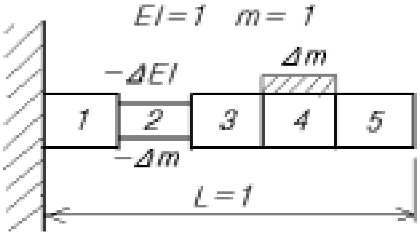
이되므로 질량행렬 및 강성행렬의 변화량인 $[\Delta M]$ 과 $[\Delta K]$ 을 구한다.

(5) 이 $[\Delta M]$ 과 $[\Delta K]$ 을 유한요소법의 질량 및 강성행렬과 비교하여 변경된 질량과 강성의 크기 및 위치를 찾는다.

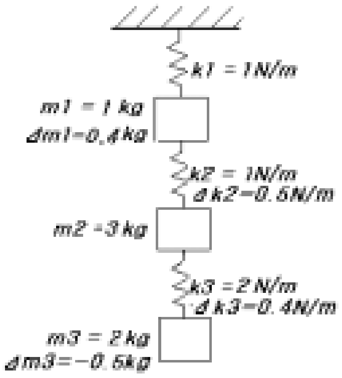
3. 적용 예

Fig. 1은 위에서 해석한 이론을 적용하기 위해 사용한 외팔보 및 3자유도계의 모델을 나타낸다. 구조 변경 전의 외팔보의 질량, 길이, 탄성계수는 1로 하였으며 질량의 변화를 주기 위해서 4번 요소에 요소 질량의 20%를 추가하였다. 또한 강성의 변화를 주기위해 2번 요소의 두께를 20% 감소시켰다. 두께가 줄어들어 따라 강성은 48.8%, 질량은 20% 감소하였다.

3 자유도계의 구조 변경 전 질량은 각각 1kg과 3kg, 2kg 강성은 1N/m와 1N/m, 2N/m로 하였으며. 1번과 0.4kg을 추가하였으며 3번 요소에 0.5kg의 질량을 감소시켰다. 또한 강성은 2번과 3번 요소에 각각 0.5N/m, 0.4N/m 강성을 추가하였다.



(a) cantilever



(b) 3 d.o.f system

Fig. 1 Model of cantilever and 3 d.o.f system

Table 1 Comparison of natural frequencies by modifying structure in cantilever beam

mode	modification		$\frac{\omega_i - \omega_{oi}}{\omega_{oi}}$ (%)
	before ω_{oi}	after ω_i	
1	3.516	3.048	-13.295
2	22.046	22.036	-0.004
3	61.919	59.073	-4.596
4	122.319	118.855	-2.832
5	203.020	192.870	-4.999
6	337.274	327.345	-2.943
7	493.263	480.574	-2.527
8	715.338	659.279	-7.837
9	1016.189	982.529	-3.312
10	1494.874	1481.154	-0.917

Table 2 Comparison of natural frequencies by modifying structure in 3 d.o.f system

mode	modification (rad/s)		$\frac{\omega_i - \omega_{oi}}{\omega_{oi}}$ (%)
	before ω_{oi}	after ω_i	
1	0.3025	0.3411	11.317
2	1.2384	1.3150	6.185
3	1.5410	1.6853	9.364

4. 결과 및 고찰

4.1 고유진동수 변화 검토

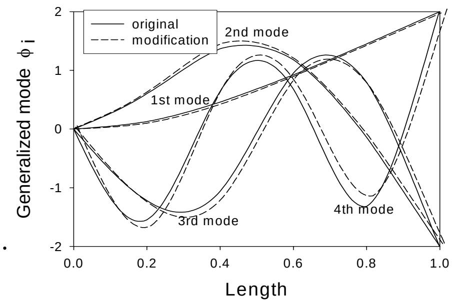
외팔보의 요소가 5개이므로 10개의 고유진동수가 존재한다. Table 1은 10차까지 고유진동수 변화를 나타낸 표로 질량 및 강성변경에 따라 최대 13.3% 감소하였다.

Table 2은 3자유도계의 3차까지 고유진동수 변화를 나타낸 표로 최대 11.3% 증가하였다.

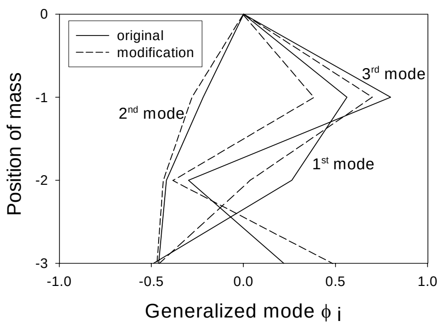
4.2 모드변화 검토

Fig. 2는 외팔보 및 3자유도계의 구조물에 질량을 추가하기 전 후의 고유모드이다. 외팔보의 경우 10개의 모드 중 1차에서 4차 모드까지 나타내었으며 고유모드가 변화하였음을 알 수 있다. 3자유도계 경우 3개의 모드 모두 나타내었으며 고유모드가 변화하였음을 알 수 있다.

Fig. 3은 고유벡터 변화량을 확대하여 나타낸 그림으로 고유벡터 변화량은 Fig. 2에서 질량 변경 후 와 변경 전 고유 벡터의 차로 구하였으며 외팔보의 경우 고유벡터 변화량의 크기는 고유벡터의 약 8%, 3자유도계의 경우 약 57%이다.

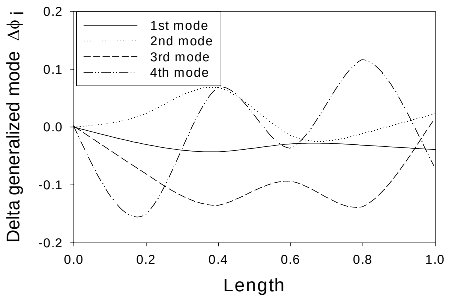


(a) cantilever

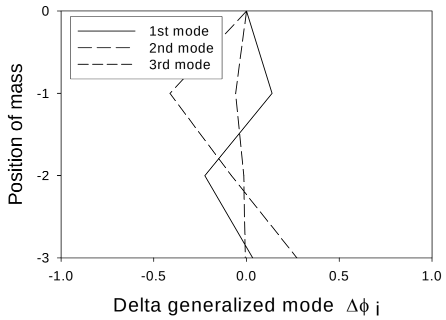


(b) 3 d.o.f

Fig. 2 Comparison of mode shapes in cantilever and 3 d.o.f system

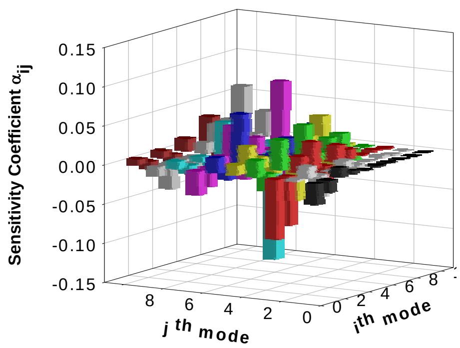


(a) cantilever

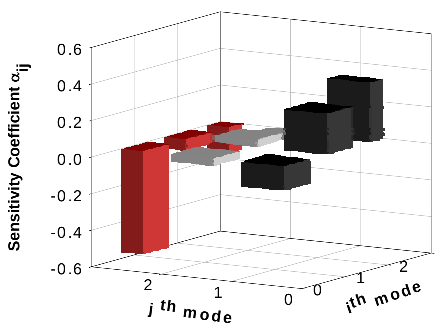


(b) 3 d.o.f system

Fig. 3 Comparison of delta mode shapes in cantilever and 3 d.o.f system



(a) cantilever



(b) 3.d.o.f system

Fig. 4 Sensitivity coefficient of cantilever and 3 d.o.f system

4.3 감도계수의 해석

Fig. 4는 외팔보 및 3자유도계의 질량 및 강성 변경 후 진동 모드 변화인 Fig. 3으로부터 (5)식을 이용하여 감도계수를 해석한 결과이다. 외팔보의 경우 10개의 모드 모두를 사용하였으며 i, j 모드가 가까울수록 감도계수의 크기가 대체적으로 크게 나타났다.

Table 3 Predictive mass and stiffness in cantilever

(a) Predictive mass

Element No.	mass			ratio
	original m	additive Δm	predictive Δm_p	$\Delta m_p/\Delta m$ (%)
1	0.2	0	0	-
2	0.2	-0.040	0.0040	100.00
3	0.2	0	0	-
4	0.2	0.040	0.0040	100.00
5	0.2	0	0	-

(b) Predictive stiffness

Element No.	stiffness			ratio
	original EI	additive ΔEI	predictive ΔEI_p	$\Delta EI_p/\Delta EI$ (%)
1	1.0	0	0	-
2	1.0	-0.488	-0.488	100.00
3	1.0	0	0	-
4	1.0	0	0	-
5	1.0	0	0	-

Table 4 Predictive mass in 3 d.o.f system

(a) Predictive mass

Element No.	mass(kg)			ratio
	original m	additive Δm	predictive Δm_p	$\Delta m_p/\Delta m$ (%)
1	1.0	0.40	0.40	100.00
2	3.0	0	0	-
3	2.0	-0.50	-0.50	100.00

(b) Predictive stiffness

Element No.	stiffness(N/m)			ratio
	original k	additive Δk	predictive Δk_p	$\Delta k_p/\Delta k$ (%)
1	1.0	0.50	0.5000	100.00
2	2.0	0.30	0.3000	100.00
3	1.0	0	0	100.00

이는 구조 변경 시 가까이 있는 모드가 멀리 떨어진 모드보다 고유벡터의 변화에 더 많은 기여를 하기 때문이다.

4.4 변경된 질량 위치 및 크기의 해석

Table 3은 외팔보 질량 및 강성을 변경시킨 후 모드의 변화량으로부터 질량 및 강성 변경 위치와 크기를 해석하여 나타낸 표이다. 새로 제안한 방법은 2, 4번 요소에 각각 추가 및 감소시킨 20%의 요소 질량의 위치 및 크기를 잘 예측하였다. 또한 2번 요소의 강성변화도 잘 예측함을 알 수 있다.

Table 4는 3자유도계에 질량 및 강성을 변경시킨 후 감도계수를 이용하여 질량 및 강성의 변경 위치와 크기를 해석하여 나타낸 표이다. 이 역시 질량 및 강성의 변경위치와 크기를 잘 예측한 것을 알 수 있다.

5. 결 론

구조물의 변경 전, 후의 동특성을 이용하여 구조물에 변경된 질량 및 강성위치와 크기를 예측하는 알고리즘을 개발하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 구조 변경 전 진동모드와 구조 변경 후 진동모드를 가지고 감도 계수를 해석하는 방안을 제안하였다.

(2)감도 계수로부터 변경된 질량 행렬 해석하는 알고리즘을 개발하였다.

(3) 변경된 질량 행렬로부터 유한요소법의 질량 행렬을 이용하여 구조물의 질량 변경 위치 및 크기 해석하는 방안을 제안하였다.

(4) 본 방법을 구조 변경 한 외팔보와 3자유도계에 적용한 결과 새로 제안한 방법은 구조물 변경 후 질량변경 위치 및 크기를 잘 예측하므로 제안된 방법이 타당함을 알 수 있었다.

참고문헌

(1)Ahmadian, H., Mottershead, J. E. and Friswell M. I., 1998, "Regularisation Methods for Finite Element Model Updating," *Mechanical Systems and Signal Processing,* Vol. 12, No. 1, pp. 47-64

(2) Friswell, M. I., Inman, D. J. and Pilkey, D. F. , 1998, "The Direct Updating of Damping and Stiffness Matrices" *AIAA Journal,* Vol. 36, No. 3, pp. 491-493.

(3) Fritzen, C. P., 1986, "Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems," *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 108, No.1, pp. 9-16.

(4) Fuh, J. S., Chen, S. Y. and Berman, A., 1984, "System Identification of Analytical Models of Damped Structures," *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics & Materials Conference, Palm Springs, California,* Paper No. AIAA-84-0926.

(5) Friswell, M.I., Penny, J.E.T. and Wilson, D.A.L., 1994, “Using Vibration Data and Statistical Measures to Locate Damage in Structures,” Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 9, No. 4, pp. 239-254.

(6) Lam, H. F., Ko, J. M., and Wong, C. W., 1998, "Localization of Damaged Structural Connections Based on Experimental Modal and Sensitivity Analysis," Journal of Sound and Vibration, Vol. 210, No. 1, pp. 91-115.

(7)Wei, F. S. and Zhang, D. W., 1989, "Mass Matrix Modification Using Element Correction Method," AIAA Journal, Vol. 27, No. 1, pp. 119-121.

(8) Zhang, Q., Wang, W., Allemang, R. J., and Brown, D. L., 1989, "Prediction of Mass Modification For Desired Natural Frequencies," Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 4, No. 2, pp. 39-44.

(9) Fox, R. S. and Kapoor. M. P, 1968. "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors." *AIAA Journal,* Vol. 6, No.12 pp.2426 - 2429

(10) Lee, J. Y., 2002, "A Structural Eigenderivative Analysis by Modification of Design Parameter," *Transactions of KSME A,* Vol. 26, No. 4, pp. 739 - 744.