

# 초정밀 구조해석을 위한 수치절차의 영향 분석

정강식<sup>†</sup> · 유흥희<sup>\*</sup>

## Investigation of the Effects of Some Numerical Procedure on the High Precision Structural Analysis

Kang-Sik Jung and Hong-Hee Yoo

**Key Words :** Structural Dynamics (구조동역학), Cantilever Beam (외팔보), High Precision (초 정밀), Polynomial Mode Function (다항식 기반 모드 함수), Inverse Dynamics (역동역학)

### Abstract

The effects of two important numerical procedures on the high precision structural analysis are investigated in this study. The two numerical procedures include continuous variable approximation and time integration. For the continuous variable approximation, polynomial mode functions generated by the Gram-Schmidt process are introduced and the numerical results obtained by employing the polynomial mode functions are compared to those obtained by classical beam mode functions. The effect of the time integration procedure on the analysis precision is also investigated. It is found that the two procedures affect the precision of structural analysis significantly.

### 기호설명

- $\rho$  : 단위길이 당 질량  
 $E$  : 탄성계수  
 $I$  : 2 차 단면 관성 모멘트  
 $u$  : 굽힘 방향 탄성변위  
 $\phi$  : 굽힘 방향 모드함수  
 $q$  : 일반좌표  
 $\mu$  : 일반좌표의 수

### 1. 서 론

자연현상을 분석하기 위해 인간은 여러 가지 가정을 통해 자연현상을 수식화 한다. 또한 많은 경우에 그 수식을 선형화하며 연속계를 이산계로 변환시키기도 하여 근사화 된 모델링을 바탕으로

또 다른 오차를 수반하는 수치 해석을 이용하여 실제 현상을 예측한다. 따라서 해석 결과는 여러 원인에 의한 오차를 포함하게 된다. 이 때문에 정확한 해석을 위해서는 일차적으로 자연 현상을 정확한 수학적 모델로 변환하는 연구도 필요하며 이와 더불어서 그 수학적 모델을 수치적 방법을 통해 풀이할 때 발생하는 오차를 줄이는 방법을 연구하는 것도 필수적이라 할 수 있다. 수치적 해석 시 발생하는 오차는 다시 두 가지로 분류할 수 있는데 그 첫째는 컴퓨터의 연산능력 한계에 의해서 발생하는 오차이고 둘째는 수치 절차 및 방법론에 의해 발생하는 오차다. 본 연구에서는 두 번째인 수치 절차 및 방법론 중에 구조해석 시에 특별히 중요한 연속 변수의 근사화 과정과 수치적분 과정이 오차에 미치는 영향을 분석하는 것을 연구 목적으로 하였다.

본 연구에서는 해석 대상 시스템으로 시간에 따라 변화하는 분포하중을 받는 외팔 보를 선정 하였다. 이러한 형태의 구조물은 많은 실제 예를 발견할 수 있으며 항공기 날개, 인공위성 안테나, 산업용 로봇 팔(Fig. 1) 등이 그 대표적인 예이다. 예를 들어 산업용 로봇 팔의 경우 제조 공정 중

<sup>†</sup> 회원, 한양대학교 기계설계학과 대학원

<sup>\*</sup> 회원, 한양대학교 공과대학 기계공학부

E-mail : [hhyoo@hanyang.ac.kr](mailto:hhyoo@hanyang.ac.kr)

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

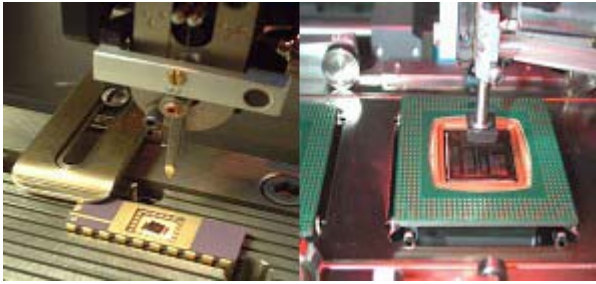


Fig. 1 IC packaging device

그 동적 반응 예측의 정확도가 제품 생산의 효율 및 성능과 직결되므로 대단히 중요하다. 더욱이 최근 반도체 등과 같은 초 정밀도를 요하는 생산 기술의 필요성이 (Fig.1 참조) 점증하면서 이러한 생산장비의 설계 시 필요한 구조해석도 초 정밀도가 요구되어지고 있다. 본 연구에서는 이러한 실제적인 공학적 필요성에 근거하여 구조해석 시 발생할 수 있는 해석 오차를 규명하고 이를 줄일 수 있는 방법을 모색하고자 하는 것이다.

분포하중을 받는 구조물의 정적 변형 및 동적 반응에 관한 연구는 일찍부터 연구자들에 의해 이루어져 왔다. 이 연구들에는 (참고문헌(1-4)를 참조) 연속계를 이산계로 변환하는 과정과 시간 적분 하는 과정 등이 포함되어 있다. 연속계를 이산계로 근사화 하는 과정은 전역 모드함수나 국부 형상 함수들을 이용하여 연속 변수를 급수 형태로 표현하여 근사화 하는 과정이다. 이러한 과정은 오차를 수반하므로 경우에 따라 요구되는 해석의 정밀도를 만족시키지 못하는 주요 원인이 될 수도 있다. 또한 시간 적분 과정 역시 오차를 수반하는 수치적 절차이므로 이 절차 중에서도 요구되는 해석의 정밀도를 만족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있다.

본 연구에서는 구조 해석 시 발생하는 오차를 정확히 예측하기 위해서 먼저 정적 변형 및 동적 반응의 해를 정확히 알고있는 문제를 고안하였다. 이러한 문제는 분포하중을 받는 외팔 보를 대상으로 경계조건을 만족하는 동적 응답을 가정하고 역동역학 해석을 통하여 분포하중을 구하는 과정을 통해 고안하였으며 이를 이용하여 이로부터 참고문헌(1, 2)에 제시된 방법으로 운동방정식을 근사화 하고 통상적인 보의 모드 함수를 이용하였을 때와 직교 다항식 모드 함수를 (참고문헌(5, 6) 참조) 이용하였을 때의 수치 해의 정밀도를 비교하였다. 또한 시간 적분이 동적 반응을 위한 수치 해에 미치는 영향을 분석하였다.

## 2. 운동방정식

본 장에서는 분포하중을 받는 외팔 보의 이산 운동방정식을 유도하려고 한다. 대상 시스템은 이론전개 및 설명의 편의상 2 차원 평면 운동을 하며 일정한 단면 형상을 갖는 보로 선정하였다. 분포하중을 받는 보는 Fig. 2 와 같이 나타낼 수 있는데 오일러 보 이론에 근거한 연속계에서의 굽힘 방향 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f \quad (1)$$

엄밀한 응답을 구할 수 있는 문제를 고안하기 위해 다음과 같이 역동역학 해석 접근법을 이용한다. 이를 위해 길이가  $L$  인 외팔 보의 응답을 먼저 정하는데 이 응답은 고정 단 및 자유 단에서의 경계조건을 모두 만족하는 값으로 선정한다. 이렇게 선정된 응답을 (1)식에 대입하면 그러한 응답을 발생시킬 수 있는 분포하중이 구해진다. 아래 두 식은 그렇게 구해진 식들이다.

$$w(x,t) = (x-L)^4 \left( \frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{L^2x^2}{2} \right) \sin 2t \quad (2)$$

$$f(x,t) = [-4\rho(x-L)^4 \left( \frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{L^2x^2}{2} \right) + EI(140(x-L)^4 + 40L^3x - 34L^4)] \sin 2t \quad (3)$$

이제 식(3)의 분포하중을 갖는 문제를 수치적으로 풀고 그 결과를 식(2)의 엄밀해와 비교하여 오차를 구할 수 있다.

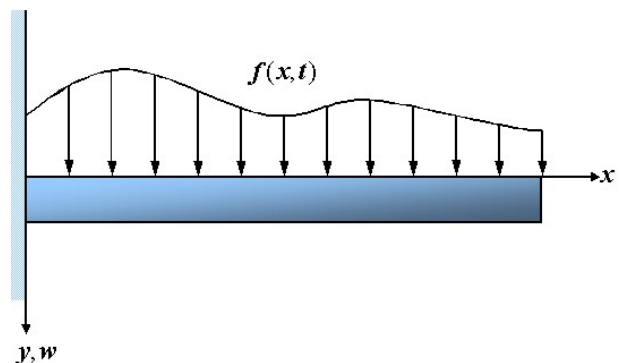


Fig. 2 Configuration of a cantilever beam with time-varying distributed force

위에서 주어진 식 (1)의 운동방정식은 다음과 같은 과정을 통해 이산계 운동방정식으로 변환될 수 있다. 식 (1)에 가중함수  $v$  를 곱하고 영역  $\Omega$  에 대해 적분한다.

$$\int_{\Omega} [\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}] \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \quad (4)$$

식 (4)를 부분적분하고 경계조건을 대입해 정리하면

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot v dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot v'' dx = \int_0^L f \cdot v dx \quad (5)$$

또한 식 (5)의  $u$  와  $v$  를 다음과 같이 가정하여 근사화한다.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_j(x) q_j(t) \quad (6)$$

$$v(x) = \phi_i(x) \quad (7)$$

식 (6), (7)을 식(5)에 대입하면

$$\int_0^L \rho \sum_{j=1}^{\mu} \phi_i \phi_j dx \ddot{q}_j + \int_0^L EI \sum_{j=1}^{\mu} \phi_i'' \phi_j'' dx q_j = \int_0^L f \cdot \phi_i dx \quad (8)$$

이를 다시 기술하면

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = R_i \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (9)$$

여기서

$$M_{ij} = \int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx \quad (10)$$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i'' \phi_j'' dx \quad (11)$$

$$R_i = \int_0^L f \cdot \phi_i dx \quad (12)$$

식 (6)이나 (7)을 위해서 사용되는 모드 함수들의 대표적인 예로서 보 함수가 (Beam function) 있다. 이 함수는 보의 진동 방정식에서 구한 고유 모드이므로 당연히 모든 경계조건들을 만족하는 Comparison 함수이다.

### 3. 다항식 기반 모드 함수

앞에서 언급한 대로 일반적으로 사용되는 외팔보의 전역 모드 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = & \cosh \frac{\lambda_i x}{L} - \cos \frac{\lambda_i x}{L} \\ & - \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} \left( \sinh \frac{\lambda_i x}{L} - \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\cos \lambda_i \cdot \cosh \lambda_i + 1 = 0 \quad (14)$$

여기서  $\lambda_i$  는 외팔보의 굽힘 방향 진동 고유치와 상관되며 식 (14)와 같은 특성 방정식을 만족한다. 그런데 이 특성 방정식은 함수의 기울기의 급격한 변화로 인해서 모드가 높아질수록 고유치  $\lambda_i$  를 정확히 구하는 것이 어렵다. 또한 유사한 이유로 높은 모드일수록 모드 함수 적분 시 더 큰 오차를 갖게 된다.

본 논문에서는 이 같은 이유로 발생하는 오차를 줄이고자 직교 다항식 모드 함수를 사용하였다. 참고문헌(5, 6)에서는 Gram-Schmidt 방법에 의해서  $a \leq x \leq b$  의 구간에 대해 정의되는 직교 다항식 모드 함수를 순차적으로 구하는 방법을 제시하고 있다. 이 방법은 고정 단의 경계조건을 만족하는 첫번째 모드함수가 정의되면 식에 의해 직교성을 만족하는 다음 모드 함수가 구해질 수 있는데 그 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_0(x) = \frac{X(x)}{\|X(x)\|} \quad (15)$$

$$\phi_1(x) = (x - B_1)\phi_0 \quad (16)$$

$$\phi_k = (x - B_k)\phi_k - C_k \phi_{k-1} \quad (17)$$

$$B_k = \left[ \int_a^b x \phi_{k-1}^2 dx \right] / \left[ \int_a^b \phi_{k-1}^2 dx \right] \quad (18)$$

$$C_k = \left[ \int_a^b x \phi_{k-1} \phi_{k-2} dx \right] / \left[ \int_a^b \phi_{k-2}^2 dx \right] \quad (19)$$

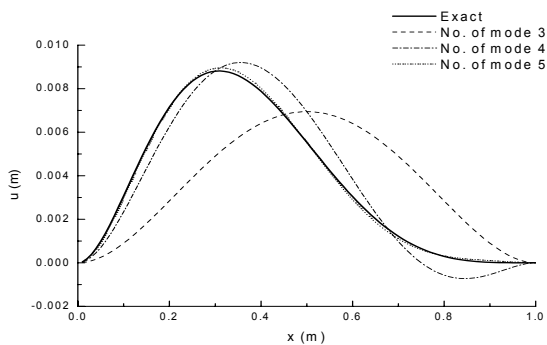
일반적으로 사용되는 보를 위한 모드 함수가 Comparison 함수인 것과는 달리 위 식에 의해서 구해진 다항식 기반 직교 모드 함수들은 Admissible 함수다. 일반적으로 Comparison 함수는 Admissible 함수에 비해 사용 시 해의 수렴속도가 더 높은 것으로 알려져 있다.

### 4. 수치 해석

본 장에는 앞서 유도된 운동방정식을 이용하여 분포 하중을 받는 외팔 보의 정적 변형 응답 및 동적 응답에 대한 수치 해석을 수행하였다. 분포 하중은 역 동역학 해석 방법을 이용하여 구하였다. 정적 해석에 사용된 하중은 (3)식에서  $\sin 2t = 1$  로 놓은 경우이며 사용된 물성치들은 Table 1 과 같다.

**Table 1** Numerical data used for the simulation

Notation	Description	Material property
$\rho$	Mass per unit length	1.2 kg / m
$E$	Young's modulus	$7.0 \times 10^{10}$ Pa
$A$	Cross section area	$4.0 \times 10^{-4} m^2$
$I$	Second area moment of inertia	$2.0 \times 10^{-7} m^4$
$L$	Length	1.0 m



**Fig. 3** Static response variation versus mode number

Fig. 3 은 다항식기반 모드함수 수를 증가시키며 정적 해석을 수행한 결과로 모드의 수가 증가함에 따라 정적 응답이 엄밀 해에 급격하게 수렴함을 보여준다. Table 2 와 3 은 각각 통상적인 보 모드 함수를 이용한 경우와 다항식 기반 모드 함수를 이용한 경우의 정적 해석 결과를 나타낸 것이다. 이 수치 값들은 최대 변위가 발생하는  $x = 0.31m$  에서의 응답 및 오차로 다항식 기반 모드 함수를 사용한 경우는 모드 수 7 개에 이르러서는 거의 컴퓨터의 계산 한계에 수렴하는 것을 알 수 있다. 이에 반해서 보 모드 함수를 사용한 경우는 모드 수를 10 개까지 증가시켜도 오차가 거의 감소하지 않고 있는 것을 확인할 수 있다.

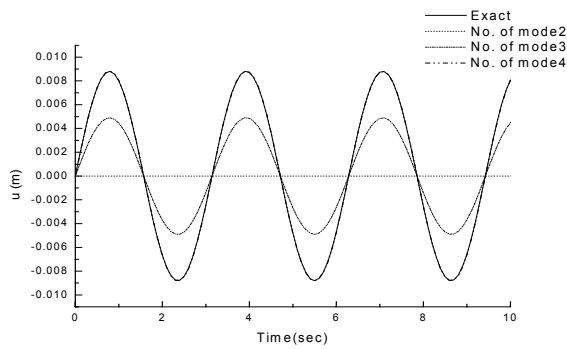
**Table 2** Variation of maximum static deflection obtained by employing beam mode functions

No. of modes	Response( $u$ )	Relative error
1	4.49711045519913E-03	9.48984E-01
2	4.50244076623188E-03	4.89234E-01
3	8.57944979360123E-03	2.67301E-02
4	9.11726316717527E-03	3.42806E-02
5	8.96763398639387E-03	1.73063E-02
6	8.83002353018874E-03	1.69553E-03
7	8.78691849790576E-03	3.19439E-03
8	8.79456626739725E-03	2.32681E-03
9	8.81143125697719E-03	4.13617E-04
10	8.82008864377484E-03	5.68495E-04
Exact	8.81507732023867E-03	

**Table 3** Variation of maximum static deflection obtained by employing polynomial mode functions

No. of modes	Response( $u$ )	Relative error
1	1.48682156308192E-17	1.00000E+00
2	3.00593268536209E-17	1.00000E+00
3	5.08369000000003E-03	4.23296E-01
4	8.94729440000002E-03	1.49990E-02
5	8.95852473336367E-03	1.62730E-02
6	8.82165654749366E-03	7.46361E-04
7	8.81507732023870E-03	2.75507E-15
8	8.81507732023871E-03	4.32939E-15
9	8.81507732023872E-03	5.11655E-15
10	8.81507732023870E-03	3.34544E-15
Exact	8.81507732023867E-03	

Fig. 4 는 분포하중이 식 (3)과 같을 때 식 (2)로 주어진 엄밀해와 모드 수 증가에 따른  $x = 0.31m$  에서의 결과이며 정적 해석 시와 마찬가지로 모드 수 증가에 따라 그 해석 결과가 엄밀 해에 수렴해감을 볼 수가 있다. Table 4 와 5 는 동적 해석 시 통상적 보 모드 함수를 사용한 경우 동적 응답 및 오차와 다항식 기반 모드 함수를 이용한 경우의 동적 응답 및 오차를 각각 모드 수 증가에 따라 보여주고 있다. 응답 측정 위치는  $x = 1.00m$  이며 시간은 분포 하중이 최대값에 이르는 0.8sec 이다. 이 결과는 그러나 정적 해석과 달리 다항식 기반 모드함수를 이용할 때도 정확도가 보 모드함수를 이용할 때에 비하여 별 차가 없음을 알 수 있다.



**Fig. 4** Dynamic response variation versus number of modes

**Table 4** Variation of the dynamic response obtained by employing beam mode functions

No. of modes	Response( $u$ )	Absolute error
1	3.08793644813063E-03	3.08794E-03
2	-4.32863224085858E-03	4.32863E-03
3	1.10024216126503E-03	1.10024E-03
4	-3.66242632255563E-04	3.66243E-04
5	1.24466966578890E-04	1.24467E-04
6	-7.26900171192522E-05	7.26900E-05
7	1.80215209603000E-05	1.80215E-05
8	-2.81954848057046E-05	2.81955E-05
9	-2.71470589146904E-06	2.71471E-06
10	-1.75446851526001E-05	1.75447E-05
Exact	0.00000000000000E+00	

**Table 5** Variation of the dynamic response obtained by employing polynomial mode functions

No. of modes	Response( $u$ )	Absolute error
1	2.81035861725862E-03	2.81036E-03
2	-5.47432808026496E-03	5.47433E-03
3	4.00727595382720E-03	4.00728E-03
4	-1.31223915768850E-03	1.31224E-03
5	1.54445550374011E-04	1.54446E-04
6	-2.23583404096372E-05	2.23583E-05
7	-1.20147563243420E-05	1.20148E-05
8	-1.20208720152494E-05	1.20209E-05
9	-1.20132659931843E-05	1.20133E-05
10	-1.20121151479079E-05	1.20121E-05
Exact	0.00000000000000E+00	

**Table 6** Maximum values of the moment and the shear force obtained by employing beam mode functions

No. of modes	$ M _{\max}$	Relative error	$ V _{\max}$	Relative error
1	1.520E+02	9.9E-01	2.092E+02	1.0E+00
2	2.440E+03	8.3E-01	1.115E+04	9.4E-01
3	7.129E+03	4.9E-01	4.795E+04	7.6E-01
4	9.611E+03	3.1E-01	7.525E+04	6.2E-01
5	1.098E+04	2.2E-01	9.466E+04	5.2E-01
6	1.181E+04	1.6E-01	1.089E+05	4.4E-01
7	1.234E+04	1.2E-01	1.197E+05	3.9E-01
8	1.270E+04	9.3E-02	1.282E+05	3.5E-01
9	1.295E+04	7.5E-02	1.350E+05	3.1E-01
10	1.314E+04	6.1E-02	1.405E+05	2.8E-01
Exact	1.400E+04		1.959E+05	

**Table 7** Maximum values of the moment and the shear force obtained by employing polynomial mode functions

No. of modes	$ M _{\max}$	Relative Error	$ V _{\max}$	Relative error
1	7.869E+01	9.9E-01	0.000E+00	1.0E+00
2	1.239E+03	9.1E-01	4.175E+03	9.8E-01
3	5.221E+03	6.3E-01	3.763E+04	8.1E-01
4	1.044E+04	2.5E-01	1.127E+05	4.3E-01
5	1.331E+04	4.9E-02	1.748E+05	1.1E-01
6	1.393E+04	4.4E-03	1.935E+05	1.2E-02
7	1.399E+04	5.7E-05	1.959E+05	3.0E-05
8	1.399E+04	5.3E-05	1.959E+05	1.6E-05
9	1.399E+04	4.6E-05	1.959E+05	1.8E-05
10	1.399E+04	4.7E-05	1.959E+05	9.2E-06
Exact	1.400E+04		1.959E+05	

Table 6 과 7 은 동적 해석 시 분포하중이 최대가 되는 0.8sec 시점에 최대 굽힘 모멘트와 전단력이 발생하는 고정 단에서의 수치 값들이다. 앞에서 구한 변위 결과와 비교할 때 이 결과들은 더 높은 모드 수에서 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 이 경우는 기존의 보 모드 함수를 사용한 경우 상당히 큰 오차를 보이는데 비해서 다항식 기반 모드 함수를 사용한 결과에서는 상대적으로 매우 정확한 수치 값을 얻을 수 있음을 관찰할 수가 있다. 이런 점에서 다항식 기반 모드 함수를 사용하는 것이 통상적 보 모드 함수를 사용하는 것보다도 동적 해석 시에도 더 유용하다는 것을 확인할 수 있다. 그러나 동적 해석 시에는 시간 적분 절차를 이용함으로써 그 해석의 정확도가 정적 해석 시에 비해서 떨어지는 것을 알 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 엄밀한 정적 및 동적 응답 해를 구할 수 있는, 시간에 대해 변화하는 분포하중을 받는 외팔 보 구조해석 문제를 고안하였으며 이를 이용하여 통상적 보 모드함수와 다항식 기반 모드함수를 이용한 수치 해석을 수행하였다. 수치해석 결과는 다항식 기반 모드함수들을 사용할 경우가 통상적 보 모드 함수들을 사용하는 경우보다 훨씬 더 빠른 수렴결과와 정밀한 해를 구하게 해 주는 것을 보여주었다. 그러나 동적 해석 시의 변위를 구한 결과는 수치 적분과정에 내재한 오차 유발로 인해 다항식 기반 모드함수를 이용한 장점이 상당 정도 잠식된 것을 확인할 수 있었으며 그럼에도 불구하고 모멘트와 전단력의 예측과 관련해서는 우수성을 보여주었다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods In Vibrations*, The Macmillan Company
- (2) Igura, A., and Olga, I. 2001, *Formulas For Structural Dynamics*, McGraw-Hill, Inc.
- (3) Frayba, L., 1972, "Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads," *Noordhoff International, Groningen*.
- (4) Abu-Hilal, M., 2003, "Forced vibration of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions," *J. of Sound and Vibration*, 267(2), pp. 191-207.
- (5) Chihara, T., 1978, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, London: Gordon and Breach Science Publishers
- (6) Bhat, R., 1985, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials In Rayleigh-Ritz Method," *J. of Sound and Vibration*, 102(4), pp. 493-499.