

## 3 차원 구조물에서 Chordal Axis Transform 을 이용한 셸 요소망의 자동생성

손준희<sup>†</sup>, 채수원<sup>\*</sup>

### Automatic Generation of Shell Elements by Using Chordal Axis Transform in 3D Structures

Jun-Hee Son<sup>†</sup>, Soo-Won Chae<sup>\*</sup>

**Key Words :** Midsurface(중립면), Mesh generation(요소망 생성), Tetrahedral meshing(사면체 요소망 생성), Shell elements(셸 요소), Packing loop operator(패킹 루프 오퍼레이터)

#### Abstract.

Shell finite elements are widely used for the analysis of thin section objects such as sheet metal parts, automobile bodies and et al. due to their computational efficiency. Since many of input data for finite element analysis are given as solid models or triangulated surface models, one should extract midsurface information from these input data initially and then construct shell meshes on the extracted midsurfaces. In this paper, a method of generating shell elements on midsurfaces directly from input models have been proposed. In order to construct shell meshes, the input models should be triangulated on surfaces first, and then tetrahedral elements are generated by using an advancing front method, and finally mid shell surfaces are obtained from tetrahedral meshes. Some examples are given to demonstrate the efficiency of the proposed method.

#### 1. 서 론

사출성형 제품, 판금 제품 등과 같이 두께가 얇은 부품의 설계해석에는 해석의 효율성으로 인하여 3 차원 유한요소를 사용하지 않고 셸 형태의 요소를 많이 사용하게 된다. 이는 보통 중립면에서 곡면요소로 정의하게 된다. 그러나 현업에서는 설계시 CAD 모델로 정의된 자료를 사용하는 경우가 많으므로 실제 해석자가 사용해야 하는 자료는 3 차원 솔리드 모델인 경우가 대부분이다. 이 때 두께가 얇은 부품들의 중립면을 구하고 이에 대한 셸 형태의 유한요소망을 생성하는 데는 많은 시간과 노력이 소요되는 문제가 있다. 특히 중립면을 수동적으로 재생성하는 방법은 모델에 따라 어렵고 복잡한 작업이다. 이 때 사용되는 방법으로서

모델의 표면에 대한 표면요소망을 생성하고 이를 오프셋하는 방법이 있으나, 이는 여러면이 만나는 부분에서 요소망을 다시 연결해야 하는 번거로운 작업이 있어서 자동화시키기 어렵다. 따라서 모델의 형상을 잘 나타낼 수 있는 중립면에 대응되는 면을 추출하여 셸 요소망을 생성하는 방법이 많이 사용되고 있다.

중립면에 대응되는 면은 여러방법으로 연구되고 있다. 대표적으로 미디얼 곡면(medial surface)은 1967 년 Blum 이 제안한 MAT(medial axis transform)<sup>(1)</sup>를 이용하여 정의 되었고 MAT 를 이용한 셸 요소망 생성과 관련된 연구를 살펴보면 Ang, 과 Armstrong<sup>(2)</sup>은 3 차원 모델의 미디얼 곡면을 추출하여 그 곡면에 셸 요소망을 생성하였다. 그러나 미디얼 곡면을 추출하는 것은 복잡한 작업이며 면 경계에서의 형상왜곡과 전체적인 크기가 두께만큼 작아진다는 단점이 있다. 다른 방법으로 Prasad<sup>(3)</sup>는 CAT(chordal axis transform)를 제안하였고, Quadros 와 Shimada<sup>(4)</sup>는 사면체 요소의 중간 평면(mid plane)을 이용하여 중립면에 대응하는 코오털 곡면(chordal surface)을 생성하는 방법을 제안하였

<sup>†</sup> 고려대학교 대학원 기계공학과

<sup>\*</sup> 고려대학교 기계공학과

E-mail : swchae@korea.ac.kr

TEL : (02)3290-3367 FAX : (02)926-9441

는데, 본 연구에서는 CAT 를 응용하여 기존의 Quadros 와 Shimada 가 제안했던 방법에서 코모델 곡면을 생성하는 과정을 없애고, 새로운 사면체 요소의 중간 평면 결정 방법을 제안하여 자동으로 중립면에 대한 삼각형 또는 사각형 유한요소망을 생성하는 기법과 프로그램을 개발하였다.

## 2. 중립면에서의 요소망 생성

일반적으로 얇은 두께를 가진 부품은 윗면(top surface), 아랫면(bottom surface) 및 두께가 되는 옆면(lateral surface)으로 구성된다(Fig. 1). Fig. 1 과 같이 중립면은 윗면과 아랫면의 한쌍으로부터 생성될 수 있다. 이를 위해 본 연구에서는 다음과 같은 가정을 하였다.

- (1) 옆면의 면적은 항상 윗면과 아랫면의 면적보다 작다.
- (2) 입력되는 모델은 항상 두개의 면으로 하나의 중립면을 생성할 수 있다.

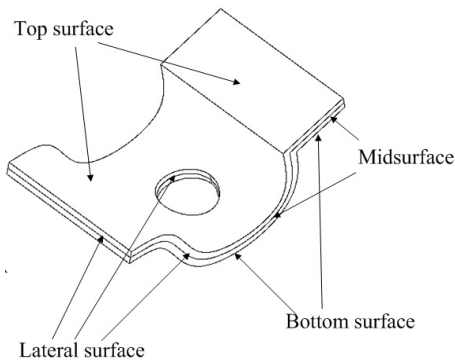


Fig. 1 Thin section part

중립면에 대한 요소망의 생성과정은 두 단계로 나누어진다. 이는 먼저 입력된 모델에 대해 3 차원 사면체 요소망을 한 층으로 생성한 후, 이들 사면체의 중간 단면을 연결하여 중립면에 대한 삼각형 또는 사각형 요소를 생성하는 것이다. 즉, Fig.2 에서 보는 바와 같이 전체 모델의 윗면과 아랫면 사이에 존재하는 에지(edge)의 중점들(mid nodes)로 이루어지는 중간단면들을 연결하여 셀 요소망을 생성하는 것이다.

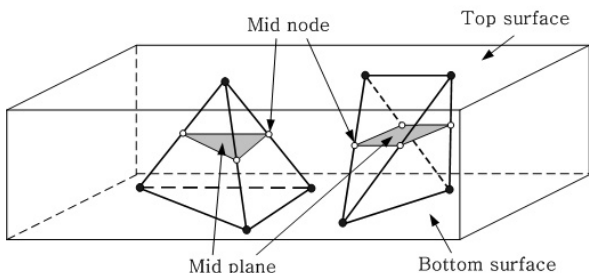


Fig. 2 Mid nodes and mid planes of tetrahedral elements

### 2.1 사면체 요소망 생성

중립면에서의 요소망 생성을 위한 입력 자료는 솔리드 모델과 표면이 삼각화된 표면(surface) 모델의 두 가지 형태가 사용될 수 있다. 먼저 입력 자료가 솔리드 모델인 경우 각 표면에 대해 삼각분할법에 의한 표면 요소망을 생성한 후 이를 토대로 사면체 요소망을 생성한다. 여기서 표면의 삼각분할법으로 영역분할법(domain decomposition)<sup>(5-6)</sup>을 사용하고, 사면체 요소망의 생성에는 전진경계법(advancing front technique)<sup>(7-9)</sup>을 사용한다. 한편 입력자료가 삼각화된 표면모델인 경우에는 이를 사용하여 사면체 요소를 직접 생성한다.

사면체 요소 생성시 중립면 생성을 위하여 두께 방향으로 한 층의 요소만 생성하도록 해야 한다. 따라서 생성되는 요소의 크기를 모델의 최대두께보다 크게 하였으며, 본 연구에서 사용한 전진경계법의 오퍼레이터 중 영역의 내부에 새로운 절점을 생성하는 디깅(digging) 오퍼레이터를 사용하지 않도록 하였다. 이로 인해 발생하는 요소생성이 곤란한 경우 (pathological case)는 사면체 요소망을 생성하지 않고 중립면 요소망을 생성 하는 패킹루프 오퍼레이터(packing loop operator)를 개발하여 해결하였다.

### 2.2 셀 요소망 생성

본 연구에서는 각각의 사면체 요소에 대하여 중간 평면을 결정해야 한다. 이를 위해 하나의 사면체 요소의 절점이 속하는 면 중에서 그 사면체 요소의 중간평면에 대해 윗면이 되는 면을  $S_t$ , 아랫면이 되는 면을  $S_b$ , 그리고 옆면이 되는 면을  $S_l$  이라고 정의한다.

#### 2.2.1 면의 분류 및 면적 계산

처음 입력된 모델이 삼각화된 표면요소 모델이면 형상(geometry) 정보가 없으므로 모델의 면을 정의 할 수 없다. 또한 형상 정보를 가지고 있는 IGES 형식이 입력되더라도 CAD 작업자에 따라서 면의 개수도 다르고, 불필요한 면의 개수가 많아져 작업이 복잡해지고  $S_t$ ,  $S_b$ ,  $S_l$  을 결정하기 어려워지는 경우가 있으므로 모델의 면을 분류하는 과정이 필요하다. 이를 위해서 입력되거나 생성된 표면 삼각형 요소들의 법선 벡터(normal vector)의 사이각을 이용하여 각 면으로 분류한다. 분류된 요소의 단위 법선벡터( $n_i$ )와 분류된 요소와 인접해 있고 분류되지 않은 요소의 단위 법선 벡터( $n_{i+1}$ )의 사이각을  $\theta$  라 하면

$$\theta = \cos^{-1}(n_i \cdot n_{i+1}) \tag{1}$$

$\theta$  가 기준각 보다 작으면 같은 면  $S_j$  로 분류하고  $\theta$  가 기준각 보다 크면 다른 면  $S_{j+1}$  로 분류한

다. 여기서 기준각은  $\pi/3$  으로 하였다. 그리고 분류된 면의 면적을 포함한 삼각형 요소의 각각의 면적의 합으로 계산한다.

$$A(S_i) = \sum_{k=1}^{N_i} a(k) \quad (2)$$

$A(S_i)$ 는 분류된 면  $S_i$ 의 면적,  $N_i$ 는 분류된 면에 포함된 삼각형 요소의 개수이고,  $a(k)$ 는 삼각형 요소의 면적이다.

2.2.2 사면체 요소의 절점 위치에 따른 분류

삼각화된 표면요소 모델을 각 면으로 분류하고 면적을 계산하고 난 후 각 사면체 요소에 대하여 절점이 속하는  $S_t, S_b$ 를 결정해야 한다. 하나의 사면체 요소가 가진 네 개의 절점이 분류된 면에 포함되는지를 검색하여 절점이 포함된 면의 개수에 Fig. 3에서 보는 바와 같이 따라 여섯 가지의 경우로 분류한다.

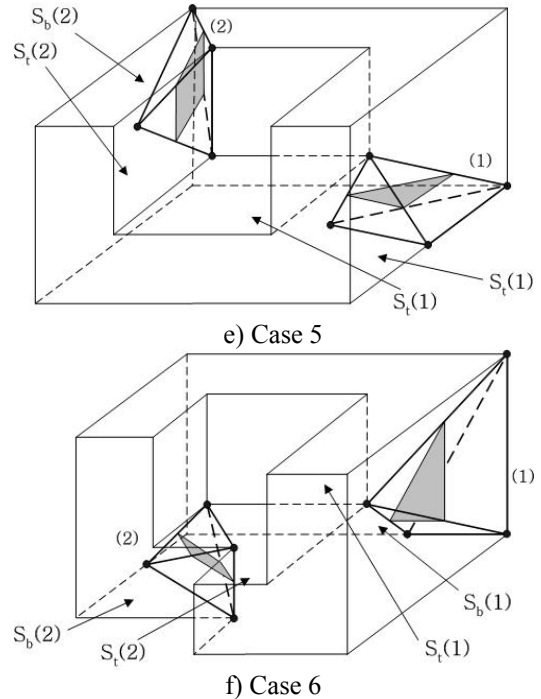
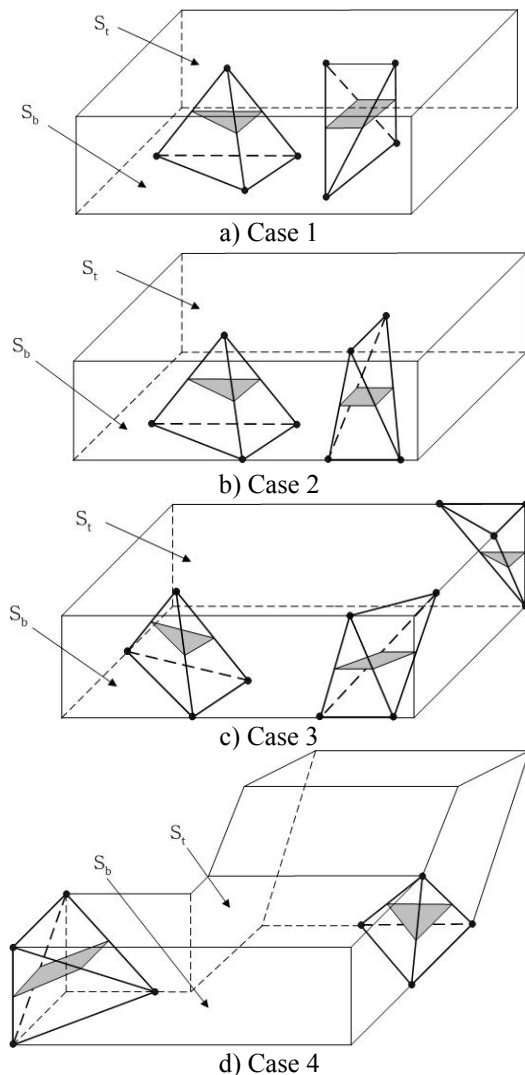


Fig. 3 Cases of tetrahedral elements

Case 1 은 사면체의 네 개의 절점이 속한 면이 두 개로 가장 기본적인 경우이다. 이 경우는  $S_t, S_b$ 를 따로 결정할 필요가 없다(Fig. 3(a)).

Case 2 는 사면체의 네 개의 절점이 세 개의 면에 포함되는 경우로 절점 하나 이상이 면의 경계에 존재하여 양쪽 면에 모두 포함되어 있다. 이 경우는  $S_t, S_b$ 를 따로 결정해야 한다.

Case 3 은 사면체의 절점들이 네 개의 면에 포함되어 있는 경우이고(Fig. 3(c)), Case 4 는 사면체의 절점들이 다섯 개(Fig. 3(d)), Case 5 는 여섯 개의 면에 포함되어 있는 경우이다(Fig. 3(e)). 마지막으로 Case 6 은 사면체의 네 개의 절점이 일곱 개 이상의 면에 포함되는 경우이다(Fig. 3(f)).

사면체 요소의 분류와 다음의 기준으로 각 사면체의 절점이 속해있는 면 중에서 면적이 큰 순으로  $S_t, S_b$ 의 쌍을 검색하여 결정한다. 하나의 사면체 요소에 대하여  $Num(S)$ 를 각 면에 포함된 절점의 개수,  $A(S)$ 를 면의 면적이라 하면,  $S_t$ 의 면적은 항상  $S_t, S_b$ 의 면적보다 작다는 가정에서 식(3)과 같은 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A(S_t) &> A(S_i) \text{ 및} \\ A(S_b) &> A(S_i) \end{aligned} \quad (3)$$

또한  $S_t, S_b$ 의 특성은 다음과 같다.

- (1)  $Num(S_t) + Num(S_b) = 4$
- (2)  $Num(S_t) = 3$  이면  $S_b$ 는 자동으로 결정된다.
- (3)  $A(S_t), A(S_b) > A(S_i)$ 이나  $A(S_t), A(S_b)$ 이 항상

최대는 아니다.

- (4) Num( $S_t$ ) = 2 이면 사면체의 나머지 두 개의 절점이 포함된 면 중에서  $S_t$ 와 면적의 차이가 가장 작은 면을  $S_b$ 로 결정한다.

2.2.3 셸 요소의 생성

각 사면체의 절점이 속해있는 면중에서  $S_t$ 와  $S_b$ 가 결정되면 기본적으로 세가지의 형태로 나누어진다(Fig. 4). 그림과 같이 각 사면체 요소의 중간평면을 이용하여 셸 요소를 생성할 수 있다.

Type 1은  $S_t$ 에 한 개의 절점,  $S_b$ 에 세 개의 절점이 존재하는 경우이며, Type 2는  $S_t$ 에 두 개의 절점,  $S_b$ 에 두 개의 절점이 존재하는 경우이다. Type 3는 Type 1이 거꾸로된 모양이다.

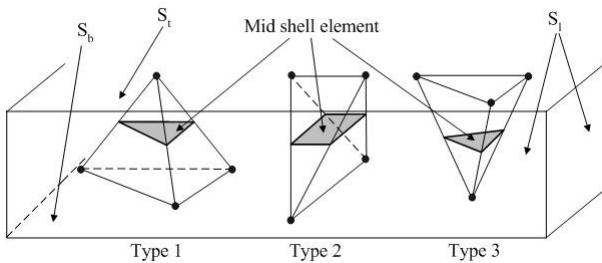
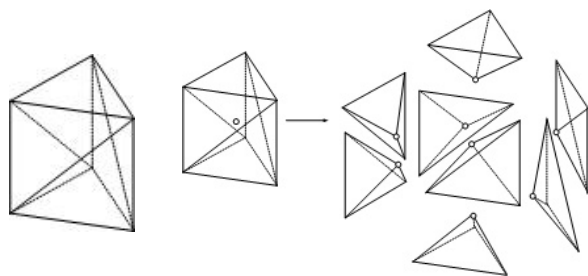


Fig. 4 Type of tetrahedral elements

2.2.4 사면체 요소망 생성이 어려운 경우

진진경계법<sup>9)</sup>을 사용하여 사면체 요소를 생성할 때 내부에 절점을 새로이 생성하여 요소망을 만드는 디깅(digging) 오퍼레이터의 사용이 필요한 경우(pathological case)가 발생하기도 한다. 그러나 본 연구에서는 사면체 요소를 한 층으로만 생성해야 하므로 내부에 절점이 생성되지 않아야 한다. 따라서 이러한 경우 해당 영역에 대해서는 사면체 요소망을 생성하지 않고 요소망 생성을 진행하며, 나중에 중립면을 생성할 때 패킹 루프 오퍼레이터(packing loop operator)를 도입하여 사면체 요소망이 생성되지 않은 영역에서는 중립면에서 직접 셸 요소망을 생성하도록 하였다.

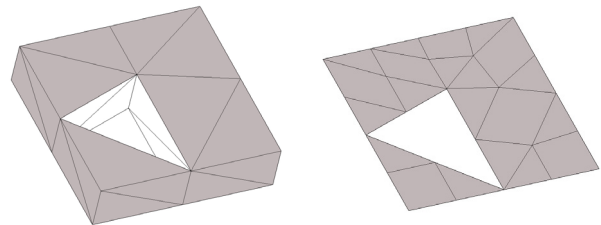


a) pathological case b) generation of inner node

Fig. 5 Pathological case

패킹 루프 오퍼레이터는 다음과 같은 과정을 수행한다. 먼저 입력되거나 생성된 표면 삼각형 요소망의 모든 에지의 중점을 계산하여 그 중점의 좌표와 생성된 중립면 셸 요소망의 경계(boundary) 절점을 비교하여 표면 삼각형 요소망의 모든 에지의 중점과 다른 좌표를 가진 셸 요소망 경계 절점을 검색한다. 이렇게 검색된 셸 요소망 경계절점은 기존 모델의 경계와 틀린 것이므로 셸 요소망 생성에 실패한 부분이다. 이렇게 실패한 부분을 찾으면 루프(loop)로 분류하고 루프에 연결된 절점의 순서와 사이각에 의해 삼각형 혹은 사각형 요소를 생성한다.

Fig. 6은 패킹 루프 오퍼레이터를 적용하기 전의 모습이고, Fig. 7은 패킹 루프 오퍼레이터의 적용 과정을 나타낸다.



a) Tetrahedral mesh b) Mid shell mesh  
Fig. 6 Before application of packing loop operator

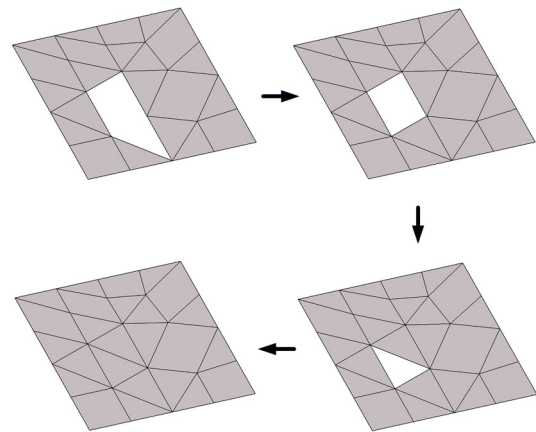


Fig. 7 Procedure of packing loop operator

2.3 요소망의 변환

생성된 셸 요소망은 삼각형 요소와 사각형 요소가 혼합되어 사용되어 있으므로 이를 삼각형 요소 혹은 사각형 요소로 변환하는 과정이 필요하다.

삼각형 요소로 변환하는 방법은 사각형 요소의 대각선의 길이와 각을 고려하여 두개의 삼각형으로 변환할 수 있다. 사각형 요소로 변환하는 방법은 Fig. 8와 같은 삼각형 요소는 세개의 사각형 요소로, 사각형 요소는 네개의 사각형 요소로 변환

하는 것이다. 요소망의 변환과정으로 요소의 개수는 증가하게 된다.

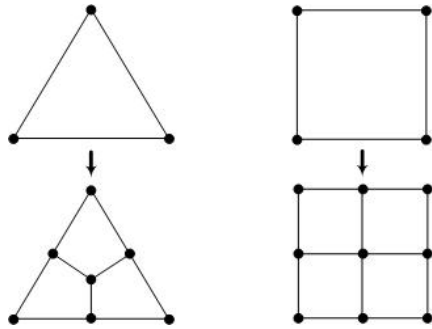
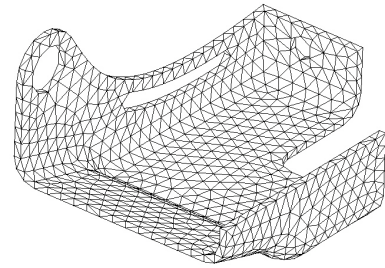


Fig. 8 Conversion of mixed mesh into quadrilateral mesh

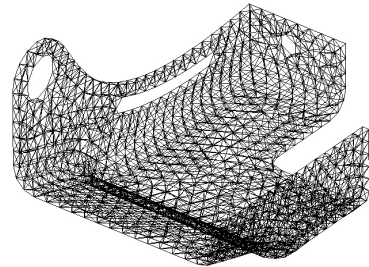
### 3. 적용 예

본 연구에서 개발한 방법은 Windows 기반의 PC 환경에서 C++언어를 사용하여 구현하였고 화면 출력을 위해서는 OpenGL<sup>(10)</sup> 을 사용하였다. 기본적으로 상용 CAD 프로그램에서 IGES<sup>(11)</sup> 형식의 3차원 형상정보를 입력받거나, 이미 표면 요소망이 생성되어 있는 UNV 또는 NASTRAN 형식의 요소망 정보를 입력받도록 하였다. 생성된 쉘 요소망은 일반적인 해석 프로그램에서 이용될 수 있도록 UNV 또는 NASTRAN 파일 형식으로 출력하였다.

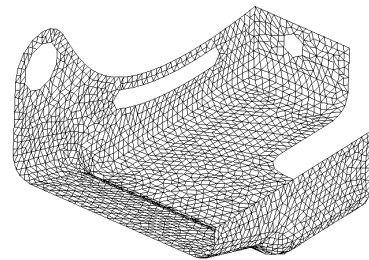
본 연구에서 개발한 방법을 솔리드 모델 또는 삼각형 표면 모델등의 여러가지 입력 자료를 사용하여 쉘 요소망을 생성한 결과는 Fig. 9~Fig. 11과 같다. Fig. 9는 브래킷(bracket)모델로 Fig. 9(a)는 표면 삼각형 요소망으로 구성된 입력 모델로 2778개의 삼각형 요소로 구성되어 있다. Fig. 9(b)는 사면체 요소망을 생성한 후의 모습으로 3702개의 요소로 구성되어 있다. Fig. 9(c)는 중립면에서 쉘 요소망을 생성한 후의 모습으로 총 3702개 요소(삼각형 2488개, 사각형 1214개)로 구성되어 있다. Fig. 9(d)는 Fig.9(c)의 요소망의 모든 요소를 삼각형 요소로 변환한 모습으로 4916개의 삼각형 요소로 구성되어 있으며, Fig. 9(e)는 Fig. 9(b)의 요소망을 사각형 요소로 변환한 모습으로 12320개의 사각형 요소로 구성되어 있다. Fig. 10은 핸드폰 모델에 적용한 것으로서 Fig. 10(a)는 13958개의 표면요소망으로 구성된 입력 모델이며, Fig. 10(b)는 쉘 요소망 생성후에 삼각형 요소로 변환한 결과로 25789개의 삼각형 요소가 생성되었다.



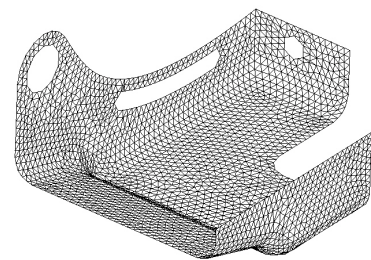
a) Triangulated surface model (2778 input triangular elements)



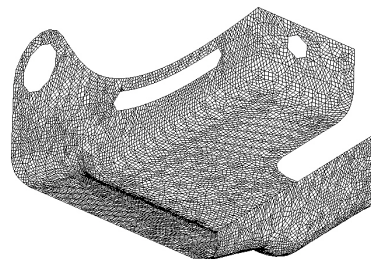
b) Constructed tetrahedral mesh (3702 tetrahedral elements)



c) Constructed shell mesh on midsurfaces with 3702 elements (2488 triangular elements, 1214 quadrilateral elements)



d) Mesh with all triangular elements (4916 triangular elements)



e) Mesh with all quadrilateral elements (12320 quadrilateral elements)

Fig. 9 A bracket model with holes



a) Triangulated surface model  
(13958 input triangular elements)



b) Constructed shell mesh on midsurfaces  
with 25789 triangular elements

**Fig. 10** A cellular phone model

#### 4. 결 론

본 연구에서는 얇은 두께를 가진 부품의 CAD 모델이나 표면의 삼각형 요소망을 입력하여 부품의 중립면에서의 셸 요소망을 자동으로 생성하는 방법을 제안하고 이를 구현하였다. 이는 다음과 같이 요약될 수 있다.

1. 기존의 3 차원 모델을 곡면 모델로 변경하여 다시 요소망을 생성하는 방법에서 곡면 모델로 변경하는 과정을 생략하고, 3 차원 모델에서 바로 셸 요소망을 생성할 수 있었다.

2. 입력된 모델의 면을 삼각형 요소를 이용하여 다시 분류하여 자동으로 모델의 윗면과 아랫면을 결정할 수 있어 예전 방법의 번거로움을 줄이고 모델의 형상과 크기를 잘 나타내고 있는 셸 요소망 생성이 가능하도록 하였다.

3. 새로운 패킹 루프 오퍼레이터를 개발하여 사면체 요소 생성이 실패하는 경우에도 셸 요소망 생성이 가능하도록 하였다.

#### 후 기

본 연구는 과학기술부 공학용 해석 소프트웨어

기술 개발 사업의 연구비 지원에 의해 수행된 것입니다.

#### 참고문헌

- (1) Blum H., 1967, "A Transformation for Extracting new Descriptors of Shape," *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, MIT Press, Cambridge, MA, pp. 362-381.
- (2) Ang P. Y., Armstrong C. G., 2001, "Adaptive curvature-sensitive meshing of the medial axis," *10th International Meshing Roundtable*.
- (3) Prasad L., 1997, "Morphological Analysis of Shape," in <http://cnls.lanl.gov/Highlights/1997-07/>, Los Alamos National Laboratory.
- (4) Quadros W. R., Shimada K., 2002, "Hex-Layer : Layered All-Hex Mesh Generation on Thin Section Solids Via Chordal Surface Transformation," *11th International Meshing Roundtable*.
- (5) Chae S. W., Kwon K. Y., 2001, "Quadrilateral Mesh Generation on Trimmed NURBS Surface," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 4, pp. 592-601.
- (6) Chae S. W., Park J. M., 2003, "Automatic Mesh Generation on Poorly Parameterized NURBS Surfaces," *J. KSPE*, Vol. 20, No. 6, pp. 189-196.
- (7) Chae S. W., Lee G. M., 1999, "Volume Triangulation from Planar Cross Sections," *J. Computers & Structures*, Vol. 72, pp. 93-108.
- (8) Kim Y. W., Kwon G. W., Chae S. W., Shim J. K., 2002, "Unstructured Tetrahedral Meshing by an Edge-Based Advancing Front Method," *KSME International Journal*, Vol. 16, No. 2, pp. 211-218.
- (9) Kwon G. H., Chae S. W., Lee K. J., 2003, "Automatic Generation of Tetrahedral Meshes from Medical Images," *J. Computers & Structures*, Vol. 81, issues 8-11, pp. 765-775.
- (10) 1999, "OpenGL Programming Guide, Third Edition," Addison-Wesley.
- (11) Reed K., Harrod D., Conry W., 1996, "The Initial Graphics Exchange Specification (IGES) Version 5.3," *NIST Report*, USA.