

유한요소 교호법을 이용한 무한 물체에 존재하는 임의 형상의 삼차원 균열 해석

김태순[†] · 박재학 · 박치용*

Analysis of Arbitrarily Shaped Three Dimensional Cracks in an Infinite Body Using the FEAM

Tae-soon Kim, Jai-hak Park and Chi-yong Park

Key Words: Finite Element Alternating Method(유한요소 교호법), Infinite Body(무한 물체), Three Dimensional Crack(삼차원 균열)

Abstract

Many analysis methods, including finite element method, have been suggested and used for assessing the integrity of cracked structures. In the paper, in order to analyze arbitrarily shaped three dimensional cracks in an infinite body, the finite element alternating method is extended. The cracks are modeled as a distribution of displacement discontinuities by the displacement discontinuity method and the symmetric Galerkin boundary element method. Applied the proposed method to several example problems for planner cracks in finite bodies, the accuracy and efficiency of the method were demonstrated.

1. 서 론

산업설비나 구조물에서 발견되는 균열의 많은 경우는 삼차원 균열이므로 균열을 묘사하고 해석을 수행하는 데에 많은 어려움과 특유의 복잡성이 수반된다. 이러한 점을 극복하기 위한 시도로서, 이차원 균열을 균열전위의 연속된 분포로 나타냄으로써 균열문제를 편리하게 해석할 수 있었던 것과 같이 삼차원 균열에 대해서도 이와 유사한 방법을 적용하려는 시도가 일찍부터 있어 왔다.^(1~3)

특히 Wiles와 Curran⁽⁴⁾은 변위의 불연속을 이용하여 공동(cavity)과 균열문제를 해석하였다. 그들

은 공동과 균열을 몇 개의 표면요소(surface element)로 나누고 각 표면요소에서는 균일한 변위의 불연속을 갖는다고 가정하여 해석하였고, Murakami 등⁽⁵⁾은 체적력법(body force method)를 사용하여 임의 형태의 표면균열들을 해석하였다.

이러한 해석에 있어서 어려운 점은 적분방정식의 커널에서 나타나는 특이성이다. Keat 등⁽⁶⁾은 이러한 특이성을 제거할 수 있는 적분 방법을 제안하였고, Li와 Mear 등^(7,8)은 변위의 불연속에 대한 감소된 특이성을 갖는 대칭형의 적분방정식을 제시하고 여러 형태의 삼차원 균열에 대하여 정확한 응력강도계수를 얻을 수 있다고 하였다. 이와 아울러 Nishioka와 Atluri⁽⁹⁾는 유한요소 교호법(finite element alternating method, FEAM)을 이용하여 타원형의 표면균열 또는 모서리 균열 등의 다양한 형상을 갖는 삼차원 균열의 해석방법을 제안하였으며, Nikishkov 등⁽¹⁰⁾은 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하여 원형과 타원형의 평면 및 비평면 삼차원 균열의 성장을 해석하였다.

[†] 충북대학교 공과대학 안전공학과

TEL : (043)264-2460 FAX : (043)264-2460

E-Mail : tskim1119@naver.com

* 한국전력공사 전력연구원 원자력연구실

유한요소 교호법은 유한요소모델에 균열을 포함시킬 필요가 없으므로 모델링이 간단하면서도 균열선단 근처에서 정확한 응력 또는 변위장을 구할 수 있는 장점이 있다. 또한 이러한 장점으로 인해 피로균열 성장을 시뮬레이션 할 경우에도 균열성장에 따른 유한요소격자의 재구성이 필요하지 않게 되어 보다 쉽게 해석을 수행할 수 있다. 본 연구에서는 이러한 유한요소법의 장점과 이론해석의 장점을 조합한 유한요소 교호법을 이용하여 무한 물체 내에 존재하는 임의의 형상을 갖는 삼차원 균열 문제와 피로에 의한 삼차원 균열의 성장을 예측하였다.

2. 유한요소 교호법의 이론해

2.1 변위의 불연속법

무한 물체 내에 임의의 형태의 삼차원 균열이 존재한다고 하고 균열면 상에는 임의의 트래క్ష션이 작용하는 경우 균열면에는 트래క్ష션에 의하여 변위의 불연속이 발생하게 된다. 이러한 변위의 불연속에 의하여 발생하는 응력과 변위는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} G_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_k(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (1)$$

$$u_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} F_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2)$$

또한 식 (1)로부터 균열면 상에 작용되는 트래క్ష션과 변위의 불연속과의 관계를 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$t_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3)$$

따라서 배열점 \mathbf{x} 에 대하여 주어진 트래క్ష션을 만족하는 변위의 불연속을 구하면 문제의 해를 구하는 것이 된다.

식 (3)의 적분을 위하여 Fig. 1과 같이 균열면을 N 개의 요소로 나누고 각각의 균열요소를 $S_c^1, S_c^2, \dots, S_c^N$ 으로 나타내기로 하자. 식 (3)의 적분을 각 균열요소에 대하여 행함에 있어서 \mathbf{x} 와 $\boldsymbol{\xi}$ 가 동일한 요소 내에 존재하지 않는 경우는

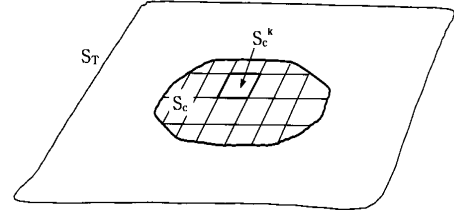


Fig. 1 A crack face in an infinite plane.

커널은 특이성을 갖지 않으므로 적분에 어려움이 없다.

따라서 일반적인 Gaussian형태의 적분공식을 사용함으로써 적분값을 구할 수 있다. 그러나 \mathbf{x} 와 $\boldsymbol{\xi}$ 가 동일한 요소 내에 존재하는 경우는 커널은 $1/R^3$ 형태의 특이성을 가지므로 적분을 행하기가 쉽지 않다.

이러한 어려움을 극복하기 위하여 Keat 등⁽⁶⁾은 다음과 같은 방법을 제시하였다. 균열을 포함하는 어떤 무한 평면 S_T 를 고려한다. 본 문제의 경우 $x_3=0$ 면을 S_T 로 취할 수 있을 것이다.

만약 S_T 면 전체에 걸쳐서 일정한 값 D_j^0 ($j=1, 2, 3$)의 변위의 불연속을 가정한다면 이는 단순히 S_T 면에 의하여 구분되는 두 반무한체를 D_j^0 만큼 강체이동 시킨 결과가 될 것이고, 강체이동이므로 이에 의해서는 균열면을 포함하는 두 반 무한체의 어느 곳에서도 응력이 발생되지 않을 것이다. 따라서 이러한 원리에 의해 특이성이 높은 항을 제거하는 과정을 거치면 배열점 (collocation point) \mathbf{x} 가 임의의 균열요소 S_c^k 내에 있다고 할 때, 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$t_i(\mathbf{x}) = \int \int_{S_c^k} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) [D_j(\boldsymbol{\xi}) - D_j(\mathbf{x})] d\xi_1 d\xi_2 + \int \int_{S_c - S_c^k} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) D_j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 - D_j(\mathbf{x}) \int \int_{S_T - S_c^k} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (4)$$

이때의 각 균열요소 내에서의 국부좌표를 (ξ, η) 라고 하면 변위의 불연속은 다음과 같이 적절한 형상함수(shape function)로 나타낼 수 있

다. 그러면 요소 내에서의 변위의 불연속은 다음과 같이 표현된다:

$$D_j(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{D}_j^0 \quad (5)$$

여기서 ξ 와 η 는 요소 내에서 각각 -1에서 1까지의 값을 가진다.

식 (4)의 적분방정식을 풀기 위해, 이론적인 방법 또는 수치적인 방법을 사용하여 각각의 항을 정확하게 적분해야 한다. 그런데 배열점 x 가 균열요소 내에 존재한다고 하면 모드 I에서는 커널 G_{ij} 가 $1/R^3$ 의 특이성을 가지게 되어 다음과 같은 함수들을 적분해야 한다.

$$\frac{x}{R^3}, \quad \frac{y}{R^3}, \quad \frac{x^2}{R^3}, \quad \frac{xy}{R^3}, \quad \frac{y^2}{R^3}$$

다음으로, 식 (4)의 우변 두 번째 항의 적분은 무한평판 $S_T - S_c^k$ 에 대한 적분이므로 적분에 어려움이 수반되는 면적적분 대신 선적분을 행함으로써 간단히 적분을 행할 수 있다.

다음으로 응력강도계수의 계산을 위해, 편의상 $\xi = -1$ 에 해당되는 변이 균열선단이 되는 임의의 균열요소를 고려하자. 그리고 $\xi = -1$ 에 해당하는 변상의 임의의 한 점을 A점이라 하면, A점 근처에서의 미소변위 dr 은,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta} d\eta \quad (6)$$

또한,

$$dr = J_\xi d\xi \quad \text{or} \quad r_1 = J_\xi \xi_1 \quad (7)$$

여기에서 $\xi = -1 + \xi_1$ 이고, $r = r_1$ 이다. ξ_1 과 r_1 은 A점 근처에서만 적용될 수 있는 좌표이고, 이때의 변위의 불연속 D_3 은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$D_3(\xi_1, \eta_A) = \frac{\sqrt{\xi_1}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1-\eta_A}{2} D_{31}^0 + \frac{1+\eta_A}{2} D_{34}^0 \right] \quad (8)$$

$$D_3(\xi_1, \eta_A) = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{2}\sqrt{J_\xi}} \left[\frac{1-\eta_A}{2} D_{31}^0 + \frac{1+\eta_A}{2} D_{34}^0 \right] \quad (9)$$

평면변형조건에서 2차원 균열의 변위 $2v$ 는,

$$2v = 8(1-\nu^2) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (10)$$

이고, 식 (9)와 식 (10)을 비교하면 응력강도계수는 다음 식과 같이 된다.

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi E}}{8(1-\nu^2)\sqrt{J_\xi}} \left[\frac{1-\eta_A}{2} D_{31}^0 + \frac{1+\eta_A}{2} D_{34}^0 \right] \quad (11)$$

2.2 대칭 Galerkin 경계요소법

무한 물체 내에 임의 형태의 삼차원 균열이 존재하고 균열면 상에는 임의의 표면력(traction)이 작용한다고 하면, 이때 균열은 변위의 불연속의 연속된 분포로 나타낼 수 있다.

Li와 Mear 등^(7,8)은 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weakly singular)을 가진 경계적분 방정식(boundary integral equation)이 만족됨을 보였다.

$$-\int_S \int_S D_{\alpha} u_i^*(z) C_{\alpha i \beta j}(\xi-z) D_{\beta} u_j(\xi) dS(\xi) dS(z) = \int_S u_k^*(z) t_k dS(z) \quad (12)$$

여기서 u_i 는 균열면에서의 변위 불연속의 성분, u_i^* 는 시험함수(test function)의 성분, t_k 는 균열면 S 에 작용되는 표면력 성분이다. 또한,

$$C_{\alpha i \beta j}(\xi) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-\nu)\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + 2\nu\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha} - \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{\xi_i\xi_j}{r^2}\delta_{\alpha\beta} \right] \quad (13)$$

이다. 여기서 $\zeta = \xi - z$, $r^2(\zeta) = \zeta_i \zeta_i$, μ 는 전단탄성계수, ν 는 푸아송비이고, D_α 는 접선 연산자(tangential operator)로 다음과 같이 정의된다.

$$D_\alpha = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta_2} - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta_1} \right) \quad (14)$$

여기서 η_1, η_2 는 균열면 상에서의 좌표이고, $J = |s \times t|$, s 는 η_1 방향의 접선벡터, t 는 η_2 방향의 접선벡터이다.

균열면을 몇 개의 경계요소로 나누고 요소 내에서의 변위 및 표면력은 다음 식과 같이 절점들에서의 값과 형상함수로 나타낼 수 있다고 한다.

$$u_i = N_\alpha u_{i\alpha}, \quad f_i = N_\alpha f_{i\alpha}. \quad (15)$$

여기서 $u_{i\alpha}$ 와 $f_{i\alpha}$ 는 각각 절점에서의 변위와 표면력 값이다. 시험함수로 형상함수를 사용하고 식 (15)를 이용하면 식 (12)는 다음과 같이 된다.

$$-\int_S \int_S C_{\alpha\beta\gamma} D_\alpha N_a(z) D_\beta N_b(\xi) dS(\xi) dS(z) u_{jb} = \int_S N_\alpha N_q(z) dS(z) t_{iq} \quad (16)$$

식 (16)의 해석을 통하여 각 균열 절점에서의 변위의 불연속을 구한 후 이들 값과 응력강도계수의 관계로부터 각 모드에서의 응력강도계수를 계산한다. 식 (16)은 각 균열요소에 대하여 이중 적분을 계산하여야 한다. 그런데 각각의 균열요소의 관계가 서로 동일한 요소이거나, 에지를 맞대고 있거나, 요소의 모서리를 맞대고 있는 경우는 피적분함수에 특이성이 나타나므로 적분에 어려움이 있다. 이러한 적분의 어려움은 적절한 좌표변환을 통하여 해결할 수 있다.⁽⁴⁾

3. 유한요소 교호법

무한 물체 내에 존재하는 임의 형태의 삼차원 균열에 대한 유한요소 교호법은 다음과 같은 단계로 해석이 이루어진다;

(1) 우선 주어진 문제에 대하여 균열이 포함되지 않은 FEM 모델을 만들고 주어진 외부하중을 가하여 균열 위치에서의 응력을 구한다.

(2) 다음으로 균열면에서의 표면력을 없애기 위하여 단계 (1)에서 구해진 표면력의 역이 가해지는 균열에 대한 문제를 대칭 Galerkin 경계요소법을 사용하여 해석한다.

(3) 위의 두 단계에서 구해진 응력장 또는 변위장을 더할 경우에 균열면에서의 경계조건은 만족되지만 균열면을 제외한 경계면에서의 경계조건은 만족되지 않으므로 경계면에서의 응력과 경계면 상의 각 절점에 대한 잔류하중을 계산한다.

(4) 다시 단계 (1)에서 고려하였던 FEM모델에 단계 (3)에서 구한 잔류하중의 역을 가하여 FEM 해석을 행한다.

(5) FEM해석을 통해 얻어진 응력에 대응하는 균열 위치에서의 응력을 구한다. 이때 응력의 크기가 아주 작은 경우는 반복계산을 중단하고, 그렇지 않으면 단계 (2)로 다시 간다.

(6) 각 단계에서의 응력강도계수, 변위, 응력 등을 더한 값이 해가 된다.

4. 해석결과 및 고찰

4.1 무한 물체 내에 존재하는 삼차원 균열

본 논문에서 제안한 방법의 정확성과 효율성을 검증하기 위하여 먼저 무한 물체 내에 존재하는 몇몇 형상의 삼차원 균열에 대하여 변위의 불연속을 이용한 방법과 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 유한요소 교호법을 이용하여 해석하고 기존의 해석결과와 비교하였다.

먼저, 원형 균열(penny-shaped crack)에 대한 해석을 변위의 불연속과 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하여 균열 선단에서 구한 응력강도계수를 정규화하여 Fig. 2와 3에 나타냈다. 두 방법 모두에서 구해진 응력강도계수는 균열 메쉬의 수가 증가할수록 이론해에 근접하는 것을 알 수 있다.

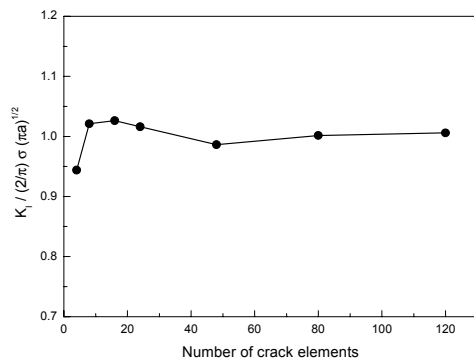


Fig. 2 Variation of SIFs according to the number of crack elements.

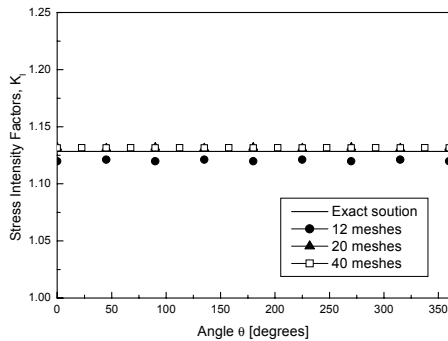


Fig. 3 SIFs for a penny-shaped crack.

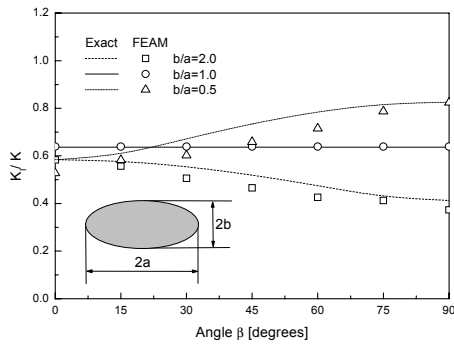


Fig. 4 SIFs for an elliptical crack.

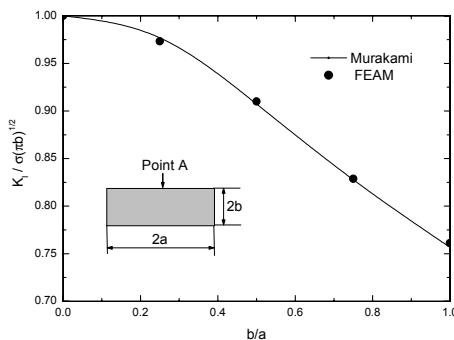


Fig. 5 SIFs for a rectangular crack in an infinite body.

다음으로 무한 물체 내에 존재하는 타원형 균열을 해석하였다. 균열은 60개의 요소들과 205개의 절점으로 이루어져 있으며, 균열의 형상은 타원형이므로 장축과 단축의 비 a/b 를 기준으로

하여 각각 0.5, 1.0, 2.0의 3가지로 하여 해석을 수행하였다. 무한 물체 내에 존재하는 타원형 균열의 해석결과는 Fig. 4에 정규화된 응력강도계수 값으로 표현하였다. 결과에서 보듯이 일부 균열 요소의 모서리가 균열선단과 수직을 이루지 못하는 구간을 제외하면, 비교를 위해 고려된 이론해와 본 해석에서 구해진 해가 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

다음으로 무한 물체 내에 존재하는 직사각형 균열을 고려하였다. 해석에서 고려된 직사각형 균열들의 요소 수는 각각 40, 56, 72, 그리고 96개로 하였으며, 타원형 균열에서와 마찬가지로 장축과 단축의 비(b/a)를 기준으로 0.25에서 1.0까지 4개의 단계로 구분하여 해석하였다.

직사각형 균열에 대한 해석결과는 Fig. 5에 나타나 있으며, Murakami와 Nemat-Nasser의 결과와 비교할 때 잘 일치하는 것을 알 수 있다.⁽¹¹⁾

4.2 삼차원 균열의 성장 해석

반복되는 단순인장하중 하에서의 삼차원 균열에 대한 피로성장을 해석하기 위해 Fig. 6과 같은 형상을 갖는 무한 물체 내에 존재하는 직사각형의 평면 균열을 고려하였다. 직사각형 균열의 장축과 단축의 비 a/b 는 2.0이고 균열모델은 56개의 사각형 요소로 이루어져 있다. 균열성장을 시뮬레이션하기 위한 균열성장식으로는 Paris 식을 사용하였다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \quad (17)$$

여기에서 da/dN 은 반복하중에 대한 균열성장률이며, 재료상수로는 폭넓은 범위의 기계구조용강(steel)에 대해 제안된 $C=3.0 \times 10^{-13}$, $n=3.0$ 을 적용하였다. da/dN 과 ΔK 의 단위는 각각 m/cycle과 $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 이다.

직사각형의 초기균열을 해석하기 위하여 우선 균열선단의 각 절점에서의 응력강도계수를 계산해야 한다. 일단 각 절점에서의 응력강도계수가 계산이 되면 그 응력강도계수에 따라 균열 성장식에 의해 구해진 da_{max} 의 값만큼 본래의 위치에서 증분에 따라 균열선단을 이동시킴으로써 성장한 균열의 형상을 결정하게 된다.

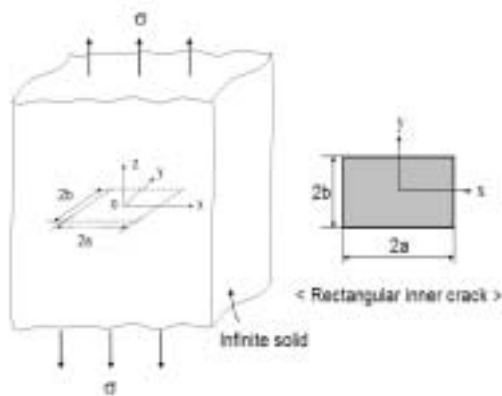


Fig. 6 Rectangular inner crack under tension in an infinite body.

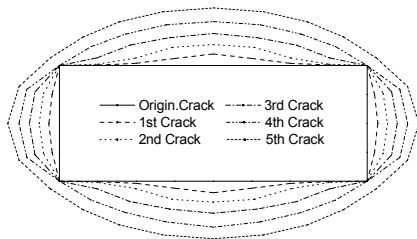


Fig. 7 Growth of a rectangular crack under cyclic loading condition.

이런 과정에 의해 초기균열로 고려된 무한 물체 내에 존재하는 직사각형 평면 균열은 반복하중에 의한 성장을 하여 형상의 변화를 가져오게 된다. 즉 균열선단에서 구해지는 응력강도계수는 각각 네 변의 중앙부에서 크게 나타나므로, 균열 성장 인자인 응력강도계수의 증분 ΔK 의 값도 증가하여 다른 부분보다 많은 성장을 한다. 결국 초기의 직사각형 균열은 Fig. 7에서와 같이 점차 타원형 균열로 성장하였다.

5. 결론

무한 물체와 유한 물체 내에 존재하는 임의의 형상을 갖는 삼차원 균열에 대한 응력강도계수를 구하기 위해 유한요소 교호법을 확장하였다. 유한요소 교호법은 고려하는 문제에 대한 이론해와 유한요소법을 번갈아 사용하므로 삼차원 균열의

해석을 간단하고 효율적으로 수행할 수 있음을 확인하였다.

무한 물체 내에 존재하는 원형, 타원형 및 직사각형 균열 문제에 대하여 해석한 결과, 균열선단에서의 응력강도계수는 균열 요소의 수나 장축과 단축의 길이비 등에 영향을 받지만 전체적으로 기존의 이론해 또는 비교해와 잘 일치하였다. 또한 무한 물체 내에 존재하는 직사각형 균열에 대한 피로 균열 성장 해석을 하였다. 반복하중에 의한 시뮬레이션 결과 직사각형 균열은 타원형 균열로 성장하였다.

참고문헌

- (1) Kassir, M. K. and Sih, G. C., Journal of Appl. Mech., Vol. 33, pp. 601~611, 1966.
- (2) Murakami, Y., Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, 1987.
- (3) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook, ASME Press, 2000.
- (4) Wiles, T. D. and Curran, J. H., 1982, Proceedings of the 4th international conference on numerical methods in geomechanics, Vol. 1, ed. Balkema, A. A., Rotterdam, The Netherlands, pp. 103~111.
- (5) Murakami, Y., 1985, Engng Frac. Mech., Vol. 22, pp. 101~114.
- (6) Forth, S. C. and Keat, W. D., 1996, Int. J. Fracture, Vol. 77, pp. 243~262.
- (7) Li, S. and Mear, M.E., 1998, Int. J. Fract., Vol. 93, pp. 87~114.
- (8) Li, S., Mear, M.E. and Xiao, L., 1998, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 151, pp. 435~459.
- (9) Nishioka, T. and Atluri, S. N., 1983, Engng Frac. Mech., Vol. 17, pp. 247~268.
- (10) G. P. Nikishkov, J. H. Park and S. N. Atluri, Computer Modeling in Engng & Sci., Vol. 2, No. 3, pp. 401~422, 2001.
- (11) Y. Murakami, Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, pp. 811~865, 1987.