

# Fay의 나비곡선의 수학적 모델링에 관한 연구

김영희\*, 김영익\*\*

\*상명대 공학기술연구소

\*\*단국대학교 응용수학과

e-mail: conpana@empal.com, yikbell@dankook.ac.kr

## On Mathematical Modeling of Fay's Butterfly Curve

Young Hee Geum, Young Ik Kim

\*Sangmyung University Research Institute for Engineering Technology

\*\*Dankook University, Applied Mathematics

### 요 약

자연의 세계에서 나뭇잎, 돌기물, 구름, 해안선, 곤충의 모습 등에 내재하고 있는 아름다움은 흔히 균형성, 대칭성, 다양성 등으로부터 비롯된다. 자연 현상은 복소수를 활용하여 극좌표 표현으로 묘사되는 경우가 많다. 본 논문에서는 1989년 Temple H. Fay가 Amer. Math. Monthly 96(5)호에서 발표한 나비곡선

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$$

의 기하학적 성질을 분석하고, 수학전문 소프트웨어인 매페타카를 활용하여 나비곡선의 작도하고자 한다.

### 1. 수학적 모델링

13세기 아퀴나스(Thomas Aquinas, 1225-1274)는 “균형이 있는 것을 볼 때, 인간은 기쁨을 느낀다.”라고 표현하였고, 인간은 균형으로부터 수학과 아름다움의 관계를 감지한다. 뽀앙까레(Henri Poincaré, 1854-1912)는 “수학자는 수학이 유용하기 때문이 아니라 수학에서 기쁨을 느끼기 때문에 연구하고, 또한 수학이 아름답기 때문에 기쁨을 느낀다.”라고 표현하였다. 수학적 아름다움과 균형은 생활 속에서 발견되는 나뭇잎, 돌기물, 구름, 해안선, 곤충 등의 모습에서 찾을 수 있으며 수학적 모델링의 동기가 된다.

고등학교 및 대학의 미적분학 과정에서 다루는 삼각함수와 극좌표, 매개함수를 취급한 수학적 모델링의 예로서 연주형(lemniscate)으로 표시되는 잠자리 날개곡선[1], 에피트로코이드(epitrochoid)로 표시

되는 사과의 단면 윤곽선[1], 심장형(cardioid)으로 표시되는 하트곡선[2] 등이 있다.

본 논문에서는 극좌표계  $(r, \theta)$ 에서 방정식

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$$

으로 표시되며 자연세계의 균형과 대칭을 조화롭게 보여주고 있는 Fay의 나비곡선[3,4,5]에 관한 수학적 모델링을 살펴 보기로 한다. Fay의 나비곡선은 몸체가  $x$ 축에 따라 놓여 있으므로, 반시계 방향으로 (또는  $xy$ 좌표축을 시계 방향으로)  $90^\circ$  회전한 곡선에 대해서 고찰하기로 한다. 곡선  $r$ 위의 임의의 점  $(x, y)$ 가 이루는 편각 [6]을  $\theta$ 라 하면  $x=r(\theta)\cos\theta$ ,  $y=r(\theta)\sin\theta$ 이고,  $xy$ 좌표축을 반시계 방향으로  $\alpha$  만큼 회전시켜 얻은 새로운  $x'y'$ 좌표축과의 회전관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & (1) \\ &= r(\theta) \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= r(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\alpha = -\pi/2$ ,  $\theta - \alpha = \phi$ ,  $\rho(\phi) = r(\phi - \pi/2)$ 라 하면  
 $x' = r(\phi - \pi/2) \cos \phi = \rho(\phi) \cos \phi$ ,  
 $y' = r(\phi - \pi/2) \sin \phi = \rho(\phi) \sin \phi$

이므로, 새로운 극좌표계 시스템  $(\rho, \phi)$  및 직교좌표계  $(x', y')$ 에서 Fay의 나비곡선은 그 몸체가  $y'$ 축 위에 놓여지게 된다. Fay의 나비곡선을 90° 회전시킨 새로운 나비곡선(2)을 생각하기로 하자.

$$r = e^{\sin \theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) \quad (2)$$

곡선(2)은 그림 1과 같이 도시할 수 있으며, 정리 2.1에서  $\theta$ 에 관한 최소주기가  $24\pi$ 임을 보여준다.

그림 1로부터 수학적 모델링을 통하여 그림 2와 같이, 나비의 기하학적 형상을 묘사할 수 있다. 즉, Fay의 나비곡선은 6개의 날개(2개의 윗 날개, 2개의 중앙 날개, 2개의 아랫 날개)와 1개의 몸체 및 1개의 꼬리 부분으로 구성되어 있으며 그림 2에 표시된 점선은 오른쪽 윗 날개축을 뜻하며, 날개축의 끝점은 원점으로부터의 거리가 극대인 위치의 점이다. 같은 방법으로 아랫 날개축, 중앙 날개축, 몸체축, 꼬리축을 지정할 수 있다. 각 축의 경사각도는 양의  $x$ 축과 이루는 각도를 뜻한다. 정리 2.1은 나비곡선의 주요한 기하학적 성질을 제시한다.

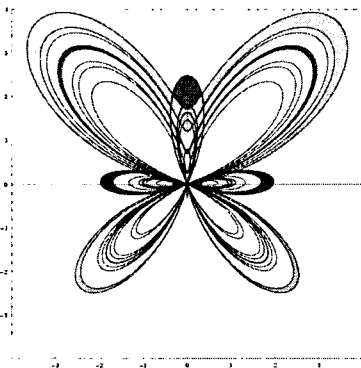


그림 1. 회전한 Fay의 나비곡선

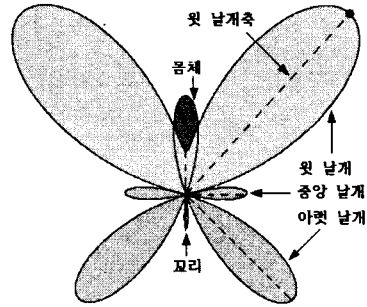


그림 2. 나비곡선의 수학적 모델링

## 2. Fay의 나비곡선이 갖는 기하학적 성질

### 정리 2.1 회전한 Fay의 나비곡선

$$r = e^{\sin \theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right)$$

에 대해서 다음과 같은 성질을 갖고 있다.

- (1) 곡선  $r$ 은 극좌표계에서  $\theta$ 에 관하여 최소주기  $24\pi$ 를 가진다.
- (2) 곡선  $r$ 은  $y$ -축에 관하여 대칭이다.
- (3) 각 날개와 몸체는 12 개의 줄무늬선을 갖고 있다.
- (4) 날개(왼쪽 및 오른쪽), 몸체 및 꼬리의 내부 면적과 둘레 길이는 각각 다음과 같다.

	내부면적	둘레 길이
윗 날개	17.6556486536818455977814897247	20.350995078112749759082545480
중앙 날개	1.49378580174006158191227533375	8.437840982101135331835530697
아랫 날개	6.26059545764439485601186697275	15.208037991973768260024126863
몸체	1.361526033688288062742282655	5.385165638945649670751116396
꼬리	0.0059032369224291312980983936923	0.5719306405284223135316518012

- (5) 오른쪽 날개축, 몸체축, 꼬리축의 경사각과 끝점의 위치 및 축의 길이는 각각 다음과 같다.

	경사각 (°)	끝점 위치	축의 길이
오른쪽 윗 날개축	47.58	(3.4063582494, 3.7286754875)	5.05037596766762030600041665311
오른쪽 중앙 날개축	1.64	(1.9707383088, 0.05666542068)	1.9715528021753887949923868699
오른쪽 아랫 날개축	315.77	(2.4388754449, -2.3739281122)	3.40347588767494427919602648058
몸체축	90	(0, 2.472971259698929006645)	2.47297125969892900664513577018
꼬리축	270	(0, -0.28171817154095476463)	0.28171817154095476463971252864

- (6) 가장 바깥쪽 줄무늬선이 갖는 극소값은  $\theta = 6.5\pi$ 에서 가지며 그 값은  $e-1$ 이다.

(증명) (1)  $\sin^5\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) = \frac{5}{8} \sin\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) - \frac{5}{16} \sin\left(\frac{3(\theta - \pi/2)}{12}\right) + \frac{5}{16} \sin\left(\frac{5(\theta - \pi/2)}{12}\right)$ ,

$\sin \theta, \cos 4\theta$  로부터 주기

$$T_1 = \frac{2k_1\pi}{1/12} = 24k_1\pi, T_2 = \frac{2k_2\pi}{3/12} = 8k_2\pi.$$

$T_3 = \frac{2k_3\pi}{5/12} = \frac{24}{5}k_3\pi, T_4 = 2k_4\pi, T_5 = 2k_5\pi/4$  를 생각하자.

$T = 24k_1\pi = 8k_2\pi = (24/5)k_3\pi = 2k_4\pi = (1/2)k_5\pi$  라 하면 최소 공통주기  $T$ 는 최소의 자연수쌍  $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ 을 선택함으로써 결정된다.

$k_1 = (1/3)k_2 = (1/5)k_3 = (1/12)k_4 = (1/48)k_5$  이므로,  $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5, k_4 = 12, k_5 = 48$ 을 택하여  $T$ 는  $24\pi$  이다.

(2)  $0 \leq (2k+1)\pi - \theta \leq 24\pi$  에 속하는

$r(\theta) = r((2k+1)\pi - \theta)$ 인  $k$ 의 존재를 보이면 된다.

$$e^{\sin((2k+1)\pi - \theta)} = e^{\sin(\pi - \theta)} = e^{\sin \theta},$$

$$2\cos 4((2k+1)\pi - \theta) = 2\cos 4\theta,$$

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi - \theta - \pi/2}{12}\right) = \sin\left(\frac{2k\pi + \pi/2 - \theta}{12}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi/2 - \theta}{12}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi/2 - \theta}{12}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\theta - \pi/2}{12}\right) \text{ for } k=6.$$

그러므로  $r(\theta) = r(13\pi - \theta)$ 를 만족하고 나비곡선은  $y$ 축에 대해 대칭이다.

(3)-(6)의 증명은 극좌표 도형의 이론과 그래프에 관한 미적분학 기본이론으로부터 밝힐 수 있다.

### 3. 나비곡선의 작도 프로그램, 결과 분석 및 토론

#### 3.1 나비곡선 작도를 위한 매스매티카 프로그램 코드

다음은 극좌표계에서 Fay의 나비곡선을 작도하는 매스매티카 [7](버전 4.0) 프로그램 코드이다.

```
(* Fay's Butterfly Curve: Mathematica 4.0 Codes *)
<<Graphics`Graphics`; (*그래픽팩키지 호출*)
r = Exp[Sin[θ]] - 2 Cos[4 θ] + Sin[(θ-Pi/2)/12]^5;
x = r*Cos[θ]; y = r*Sin[θ];
PolarPlot[x, {θ, 0, 24Pi}, Axes->True,
PlotRange->{{-4, 4}, {-4, 4}}, Frame->True,
PlotPoints->16400, AspectRatio->Automatic];
```

#### 3.2 결과 분석 및 토론

17세기 갈릴레오(Galileo Galilei, 1564-1642)는 “우주는 인간의 응시(凝視)에 끊임없이 열려있지만, 우주가 쓰여진 언어와 문자를 인간이 먼저 이해하지 않고는 우주물 결코 이해할 수 없다. 우주는 수학이라는 언어로 쓰여져 있으며, 그 문자는 삼각형, 원 및 기타 도형으로서 이것 없이는 우주언어의 한마디조차도 인간이 이해하는 것은 불가능하다. 이 언어와 문

자가 없다면 인간은 어두운 미로에서 방황할 뿐이다.”라고 표현하였다.

본 논문에서는 우주의 언어인 수학과 우주의 문자인 도형을 활용하여 자연 속에서 발견되는 나비모양을 수학적으로 모델링함으로써, 신비로운 자연의 세계를 탐구하였다. 수학적 모델링의 효율적 분석을 위하여, 수학전문 소프트웨어인 매스매티카의 정밀계산 및 고화질 그래프 처리 기능을 활용하였다. Fay의 나비곡선  $r(\theta)$ 의 작도는 최소주기 범위  $(0 \leq \theta \leq 24\pi)$ 내에서 매스매티카의 *PolarPlot* 명령어를 활용하여 그림 1에서 보는 바와 같이 효율적으로 작도하였다. 정리 2.1에 기술된 나비곡선의 기하학적 성질의 증명에 사용된 수치해석적 결과는 매스매티카의 *FindRoot* (방정식의 근) 명령어 및 *NIntegrate* (수치적분) 명령어에 의해 수행되었다. 기본계산은 48자리의 유효숫자를 사용하였고, 계산결과와 정밀도를 대략 28자리 이상으로 유지하기 위해 *AccuracyGoal* → 28, *WorkingPrecision* → 48 과 같은 선택사항을 두 명령어에 공통으로 적용하였다. Fay가 곡선의 방정식  $r = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta$ 에 시각적 효과를 높이기 위해 첨가한 항  $\sin^5(\theta/12)$ 이 나비 날개의 대칭성을 유지하고, 동시에 줄무늬를 갖게 하는 것은 자연세계에 내재하고 있는 법칙과 규칙을 수학적 모델링으로 기술할 수 있음을 보여주는 전형적인 예임을 강조하고 싶다.

본 연구에서 Fay가 발견한 나비곡선의 대칭성을 이론적으로 밝히고, 또한 날개의 둘레 길이, 경사가 등 기하학적 성질을 매스매티카를 활용하여 수치적으로 정밀하게 밝힌 것은 유사 분야의 문제 해결에 과급 효과가 클 것으로 예측된다.

### 참고문헌

- [1] 구광조 · 박한식 · 이강섭 · 이동수 · 정지호 · 황선욱(1996). *공통수학*, 서울: (주)지학사.
- [2] 대한수학교재편찬위원회(1990). *미적분학*, 서울: 단국대학교 출판부.
- [3] Bourke, Paul. (2003). *Butterfly Curve*, <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/curve/butterfly>
- [4] Fay, Temple H. (1989). The Butterfly Curve, *Amer. Mathematical Monthly* 96(5), pp.442-443.
- [5] Fay, Temple H. (1997). A Study in Step Size, *Mathematics Magazine* 70(2), pp.116-117.
- [6] Longley; Smith & Wilson. (1960). *Analytic Geometry and Calculus*, Ginn and Company.
- [7] Wolfram, Stephen. (1999). *The Mathematica Book*, 4th ed., Cambridge University Press.