

# MPSK에 대한 일반화된 비트 오류 확률의 새로운 표현

이재윤, 윤동원, 최경원, 박상규  
한양대학교 전자전기컴퓨터공학부

alfkamd@ihanyang.ac.kr, dwyoon@hanyang.ac.kr, goodkay@ihanyang.ac.kr,  
skpark@hanyang.ac.kr

## A New Expression for the Generalized Bit Error Probability of MPSK

Jaeyoon Lee, Dongweon Yoon, Kyung Won Choi, Sang Kyu Park  
Div. of Electrical & Computer Eng., Hanyang University

### 요 약

본 논문에서는 2차원 결합 가우시안 Q-함수(Two-dimensional Joint Gaussian Q-function)를 이용하여 AWGN(Additive White Gaussian Noise) 채널 상에서 단일 적분 형태가 아닌 수치적분이 필요 없는 closed-form 형태의 일반화된 비트 오류 확률(Bit Error probability) 표현을 유도한다. 새롭게 유도된 표현은 기존의 일차원 가우시안 Q-함수와 2차원 결합 가우시안 Q-함수의 합으로 나타내어지고, 각 비트에 대한 오류 확률 성능의 분석을 간단하게 제공할 수 있기 때문에, MPSK를 적용하는 많은 시스템의 성능 분석 시 정확한 이론적 성능 기준을 제공할 것으로 기대된다.

### I. 서론

심볼 오류 확률(Symbol Error probability)과 비트 오류 확률은 M진 디지털 통신 시스템의 가장 기본적인 성능 측정 도구로 널리 사용되어 왔다. 그러나 AWGN 채널 상에서 I축과 Q축을 사용하는 2차원 변조 기법 중 몇몇 방식(MPSK, circular QAM)들의 심볼 오류 확률과 비트 오류 확률에 대한 closed-form 표현은 아직까지 도출되지 않고 있다. QAM에 대해서는 지난 2002년, 임의의 직사각 M-QAM 신호에 대하여 M에 대한 일반적이고 정확한 비트 오류 확률의 closed-form 표현이 유도되어 발표되었고[1], 이는 QAM을 적용하는 많은 시스템의 성능 분석 시, 정확한 이론적 성능 기준을 제공하고 있다. MPSK에 대하여도 그동안 많은 연구가 수행되었는데, 1982년 Pawula는 가우시안 잡음으로 인하여 변동되는 두 신호 벡터 사이의 위상각의 분포를 Pawula F 함수로써 나타내어 심볼 오류 확률 분석을 간편하게 하였고[2], 그 후 MPSK의 심볼 오류 확률에 대한 일반적인 표현이 간단한 적분형태로 소개되었으며, 특히, Craig는 무한 적분형태를 제공하였다[3]. Simon은 Craig의 결과를 더욱 발전시켰으며[4], I축과 Q축이 90도가 안될 경우의 오류 확률 표현도 일반적 표현으로 나타내었다[5]. MPSK의 비트 오류 확률에 대해서도 많은 연구가 수행되었는데, 특히, Lassing는 uniform한 MPSK의 정확한 비트 오류 확률을[6], Alouini가 non-uniform한 MPSK의 정확한 비트 오류 확률을 유도하여 나타내었다[7]. 이러한 비트 오류 확률 표현의 문제점은 수치적분이 필요하거나, 각 비트별의 오류 확률을 제공하지 못한다는 것이다. 그러나 최근에 두 축 간의 상관관계를 직접

정량적으로 해석하여 한 신호 점에서의 오류 확률 분석을 2차원 결합 가우시안 Q-함수의 표현으로 간편히 할 수 있는 방안이 도출되었고[8], 이는 단일 적분 형태가 아닌 수치적분이 필요 없는 식으로 표현된다.

본 논문에서는 2차원 결합 가우시안 Q-함수를 이용하여 기존 비트 오류 확률 표현의 문제점인 수치적분과 각 비트별 오류 확률을 제공할 수 있는 새로운 오류 확률 식을 유도한다. 또한 유도한 식의 결과가 기존의 잘 알려진 비트 오류 확률 식으로 돌아가는지 검증하여, PSK를 적용하는 많은 시스템의 성능 분석 시 좀 더 간단하게 정확한 이론적 성능 기준을 제공할 수 있는지 살펴본다.

### II. 결정 변수가 어느 특정 영역에 분포할 확률의 새로운 표현

본 논문에서는 해석을 간단히 하기 위하여 모든 심볼들의 사전 확률이 같고, 이상적인 반송파 복원과 심볼 동기를 갖는 동기 MPSK 시스템을 고려한다. 이 경우 동상(In-phase) 축과 직교(Quadrature) 축 상에 수신된 신호 벡터는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= S_I + n_I \\ Q &= S_Q + n_Q \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $n_I$  와  $n_Q$ 는 각각 I, Q 축에 대하여  $E[n_I] = E[n_Q] = 0$ 이고,  $\sigma_{n_I}^2 = \sigma_{n_Q}^2 = \sigma^2$ 인 서로 독립인 가우시안 잡음이고, 해석을 간단하게 하기 위하여 전송신