

두 개의 이상원인을 고려한 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적-통계적 설계

이호중 · 임태진

승실대학교 산업·정보시스템공학과

Abstract

This research investigates economic-statistical characteristics of variable sampling size & interval(VSSI) \bar{X} charts under two assignable causes. We propose the procedure for designing VSSI \bar{X} charts, based on Lorenzen and Vance model. Computational experiments show that the VSSI \bar{X} chart is superior to the Shewhart \bar{X} chart in the economic-statistical sense, even under two assignable causes.

1. 서론

\bar{X} 관리도는 공정의 평균을 감시하기 위해 널리 사용되는 통계적 공정관리 도구로서, 관리도를 사용하기 위해서는 표본크기, 샘플링 간격, 관리한계선 등을 필요로 한다. 이러한 세 가지의 모수를 결정하는 일련의 활동을 관리도의 설계라 한다. 통상적으로 관리도는 통계적인 기준에 의해 설계되는데, 관리상태 하에서의 평균 런 길이(ARL: Average Run Length)와 이상신호를 발생하기까지의 평균시간(ATS: Average Time to Signal)을 통계적 기준으로 사용한다. 런의 길이란 이상신호가 발생할 때까지의 필요한 샘플링 회수를 말하는 것으로서, ARL은 런 길이의 기대값을 의미하고 ATS는 이상원인이 발생한 시점으로부터 이상신호 발생시점까지의 평균시간을 나타낸다.

이와 같이 통계적으로 설계된 관리도는 바람직한 통계적 속성을 만족하지만 운영비용이 매우 높아진다는 단점을 가지고 있다. 이에 Duncan(1956)은 총 운영비용을 낮추기 위하여 관리도의 설계에 경제적인 기준을 고려하였고 그 이후로 지금까지 많은 연구가 행해져 왔다. 일반적인 경제적 접근방법은 공정을 감시하고 관리하는 것과 관련된 모든 비용요소를 고려하여 비용함수를 개발하고, 이 비용함수를 최소화하는 설계모수들을 선택하는 것으로서 이러한 방법을 가리켜 관리도의 경제적 설계라 한다.

그러나, Woodall(1986)은 이러한 경제적 모형에서는 최소의 운영비용이 소요되도록 관리도를 설계할 수는 있지만 통계적인 속성이 무시되어 오경보의 증가와 같은 문제점들이 생겨날 수 있다고 지적하였고, 불필요한 공정의 지나친 조정 때문에 품질특성치의 분산이 증가할 수 있다고 주장하였다.

Prabhu et al.(1997)은 이러한 문제점을 해결하기 위하여 관리상태와 이상상태에서의 ATS에 제약을 추가하고, 추가된 제약에 의해 필요한 통계적 속성을 만족하면서 비용함수를 최소화할 수 접근방법을 사용하였다. 물론 순수한 경제적 설계와 비교해 봤을 때 새로운 제약의 추가로 더 많은 비용이 소요될 수 있으나 이 손실은 오경보의 감소와 공정평균의 이동을 빨리 감지할 수 있다는 이익에 비하면 충분히 작다고 할 수 있다.

관리도의 전통적인 샘플링 방법은 공정으로부터 일정한 크기의 표본을 일정한 간격으로(FSSI: Fixed Sample Size and Sampling Interval) 취하는 것이다. Shewhart \bar{X} 관리도는 FSSI 방법을 취하며 상대적으로 큰 공정의 이동을 감지하는데 우수한 성능을 제공한다. 하지만 관리도로 공정을 감시할 때 표본의 통계량이 관리상태에서 관리한계선 가까이 타점된다면 다음의 점들은 관리한계선 밖으로 나갈 가능성이 크기 때문에 통계량의 위치에 따라 가변적인 표본 크기나 샘플링 간격을 사용하여 전형적인 관리도의 성능을 향상시킬 수 있다. VSSI (Variable Sample Size and Sampling Interval) 관리도는 표본 크기와 샘플링 구간을 동시에 변화시킴으로서 고정된 표본 크기와 샘플링 구간을 사용하는 일반적인 관리도에 비해 더 우수한 성능을 갖도록 한 것이다.

단일 이상원인이 존재하는 경우에 VSSI \bar{X} 관리도를 적용하면 FSSI \bar{X} 관리도에 비해 운영비용과 오경보 발생률 측면에서 유리하다는 사실은 이미 밝혀진 바 있다[Prabhu et al.(1997)]. 그러나 현실적으로 공정의 이상원인은 여러 가지가 존재하고 최근에는 공정의 완전 자동화에 의해 이상원인을 크게 기계에 의한 이상원인과 재료에 의한 이상원인과 같이 몇 가지로 나누어서 관리를 한다[심성보 등 (2000)]. 따라서, 본 연구에서는 공정에 두 종류의 이상원인이 존재하는 경우에 대하여 Lorenzen & Vance(1986) 모형에 기초한 VSSI 관리도의 경제적-통계적 설계 절차를 제안한다. 또한 수치예제를 통하여 두 개의 이상원인이 존재하는 경우에도 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적-통계적 특성이 \bar{X} 관리도에 비해 우수함을 보인다. 단, 실제 현장에 적용하기 용이한 관리도를 설계하기 위하여 두 종류의 표본크기와 샘플링 구간만을 고려한다.

2절에서는 VSSI 관리도와 관련된 기존 연구 내용을 소개하고, 3절에서는 공정에 두 종류의 이상원인이 존재하는 경우에 대하여 Lorenzen &

Vance 모형에 기초한 VSSI 관리도의 경제적-통계적 설계 절차를 제안한다. 4절에서는 수치예제를 통하여 VSSI \bar{X} 관리도의 효율성을 조사하고, 5절에서는 결론 및 추후연구 방향을 제시한다.

2. VSSI 관리도의 개념

본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

$\Phi(\cdot)$	표준정규누적분포함수
\bar{X}_i	i 번째 표본군의 표본평균
Z_i	i 번째 표본군의 표준화된 표본평균
k	표준화된 관리한계선의 폭
LCL	표준화된 표본평균의 관리하한선
UCL	표준화된 표본평균의 관리상한선
	$(LCL, UCL) = [\mu_0 \pm k]$

설계 모수(design parameters)

w	표준화된 표본평균의 임계한계선
n_0	FSSI 관리도의 고정 표본크기
n_1	VSSI 관리도의 최소 표본크기
n_2	VSSI 관리도의 최대 표본크기
h_0	FSSI 관리도의 고정 샘플링 구간
h_1	VSSI 관리도의 최소 샘플링 구간
h_2	VSSI 관리도의 최대 샘플링 구간
$I_1 = [-w, w]$	VSSI 관리도의 임계한계 내 영역
$I_2 = (LCL, -w) \cup (w, UCL)$	VSSI 관리도의 임계한계 외 영역
$I_3 = (LCL, UCL)$	관리한계 영역

비용 모수(cost parameters)

a	단위당 샘플링 고정비용
b	단위당 샘플링 가변비용
C_0	관리상태에서 불량품 생산에 의해 소요되는 기대비용
C_1	이상상태에서 불량품 생산에 의해 소요되는 기대비용
e	하나의 관측치를 샘플링하고 검사하고, 기록하는데 소요되는 평균시간
W	이상원인을 조사하고 위치를 알아내어 제거하는데 소요되는 비용
Y	오경보 당 비용

공정 모수(process parameters)

λ_1	이상원인 A1의 발생률
λ_2	이상원인 A2의 발생률
λ	이상원인의 발생률 ($\lambda_1 + \lambda_2$)
δ_1	이상원인 A1에 의한 공정평균의 표준화된 이동
δ_2	이상원인 A2에 의한 공정평균의 표준화된 이동
γ_1	지시변수 (이상원인을 조사하는 동안 공정이 멈추면 0, 아니면 1)
γ_2	지시변수 (공정을 수리하는 동안 공정이 멈추면 0, 아니면 1)

시간 모수(time parameters)

T_0	오경보를 조사하는데 소요되는 평균시간
T_1	이상원인에 대한 평균 조사시간
T_2	이상원인을 제거하는데 소요되는 평균시간

통계량(statistics)

ARL_0	관리상태에서 평균 런 길이
ARL_δ	이상원인이 발생하였을 때 평균 런 길이
ATS_0	관리상태에서 이상신호가 발생하는 평균 시간
ATS_δ	이상원인이 발생하였을 때 이상신호가 발생하기까지 평균 소요시간
P	전이확률 p_{jk} 를 원소로 갖는 전이확률 행렬
p_{jk}	공정평균이 이동되었을 때 이전 상태 j 로부터 현재 상태 k 로의 전이확률
Q	흡수상태와 관련된 원소가 사라진 전이확률 행렬
b	초기 상태의 확률 벡터
b_i	최초 관리통계량이 각 상태 i 에 있을 확률

제약(constraints)

l	ATS 제약의 하한
u	ATS 제약의 상한

표준 Shewhart \bar{X} -관리도는 고정된 h_0 시간마다 n_0 개의 표본을 추출하여 표본평균을 관리도에 타점하는 반면, VSSI 관리도는 (n_1, h_2) 와 (n_2, h_1) 을 각각 하나의 쌍으로 사용한다. 두 개의 표본크기와 샘플링 구간을 사용하는 이유는 관리도의 복잡함을 방지할 수 있고, 실제 현장에 적용하기에 용이하기 때문이다. 여기서 (n_1, h_2) 는 최소의 표본크기와 가장 긴 샘플링 구간을 나타내고, (n_2, h_1) 은 최대의 표본크기와 가장 짧은 샘플링 구간을 나타내며, 각각 $n_1 < n_0 < n_2$ 및 $h_1 < h_0 < h_2$ 을 만족하도록 선택된다. 표본평균이 임계한계선 $(-w, w)$ 사이에 타점되면 다음의 표본을 추출할 때 최소 표본크기 n_1 과 최대 샘플링 구간 h_2 를 선택하고, 임계한계선과 관리한계선 사이에 타점되면 최대 표본크기 n_2 와 최소 샘플링 구간 h_1 을 선택한다.

즉, i 번째 표본크기와 샘플링 구간을 각각 $n(i)$ 와 $h(i)$ 라고 하면 이들은 다음과 같이 결정된다[Prabhu et al. (1994)].

$$(n(i), h(i)) = \begin{cases} (n_2, h_1), & \text{if } Z_{i-1} \in I_2 \\ (n_1, h_2), & \text{if } Z_{i-1} \in I_1 \end{cases}$$

단, $Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n(i)}}$ 는 표준화된 표본평균으로서 표준정규분포를 따르며, μ_0 는 공정평균, σ 는 공정표준편차, \bar{X}_i 는 i 번째 표본평균을 나타낸다. Z_i 가 관리영역 I_3 를 벗어나면 관리도는 이상신호를 발생한다.

VSSI 관리도는 공정이 이상상태에 있을 때 큰 표본을 자주 샘플링하여 Shewhart 관리도 보다 좀더 빨리 공정의 이동을 감지할 수 있어 불량품 생산에 의해 소요되는 비용을 줄일 수 있으나, 그만큼 더 많은 샘플링 비용이 소요될 가능성도 있다.

3. 두 개의 이상원인을 고려한 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적-통계적 설계

본 연구에서 사용하는 가정은 다음과 같다.

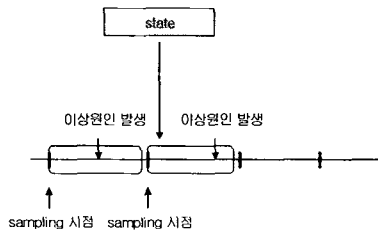
- ① 품질특성치는 정규분포를 따른다.
- ② 공정 이상원인의 종류는 두 가지를 고려한다.

- ③ 공정은 관리상태에서 시작하고, 공정의 이상원인은 공정평균을 변화시킨다.
- ④ 두 이상원인의 발생 시간은 지수분포를 따른다.
- ⑤ 두 이상원인의 발생은 독립적이다.
- ⑥ 하나의 이상원인이 발생하면 동일한 이상원인이 반복해서 발생하지는 않는다.
- ⑦ 두 이상원인이 모두 발생하면 공정평균의 이동을 증폭시킨다. 즉, $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

하나의 주기는 공정의 시작부터 이상원인이 제거될 때까지 경과된 시간으로 정의되며, 이상원인의 발생에 의해 공정의 평균은 새로운 값으로 이동하고, 공정은 이상상태가 된다. 또한, 이상원인의 제거는 공정의 끝과 새로운 공정의 시작을 나타낸다. 공정의 시작부터 이상원인이 발생하는 시점까지를 관리상태라 하고 관리상태의 끝부터 이상원인이 제거될 때까지를 이상상태라 하는데, 공정은 관리상태에서도 잘못된 신호를 발생시킬 수 있다. 이러한 오경보는 실제 이상원인인지 조사되어야 하기 때문에 추가의 비용과 시간이 소요된다.

3.1 ARL과 ATS의 계산

ATS는 마코프 체인을 이용하여 계산할 수 있으며, 관리도 상에서 통계량의 위치 상태와 이상원인의 존재 상태를 고려하여 통계량의 상태(state)를 [그림 1]과 같이 정의할 수 있다. 즉, 이전 샘플링 시점 이후로 다음 샘플링 시점 직전까지를 하나의 상태로 정의한다.



[그림 1] 통계량의 상태 정의

이상원인이 발생한 이후 이상신호가 발생하기 전의 상태를 다음과 같이 아홉 가지로 정의할 수 있다.

- 상태 1 : $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A1 존재
- 상태 2 : $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A2 존재
- 상태 3 : $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A1, A2 존재
- 상태 4 : $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A1 존재
- 상태 5 : $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A2 존재
- 상태 6 : $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A1, A2 존재
- 상태 7 : $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A1 존재
- 상태 8 : $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A2 존재
- 상태 9 : $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A1, A2 존재

상태 7, 8, 9에서는 이상신호가 발생하여 런이 마감되므로 흡수상태가 되며, 런 프로세스는 다음과 같은 전이확률 행렬을 갖는 마코프 체인을 형성한다.

$$P = ((p_{ij}))_{1 \leq i, j \leq 9} \quad (1)$$

단, p_{ij} 는 공정평균이 이동되었을 때 이전 상태 i 로

부터 현재 상태 j 로의 전이확률을 나타낸다.

ARL_δ 및 ATS_δ 를 구하기 위해서는 다음과 같이 흡수상태와 관련된 원소가 사라진 전이확률 행렬 Q 와 초기 상태의 확률 벡터 b 를 계산한다.

$$Q = ((p_{ij}))_{1 \leq i, j < 6} \quad (2)$$

$$b: b' = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \quad (3)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1 \quad (3)$$

마코프 체인의 특성에 따라 이상상태에서 이상신호를 주기까지 각 상태를 방문한 기대회수는 이상상태에서의 평균 런 길이(ARL_δ)가 되고, 각 상태에서 취하는 샘플링 구간이 $h' = (h_2, h_2, h_2, h_1, h_1, h_1)$ 이므로 h 와 평균 런 길이의 곱은 이상신호를 발생하기까지의 평균시간(ATS_δ)이 된다[Prabhu et al. (1994)].

$$ARL_\delta = b'(I - Q)^{-1}1 \quad (4)$$

$$ATS_\delta = b'(I - Q)^{-1}h \quad (5)$$

단, I 는 6×6 단위행렬이며, 1 은 6×1 단위 열 벡터를 나타낸다.

공정평균이 이동되었을 때 평균 표본 크기와 평균 표본 추출 구간은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_\delta[M] = \frac{b'Q(I-Q)^{-1}n}{b'Q(I-Q)^{-1}1} \quad (6)$$

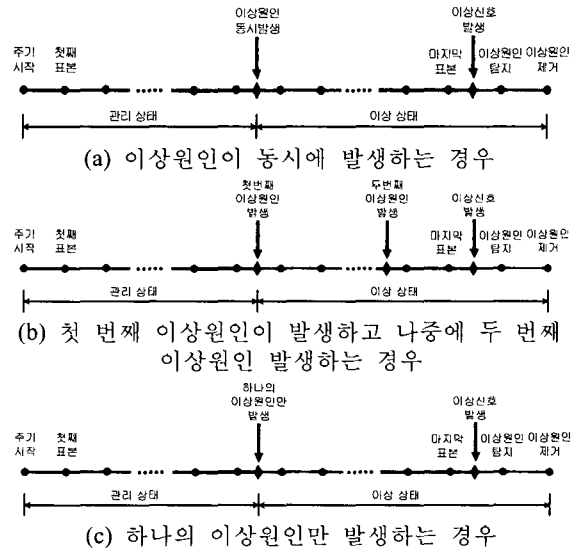
$$E_\delta[H] = \frac{b'Q(I-Q)^{-1}h}{b'Q(I-Q)^{-1}1} \quad (7)$$

여기서 n' 은 (n_1, n_2) 이다.

3.2.2 기대 주기 시간

전형적인 주기는 관리상태, 이상상태, 그리고, 조사와 수리 시간을 포함하며 전체 주기 시간은 다음과 같이 구성된다. 이것을 그림으로 나타내면 [그림 2]와 같다.

- ① 첫 번째 이상원인이 발생할 때까지의 시간
- ② 다음 표본을 샘플링할 때까지의 경과시간
- ③ 판측치를 샘플링하고 검사하고, 기록하는데 소요되는 시간
- ④ 이상신호가 발생할 때까지의 시간
- ⑤ 이상원인을 조사, 제거하고, 고장을 수리하는데 소요되는 시간



[그림 2] 두 개의 이상원인이 존재하는 공정 주기
각 이상원인이 발생하는 평균 시간이 각각 지
수분포의 평균인 $1/\lambda_1$ 과 $1/\lambda_2$ 라면 두 개의 이
상원인이 존재하는 공정에서 이상원인 발생 사이의
평균 시간은 $1/A$ ($=1/(\lambda_1+\lambda_2)$)이 되고, 공정
평균이 이동하기 전인 관리상태에서 h_1 과 h_2
를 사용하는 경우에 샘플링되는 표본의 기대회수는
각각 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{jh_1}^{(j+1)h_1} j e^{-\Lambda h_1} dh_1 = e^{-\Lambda h_1} / (1 - e^{-\Lambda h_1}) \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{jh_2}^{(j+1)h_2} j e^{-\Lambda h_2} dh_2 = e^{-\Lambda h_2} / (1 - e^{-\Lambda h_2}) \quad (9)$$

f_1 과 f_2 을 관리상태에서 각각 h_1 과
 h_2 를 사용하는 표본의 비율이라고 한다면 관리
상태에서 관측되는 표본의 기대회수는 다음과 같이
주어진다.

$$s = \frac{e^{-\Lambda h_1}}{1 - e^{-\Lambda h_1}} f_1 + \frac{e^{-\Lambda h_2}}{1 - e^{-\Lambda h_2}} f_2 \quad (10)$$

$$s = \frac{e^{-\Lambda h_1}}{1 - e^{-\Lambda h_1}} \left[\frac{\Pr(Z \in I_2)}{\Pr(Z \in I_3)} \right] + \frac{e^{-\Lambda h_2}}{1 - e^{-\Lambda h_2}} \left[\frac{\Pr(Z \in I_1)}{\Pr(Z \in I_3)} \right] \quad (11)$$

이상원인 발생의 평균시간과 오경보를 조사하
는 평균시간은 다음과 같다.

$$A_1 = (1/A) + (1 - \gamma_1) s T_0 / ARL_0 \quad (12)$$

여기서, γ_1 은 이상원인을 조사하는 동안 공
정이 멈추면 0의 값을 갖고, 그렇지 않으면 1의 값
을 갖는 지시변수이다.

VSSI 관리도에서는 표본평균의 위치에 따라
 h_1 과 h_2 를 번갈아 사용하므로 이상원인이 발
생하기 전의 마지막 샘플링 시점부터 이상원인 발
생까지의 평균 경과시간도 다음과 같이 두 가지 경
우로 나누어서 생각할 수 있다. 이상원인 발생 이
전에 샘플링된 마지막 표본에 대하여 최소 샘플링
구간 h_1 이 사용된다면 그 이후 이상원인 발생까
지의 평균 경과시간은 다음과 같다.

$$\tau_1 = \frac{\int_{h_1 i}^{h_1(i+1)} \Lambda(x - h_1 i) e^{-\Lambda x} dx}{\int_{h_1 i}^{h_1(i+1)} \Lambda e^{-\Lambda x} dx} = \frac{1 - (1 + \Lambda h_1) e^{-\Lambda h_1}}{\Lambda(1 - e^{-\Lambda h_1})} \quad (13)$$

이와 마찬가지로 이상원인 발생 이전에 샘플링
된 마지막 표본에 대하여 최대 샘플링 구간 h_2
가 사용된다면 그 이후 이상원인 발생까지의 평균
경과시간도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tau_2 = \frac{\int_{h_2 i}^{h_2(i+1)} \Lambda(x - h_2 i) e^{-\Lambda x} dx}{\int_{h_2 i}^{h_2(i+1)} \Lambda e^{-\Lambda x} dx} = \frac{1 - (1 + \Lambda h_2) e^{-\Lambda h_2}}{\Lambda(1 - e^{-\Lambda h_2})} \quad (14)$$

따라서, p_1 과 p_2 가 각각 관리상태에서
 h_1 과 h_2 를 사용하여 보낸 시간의 비율이라고
할 때 이상원인이 발생하기 전의 마지막 샘플링 시
점부터 이상원인 발생까지의 평균 경과시간은 다음
과 같다.

$$\zeta = \tau_1 p_1 + \tau_2 p_2 \quad (15)$$

여기서, p_1 과 p_2 는 $p_2 + p_1 = 1$ 로서, 각
각 $h_1 f_1$ 과 $h_2 f_2$ 에 비례한다.

$$p_1 = \frac{f_1 h_1}{f_1 h_1 + f_2 h_2} = f_1 \frac{h_1}{h_0} \quad (16)$$

$$p_2 = \frac{f_2 h_2}{f_1 h_1 + f_2 h_2} = f_2 \frac{h_2}{h_0} \quad (17)$$

e 가 하나의 관측치를 샘플링하고 검사하고,
기록하는데 소요되는 평균시간이라면 하나의 표본
을 관리도에 적용하는데 소요되는 기대시간은 다음
과 같다.

$$A_2 = E_\delta[M] e \quad (18)$$

여기서, $E_\delta[M]$ 은 공정평균이 이동하였을 때의
기대 표본 크기를 나타낸다.

그리고, T_1 을 이상원인을 조사하는데 소요
되는 기대시간이라 하고, T_2 를 이상원인을 제거
하기 위하여 공정을 수리하는데 소요되는 기대시간
이라고 하면 기대 총 주기 시간 R 은 다음과 같
다.

$$R = A_1 - \zeta + A_2 + ATS_\delta + T_1 + T_2 \quad (19)$$

3.2.3 주기당 기대 비용

공정의 주기당 기대 비용은 위에서 계산한 시
간 요소들과 각 요소에 해당되는 주기 비용의 곱으
로 나타낼 수 있으며, 비용함수에서 고려해야할 비
용요소로는 다음과 같은 것들이 있다. 이 각각의
비용요소들은 이것이 적용되는 시간에 대해서만 고
려되어야 한다.

- ① 오경보를 조사하는 것과 관련된 비용
- ② 관리상태 동안 불량품 생산에 의해 소요되는 비
용
- ③ 이상상태 동안 불량품 생산에 의해 소요되는 비
용
- ④ 샘플링 비용
- ⑤ 공정을 수리하는데 소요되는 비용

관리상태 동안 생산된 몇몇 제품들은 공정의
명세사항에 따라 불량품으로 확인될 수 있으며, 이
와 같이 관리상태 동안 불량품 생산에 의해 소요된
시간당 기대비용을 C_0 로 나타낸다. 또한, 이상원
인에 의하여 공정 평균이 이동되었을 때 관리도가
이상신호를 발생시킬 때까지 공정은 이상상태에서
운영되며, 이 기간 동안 불량품 생산에 의해 소요
된 시간당 기대비용을 C_1 으로 나타낸다.

공정은 이상원인을 조사하는 기간과 공정을 수
리하는 기간에 멈추거나 계속될 수 있으며, 이에
따라 불량품 생산에 의한 주기당 기대 비용을 다음
과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_1 = C_0(1/\lambda) + C_1(ATS_\delta - \zeta + E_\delta[M] e + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2) \quad (20)$$

a 와 b 를 각각 샘플링에 대한 고정비용과
가변비용이라고 하면 관리상태 동안의 샘플링 비용
은 $(a + b n_0) s$ 가 되고, 관리상태와 이상상태 동안
의 총 샘플링 비용은 다음과 같다.

$$B_2 = (a + b n_0) s + (a + b E_\delta[M]) \left[ARL_\delta + \frac{\gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2}{E_\delta[H]} \right] \quad (21)$$

여기서, $E_\delta[H]$ 는 공정평균이 이동하였을 때의
평균 샘플링 구간을 나타낸다.

Y 가 각 오경보에 대한 비용이라면 오경보
에 대한 기대비용은 다음과 같다.

$$B_3 = Y \left(\frac{s}{ARL_0} \right) \quad (22)$$

따라서, 주기당 기대 비용은 $B_1+B_2+B_3+W$ 가 되고, 여기서 W 는 이상원인을 조사하고 위치를 알아내어 제거하는데 소요되는 비용을 나타낸다.

3.2.4 최소 비용함수

공정 운영의 시간당 기대비용은 다음과 같이 기대 주기 시간에 대한 주기당 기대 비용의 비율로 나타낼 수 있다.

$$C = (B_1 + B_2 + B_3 + W)/R \quad (23)$$

이것은 VSSI 관리도의 최적 설계 모수 n_1^* , n_2^* , h_1^* , h_2^* , w^* , k^* 를 찾기 위하여 최소화되는 최소 비용함수이다. 따라서, 이 최소 비용함수를 이용하여 시간당 기대비용을 최소화하는 VSSI 관리도의 설계 모수를 찾을 수 있다.

3.2.5 VSSI 관리도의 경제적-통계적 설계

VSSI \bar{X} 관리도의 성능을 평가하기 위하여 공정이 관리상태에 있을 때 기대 표본크기와 샘플링 구간이 표준 Shewhart \bar{X} -관리도의 표본크기 n_0 및 샘플링 구간 h_0 와 같아지도록 다음과 같은 제약을 부과한다.

$$E[n(i) | Z_{i-1} \in I_3; \delta_1 = \delta_2 = 0] = n_0 \quad (24)$$

$$E[h(i) | Z_{i-1} \in I_3; \delta_1 = \delta_2 = 0] = h_0 \quad (25)$$

식 (4), (5), (6) 등에서 정의한 확률 $P_i(n, \delta)$ 는 $\delta = 0$ 일 때는 n 과 무관하므로 $P_i(0) = P_i(n, 0)$ 로 정의하고, 식 (43)과 (44)로부터 다음의 식을 얻는다.

$$n_0 P_3(0) = n_1 P_1(0) + n_2 P_2(0) \quad (26)$$

$$h_0 P_3(0) = h_2 P_1(0) + h_1 P_2(0) \quad (27)$$

식 (4), (5), (6) 등으로부터

$$P_1(0) = 2\Phi(w) - 1,$$

$$P_2(0) = 2[\Phi(UCL) - \Phi(w)],$$

$$P_3(0) = 2\Phi(UCL) - 1$$

이므로, 식 (45)와 (46)에 각각 대입해서 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다[Prabhu et al. (1994)].

$$w = \Phi^{-1} \left(\frac{2\Phi(UCL)[n_0 - n_2] + (n_1 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right) \quad (28)$$

$$w = \Phi^{-1} \left(\frac{2\Phi(UCL)[h_0 - h_1] + (h_2 - h_0)}{2(h_2 - h_1)} \right) \quad (29)$$

따라서 최대 샘플링 구간 h_2 는 다음과 같이 다른 설계 모수들의 함수로 표현할 수 있다.

$$h_2 = \frac{h_0(n_1 - n_2) - d - h_1 c}{n_1 - n_2 - c} \quad (30)$$

단, d 와 c 는 아래의 식과 같다.

$$d = 2(h_0 - h_1)(n_1 - n_2)\Phi(UCL),$$

$$c = 2(n_0 - n_2)\Phi(UCL) + (n_1 - n_0)$$

따라서, n_0 와 h_0 , 공정 모수와 비용 모수가 주어지면 VSSI 관리도에 대한 최적의 설계 모수는 비용함수를 최소화하여 구할 수 있다.

$$\text{Minimize } (B_1 + B_2 + B_3 + W)/R$$

$$\text{Sub. to } ATS_0 > l$$

$$ATS_\delta < u$$

여기서 l 은 관리상태에서 ATS 의 하한을 나타내고, u 는 이상상태에서 ATS 의 상한을 나타낸다.

4. 수치예제

본 연구에서는 주어진 최적화 문제를 풀기 위하여 Evolver[Palisade Corporation(1998)]라는 상용 소프트웨어를 사용하였다. Evolver는 마이크로소프트 엑셀 스프레드시트 프로그램에 추가되는 프로그램으로서 최적화 모형을 엑셀 스프레드시트에 입력하면 유전자 알고리즘을 이용하여 최적해를 구할 수 있다.

본 예제에서는 공정평균의 변화를 일으키는 두 개의 이상원인이 독립적이며 복합적으로 발생하는 공정에서 표준 Shewhart 관리도와 VSSI \bar{X} 관리도의 성능을 비교하였다.

<표 1>은 본 예제에 사용된 공정과 비용모수로서 Chiu and Cheung(1977)의 문제집합을 두 개의 이상원인이 존재하는 경우로 변형하여 총 15개의 문제집합을 생성하였다. <표 2>는 공통적으로 사용되는 고정모수의 값을 나타낸다.

<표 1> 공정과 비용모수

No	공정과 비용모수									
	λ_1	λ_2	δ_1	δ_2	C_0	C_1	a	b	Y	W
1	0.01	0.01	2.0	2.0	30	100	0.5	0.1	10	30
2	0.05	0.01	2.0	2.0	30	100	0.5	0.1	10	30
3	0.05	0.05	2.0	2.0	30	100	0.5	0.1	10	30
4	0.01	0.01	2.0	2.0	30	50	0.5	0.1	10	30
5	0.01	0.01	2.0	2.0	30	1000	0.5	0.1	10	30
6	0.01	0.01	2.0	2.0	30	100	0.5	0.1	25	30
7	0.01	0.01	2.0	2.0	30	100	0.5	0.1	1	30
8	0.01	0.01	2.0	2.0	30	100	2.5	0.1	10	30
9	0.01	0.01	2.0	2.0	30	100	0.5	0.5	10	30
10	0.01	0.01	1.0	2.0	30	100	0.5	0.1	10	30
11	0.01	0.01	1.0	1.0	30	100	0.5	0.1	10	30
12	0.01	0.01	1.0	1.0	30	75	0.5	0.1	10	30
13	0.05	0.01	1.0	1.0	30	100	0.5	0.1	10	30
14	0.05	0.01	1.0	2.0	30	100	0.5	0.1	10	30
15	0.05	0.05	1.0	1.0	30	100	0.5	0.1	10	30

<표 2> 고정모수

고정모수	값
r_1	1
r_2	0
T_0	0.1
T_1	0.3
T_2	0.6
e	0.005
u	500
l	8

<표 3>은 표준 Shewhart 관리도와 VSSI \bar{X} 관리도에 대한 최소 주기당 기대 비용과 그 때의 최적 설계모수를 나타낸다. 이것을 통하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- ① 모든 문제에 대하여 VSSI \bar{X} 관리도의 주기당 기대 비용은 표준 Shewhart 관리도의 주기당 기대 비용보다 적다.
- ② 각 이상원인의 발생확률이 커질수록 표준 Shewhart 관리도에 대한 VSSI \bar{X} 관리도의 비용 감소율이 커진다.

- ③ 각 이상원인에 의한 공정 평균의 이동 폭이 커질수록 표준 Shewhart 관리도에 대한 VSSI \bar{X} 관리도의 비용 감소율이 커지고, 공정에 이상원인이 발생했을 때 좀 더 빨리 공정 평균의 이동을 감지할 수 있다.
- ④ VSSI \bar{X} 관리도를 사용하면 거의 모든 경우에 있어서 공정이 관리상태에 있을 때의 오정보를 감소시킬 수 있다.

5. 결론

현실적으로 공정의 이상원인은 단일 이상원인보다는 다중 이상원인으로 존재하는데 기존의 연구에서는 대부분 단일 이상원인을 가정하여 관리도를 설계하였다. 따라서, 본 연구에서는 공정평균의 변화를 일으키는 두 개의 이상원인이 독립적이며 복합적으로 발생하는 공정에 VSSI \bar{X} 관리도를 적용하였고, 비용함수를 이용하여 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적 성능을 분석하였다. 또한, 비용함수를 최적화시키는 과정에서 통계적 특성을 만족할 수 있도록 통계적인 제약을 추가하였다.

따라서, 현재 표준 Shewhart 관리도를 사용하고 있는 공정이 두 개의 이상원인이 존재하는 공정이라면 본 연구에서 제시한 방법을 이용하여 쉽게 VSSI \bar{X} 관리도를 설계할 수 있고, 공정을 최소의 비용을 가지고 효율적으로 관리할 수 있다.

본 연구에서는 두 개의 이상원인이 있는 경우만을 고려하였으나 3개 이상의 이상원인이 발생하는 경우로도 확장이 가능하다. 즉, 관리도 상에서 통계량의 위치 상태와 이상원인의 존재 상태를 고려하여 통계량의 상태를 재정의하고 새로운 전이행렬과 이를 이용한 ARL_δ , ATS_δ , $E_\delta[M]$, $E_\delta[T]$ 을 구해주면 3개 이상의 이상원인을 고려한 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적-통계적 설계도 가능하다. 또

한, 이 모형은 약간의 변화를 통하여 VSS(Variable Sample Size) 관리도와 VSI(Variable Sampling Interval) 관리도를 설계하는데도 사용할 수 있다.

참고문헌

- [1] 심성보, 강창욱(2000), “두 개의 이상원인을 고려한 VSS \bar{X} 관리도의 통계적 설계”, 「대한품질경영학회지」, 28권, 3호, pp. 44-52.
- [2] Chiu, W. K. and Cheung, K. C.(1977) "An Economic Study of \bar{X} Charts with Warning Limits", *Journal of Quality Technology*, Vol. 9, No. 4, pp. 166-171.
- [3] Duncan, A. J.(1956), "The Economic Design of \bar{X} Charts used to Maintain Current Control of a Process", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 51, Issue. 274, pp. 228-242.
- [4] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C.(1986), "The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach", *Technometrics*, Vol. 28, No. 3, pp. 3-10.
- [5] Palisade Corporation(1998), *Evolver: The Genetic Algorithm Super Solver*, Newfield: Palisade.
- [6] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{X} Control Scheme", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 164-176.
- [7] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1997), "Economic-Statistical Design of an Adaptive \bar{X} Chart", *International Journal of Production Economics*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-15.
- [8] Woodall, W. H.(1986), "Weaknesses of the Economic Design of Control Charts", *Technometrics*, Vol. 28, No. 4, pp. 408-409.

<표 3> 표준 \bar{X} 관리도와 VSSI \bar{X} 관리도의 비교

	표준 Shewhart 관리도						VSSI \bar{X} 관리도									%)
	n_0^*	h_0^*	k^*	ATS_0	ATS_δ	C^*	n_1^*	n_2^*	h_1^*	h_2^*	w^*	k^*	ATS_0	ATS_δ	C^*	
1	5	1.2	3.04	500.21	1.27	32.46	1	6	0.5	3.9	0.25	3.15	715.17	1.30	32.30	0.49
2	6	0.7	3.18	500.13	0.76	34.98	1	7	0.3	3.0	0.21	3.29	733.38	0.79	34.43	1.57
3	6	0.6	3.25	501.13	0.60	36.94	1	7	0.2	2.3	0.21	3.27	527.40	0.61	36.33	1.65
4	5	2.3	2.84	500.03	2.39	31.29	1	6	0.9	7.6	0.25	3.14	1330.32	2.51	31.22	0.22
5	6	0.3	3.42	503.84	0.34	43.40	1	7	0.1	1.3	0.21	3.42	500.04	0.35	42.06	3.09
6	5	1.2	3.05	501.74	1.25	32.49	1	6	0.5	3.8	0.25	3.36	1477.37	1.30	32.36	0.40
7	5	2.0	3.04	500.14	1.29	32.45	1	6	0.5	4.1	0.25	3.04	500.41	1.32	32.24	0.65
8	6	2.1	2.86	500.01	2.17	33.63	1	7	0.8	8.8	0.21	3.04	911.58	2.28	33.00	1.87
9	4	1.8	2.91	501.20	2.09	33.65	1	5	0.9	4.5	0.32	2.91	501.16	2.08	33.63	0.06
10	14	1.6	2.94	500.67	1.84	33.29	1	15	0.4	18.0	0.09	3.12	896.37	1.74	28.57	14.18
11	17	1.7	2.92	500.06	1.95	33.49	1	18	0.4	23.7	0.07	3.10	900.91	1.84	26.55	20.72
12	17	2.2	2.85	500.85	2.43	32.73	1	18	0.4	30	0.07	3.09	1100.70	2.33	27.14	17.08
13	18	1.0	3.08	501.85	1.19	36.86	1	19	0.2	15.1	0.07	3.08	501.98	1.10	24.62	33.21
14	17	1.0	3.09	501.75	1.16	36.77	1	18	0.2	13.7	0.07	3.09	500.38	1.07	26.10	29.02
15	19	0.9	3.13	504.47	0.99	39.38	1	20	0.2	13.7	0.07	3.13	502.85	0.93	21.66	45.00

1) 표준 Shewhart 관리도에 대한 VSSI \bar{X} 관리도의 비용 감소율