

## 선물의 수익률과 변동성에 대한 장기기억 효과 분석

이정형<sup>1</sup>

### 요 약

본 논문에서 한국선물시장의 변동성과 수익률에 대한 장기기억의 경험적 근거를 보이기 위해 일별 수익률과 변동성에 대하여 장기기억성의 추정과 검정을 실시하였다. Geweke and Porter-Hudak (1983)의 반비모수적 추정법을 이용하여 장기기억모수를 추정하였으며 추정결과 수익률은 장기기억효과가 없었으며, 변동성에서 장기기억효과가 유의한 것으로 나타났다.

주요용어 : 장기기억과정, 선물, 수익률, LMSV 모형, 변동성.

### 1. 서론

금융시장에서 시장수익률과 관련된 확률과정의 특성평가는 금융시장에서 포트폴리오(portfolio) 최적화, 위험도 평가, 옵션가격(option pricing) 등에서 중요한 연구분야 중의 하나이다. 시장수익률이 확률과정을 따르는 경우 선물가격의 변동성을 예측할 수 있으며, 이는 투자수익의 증대와 직결된다. 이러한 예측 가능성은 투자수익의 증대가 과거 선물가격의 변동성에 대한 정보에 근거한 거래와 언제나 일치하지 않는다는 효과적인 시장가설(efficient market hypothesis)과는 상충될 수도 있다(Ball, 1989).

선물시장에서 기본적인 특성과 정보의 원천으로 생각될 수 있는 것은 거래량 및 가격변동성 그리고 이들간의 관계라 할 수 있다. 선물의 거래량은 선물시장의 구성변화와 계약고 증감을 측정하는데 사용될 뿐만 아니라 선물시장의 구조와 가격변동 행태에 대한 적절한 정보를 제공한다. 자산 시장 모형에 의하면 거래자들은 시장에 전달된 가격에 대한 새로운 정보에 반응하여 거래를 시작하고, 시장가격이 새로운 정보균형에 도달하기까지 거래를 계속하게 된다. 따라서 정보흐름에 의해 가격과 거래량은 동일한 방향으로 변동하기 때문에 거래량과 가격변동간에는 매우 밀접한 관련성을 갖게 된다는 것이다. 그러나 거래자들이 입수하는 정보의 질 및 그 정확도와 정보확산의 속도에 따라 이들 관계에 대한 이론적 설명과 실증적 검증 결과는 다르며, 거래량의 가격 예측능력과 시장효율성 평가에서도 차이가 존재한다. 이와 같이 거래량에 내재된 정보가 가격 예측의 정확성을 높이는 것으로 시장 참가자들은 받아들이고 있다.

장기기억과정을 이용하여 변동성을 설명한 선행연구로는 Robinson (1991)은 Engle (1982)이 제안

<sup>12</sup>604-714, 부산시 사하구 하단동 840, 동아대학교 경영정보과학부 부교수

한 ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity) 모형과 Bollerslev (1986)의 GARCH(Generalized ARCH) 모형을 수익률의 제곱의 자기상관함수가 서서히 감소하는 장기기억성을 갖도록 확장하였으며, Bollerslev and Mikkelsen (1996)과 Baillie et al. (1996)은 장기기억을 분수(fraction) 차분연산자에 의한 FIGARCH (fractionally integrated GARCH) 모형을 제안하였으며, Breidt et al. (1998)과 Harvey (1993)는 Taylor (1986)가 제안한 확률적 변동성(stochastic volatility)모형을 장기기억성이 포괄할 수 있도록 확장하였다. 또한 선물 시장의 변동성분석과 관련된 선행연구로는 Ding et al. (1993), de Lima and Crato (1993)과 Breidt et al. (1998) 등은 금융시장의 변동성은 장기기억성이 있음을 보였으며, Engle (1982)과 Bollerslev (1986) 등은 금융수익률의 변동성이 강한 자기상관은 있으나, 금융수익률의 수준은 장기기억성이 없는 확률보행과정임을 보였다. 또한 Cho et al. (2002)은 한국주식시장의 변동성이 장기기억성을 가짐을 보였으며, Lee et al. (2002)은 한국선물거래소에서 거래되고 있는 달러선물, CD선물, 국채선물에 대하여 선물의 최근월물 일별 증가에 대한 가격변동과 거래량변동사이의 GARCH 효과를 실증적으로 분석하였다.

본 논문에서는 한국선물시장에서 선물거래량이 미래의 선물가격변동에 관한 유용한 정보를 내포하고 있는가를 알아보기 위하여, 현재 한국선물시장에서 거래되는 선물상품들 중에서 달러선물과 국채선물의 최근월물 거래량에 대한 변동성의 장기존재성을 GPH (Geweke and Porter-Hudak, 1983)의 반비모수적 기억모수 추정을 통하여 존재성을 실증적으로 분석하고자 한다.

## 2. 장기기억과정

일반적으로 시계열에서 시간  $t$ 와  $t-k$ 의 관련성은 시계열에 내재하는 자기상관함수로 나타낸다. 자기상관함수가 시차  $k$ 에만 의존하는 정상 시계열은 시차  $k$ 가 증가함에 따라 과거 시점의 영향이 점점 줄어들어 자기상관함수는 0으로 감소한다. 자기상관함수의 감소속도는 시계열의 확률적 기억성의 척도로 취급한다.

시계열의 모든 관측치가 자기상관이 없는 경우를 백색잡음(white noise)라고 하며, 임의과정(random process)이면 기억성이 없다(no memory)고 한다. 반면 시계열의 자기상관함수가 지수적으로 감소하면 단기기억 과정(short-memory process)을 따른다고 하며, 자기상관함수가 매우 천천히 감소하면 장기기억 과정(long-memory process)을 따른다고 한다. 장기기억과정을 수리적으로 정의하면, 어떤 시계열  $\{X_t\}$ 의 자기공분산  $\gamma(k) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$ 가

$$|\gamma(k)| \sim C |k|^{2d-1} \quad (1)$$

의 형태를 갖고,  $C > 0$  그리고  $0 < d < 1/2$  를 만족하면, 정상시계열  $\{X_t\}$ 가 장기기억과정을 따른다고 정의하며,  $d$ 를 장기기억모수(long-memory parameter)라고 한다. 장기기억모수  $d$ 는 시차가 커짐에 따라 자기상관함수의 값이 감소하는 속도를 조절한다. 한편, 진동수 영역에서 정상시계열  $\{X_t\}$

의 스펙트럼 밀도함수  $f(\lambda)$  가

$$f(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_U(\lambda) \tag{2}$$

의 형태를 갖고,  $0 < f_U(\lambda) < \infty$  그리고  $0 < d < 1/2$  을 만족하면, 시계열  $\{X_t\}$ 가 장기기억과정을 따른다고 정의한다

시계열에서 장기기억성의 존재를 탐지하기 위한 다양한 형태의 검정법이 제안되어 있으며, 제안된 검정법의 대부분은 R/S (rescaled adjusted range statistic) 방법에 기인하고 있다. 시계열을  $\{X_t\}$  라하고,  $\bar{X}$  를 경험적 평균이라 하면 수정 범위  $R$  은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R(d) = \max_{0 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k X_i - k\bar{X} \right\} - \min_{0 \leq l \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^l X_i - l\bar{X} \right\}. \tag{3}$$

정규화 인자  $S$  는 시계열의 표본표준편차이며, 다음과 같이 자기공분산을 이용하여 일반적인 형태로 표현할 수 있다.

$$S(n, q) = \sqrt{\sum_{j=-q}^q w_q(j) \hat{\gamma}(j)}, \tag{4}$$

여기서  $\hat{\gamma}(j)$  는 시차  $j$  의 표본자기공분산이며,  $w_q(j)$  는 가중치이다. 식 (3)과 (4)를 이용한 R/S 통계량은 다음과 같다.

$$Q(n, q) = \frac{R(n)}{S(n, q)} \tag{5}$$

ARMA 과정과 단기기억과정에 대하여  $Q(n, q)$  는  $n^J$  ( $J=1/2$ ) 로 수렴한다. 모수  $J$  를 Hurst exponent라 하며, 식 (1)의 장기기억모수  $d$  와는  $J=d+1/2$  의 관계에 있으며  $J>1/2$  이면 장기기억과정이라 한다 (Mandelbrot and Taqqu, 1979). 모수  $J$  의 추정법으로 제안되어 다양한 방법들 중 가장 단순한 형태는 식 (6)과 같으며,  $J$  의 추정량에 대하여 유용한 점근적 분포는 없는 것으로 알려져 있다.

$$J = \frac{\log Q(n, q)}{\log n} \tag{6}$$

또한 Geweke and Porter-Hudak (1983)은 기억모수  $d$  를 반비모수적(semiparametric)인 방법으로 추정하는 방법을 제안하였다. GPH 추정량을 구하기 위해서는 우선 식 (3)의  $f_U(\lambda)$  로그-피리어드그램(log-periodogram)을 이용하면 식 (7)의 로그-피리어드그램 회귀(log-periodogram regression)를 얻는다.

$$\log(I_x(\lambda_s)) = \log g(\lambda_0) - C - d \log |1 - \exp(-i\lambda)|^2 + u_s. \tag{7}$$

식 (7)의  $d$ 에 대한 최소제곱추정량은 식 (8)과 같다.

$$\hat{d} = - \frac{\sum_{s=1}^m (a_s - \bar{a}) \log I_x(\lambda_s)}{2 \sum_{s=1}^m (a_s - \bar{a})^2} \quad (8)$$

여기서  $a_s = \log |1 - \exp(-i\lambda_s)| = \log |2 \sin(\lambda_s/2)|$ 이다. Robinson (1995)은 Künsch (1986)의 연구결과를 이용하여 0 근처의 진동수(frequency)를 제거(trimming)하고 모든 영역 ( $-1/2 < d < 1/2$ )에서 GPH 추정량의 점근정규성을 증명하였다.

Breidt et al. (1998)은 선물의 변동성으로부터 관측된 지속적 종속구조 형태(persistent dependences structure)를 설명하기 위하여 LMSV (long-memory stochastic volatility) 모형을 제안하였다. LMSV 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$r_t = \sigma_t \phi_t, \quad (9)$$

여기서  $\sigma_t = \sigma \exp(v_t/2)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\{v_t\}$ 는  $\{\phi_t\}$ 와 서로 독립이며,  $\{\phi_t\}$ 는 평균 0과 분산 1인 백색잡음이며,  $\{v_t\}$ 는 장기기억모수  $d$  ( $0 < d < 1/2$ )를 갖는 장기기억과정이다.

Hosking(1981)과 Granger and Joyeux (1980)는 식 (10)과 같은 fractionally integrated noise 모형을 장기기억과정의 매개변수화 (parametrization)를 위해 사용하였다.

$$(1 - B)^d v_t = \eta_t, \quad (10)$$

여기서  $B$ 는 후향작용소(backward shift operator)이며,  $\eta_t$ 는 단기기억과정이다. 식 (9)를 로그-제곱 변환을 하면 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} y_t = \log(r_t^2) &= [\log \sigma^2 + E(\log \phi_t^2)] + v_t + [\log \phi_t^2 - E(\log \phi_t^2)] \\ &\equiv \mu + v_t + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (11)$$

즉,  $y_t$ 는 Gaussian 장기기억과정과 non-Gaussian 백색잡음의 합으로 표현된다. 또한  $\phi_t$ 가 Gaussian 장기기억과정일 때,  $\varepsilon_t$ 는 분산이  $\pi^2/2$ 인  $\log \chi^2(1)$ 을 따른다.

Deo and Hurvich (2001)는 LMSV 모형에서 기억모수의 추정을 위하여 모수에 대한 가정이 필요 없는 로그-파리어드그램을 이용한 반비모수적인 GPH 추정량을 제안하고 추정량의 점근정규성을 증명하였다.

### 3. 선물의 수익률과 변동성에 대한 장기기억효과 분석

한국선물시장의 변동성분석에 사용된 기초자료는 최근월물 증가로 달러선물(USD)과 국제선물

(KTB)을 한국선물거래소(KOFEX)로부터 제공받았다. 선물의 변동성분석에 사용된 기간은 다음과 같다. 달러선물은 1999년 4월 23일부터 2003년 12월 12일까지 총 거래일 1147일이며, 국채선물은 1999년 10월 4일부터 2003년 12월 15일까지 총 거래일 1035일이다. 장기기억특성분석에서 선물의 수익률은  $r_t^* = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$ 로 정의하였으며,  $p_t$ 는  $t$  시점에서 선물의 가격이다. 또한 변동성의 측도로는  $|r_t^*|$ ,  $r_t^{*2}$ ,  $\log r_t^*$  등의 다양한 형태들이 제안되어 있으나, 본 논문에서는 변동성을  $r_t = \log(r_t^* - \bar{r}^*)^2$ 로 정의하였다.

그림 1은 달러선물과 국채선물의 수익률을 나타낸 것이며, 그림 2는 달러선물과 국채선물에 대한 수익률의 자기상관함수를 나타낸 것이다. 그림 1과 그림 2를 보면 달러선물과 국채선물의 수익률이 기억구조를 갖지 않는 백색잡음으로 나타나 장기기억특성을 갖지 않음을 알 수 있다.

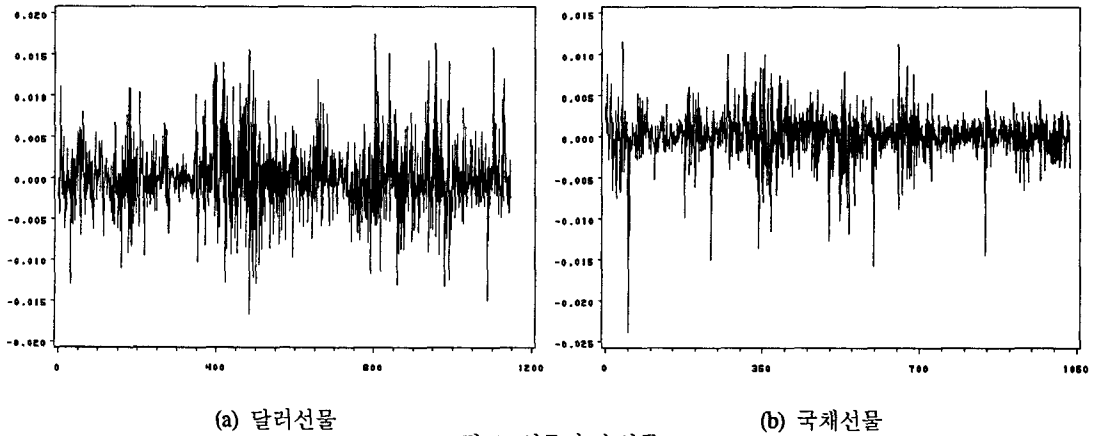


그림 1. 선물의 수익률

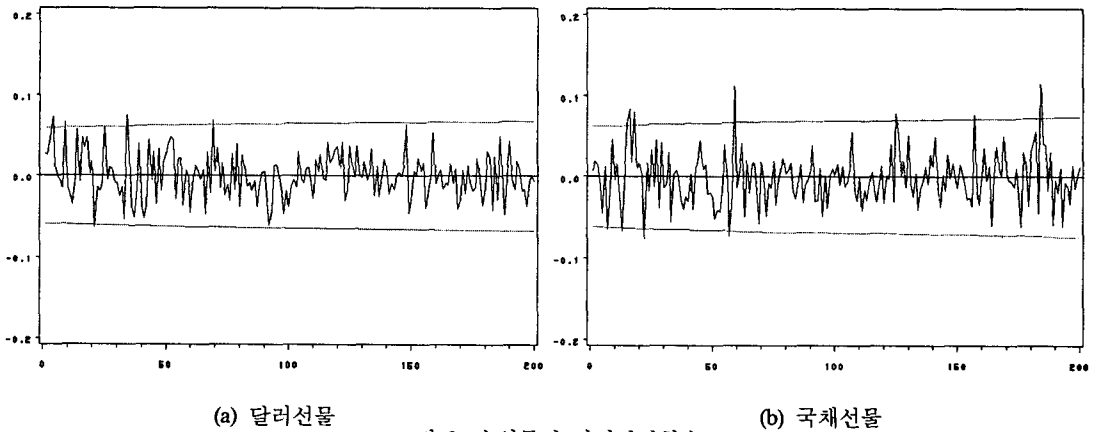


그림 2. 수익률의 자기상관함수

그림 3은 달러선물과 국제선물의 변동성을 나타낸 것이며, 그림 4는 달러선물과 국제선물에 대한 변동성의 자기상관함수를 나타낸 것이다. 그림 3을 보면 그림 1의 수익률과는 완전히 다른 패턴인 자연변동성 아래에서 변동성의 수준이 매우 천천히 움직임을 알 수 있으며, 또한 장기기억과정의 특징인 장기의 비주기적 패턴을 갖는 뚜렷한 기억구조를 나타내고 있다. 또한 그림 4에서 선물의 변동성에 대한 자기상관함수를 보면 장기기억과정의 특징인 높은 시차에서도 양의 자기상관이 있음을 알 수 있다.

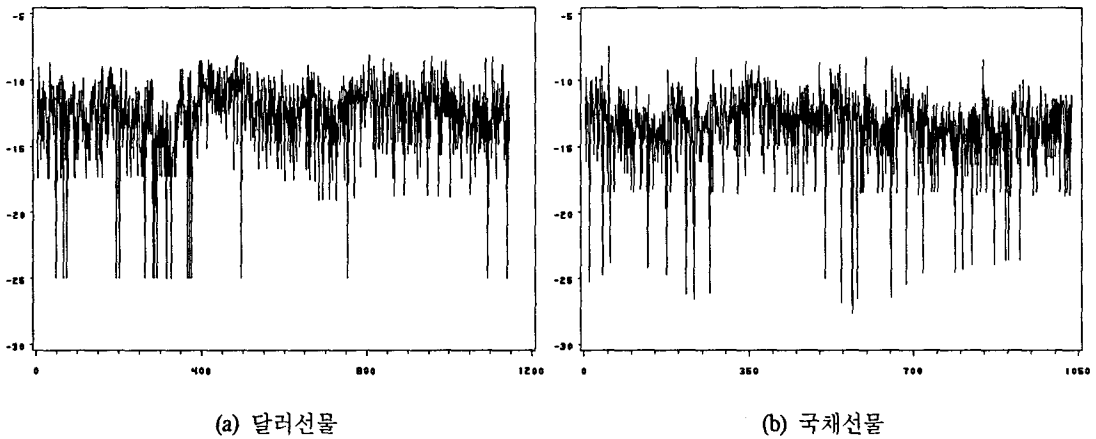


그림 3. 선물의 변동성

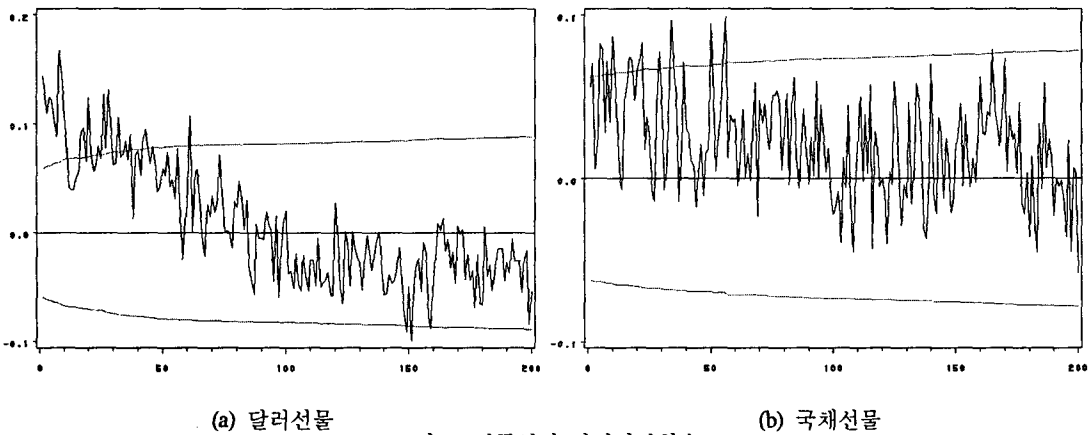


그림 4. 변동성의 자기상관함수

#### 4. 결론

본 논문에서는 한국선물시장의 수익률과 변동성에 대한 장기기억특성을 분석하였다. 그 결과 선물의 수익률에서는 장기기억특성을 발견할 수 없었으며, 이러한 결과는 외국의 선물수익률이 장기

기억특성을 갖는다는 연구결과와는 서로 다른 결과를 보여주고 있다. 그러나 선물의 변동성에서는 장기기억특성을 발견할 수 있었다.

### 참고문헌

- [1] Baillie, R., Bollerslev, T., and Mikkelsen, H. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 74, 3-30.
- [2] Ball, R. (1989). What Do We Know About Stock Market 'Efficiency?', in: R.M.C. Guimarães, B.G. Kingsman and S.J. Taylor, eds., *A Reappraisal of the Efficiency of Financial Markets* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1989) pp. 25-55.
- [3] Bollerslev, T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [4] Bollerslev, T. and Mikkelsen, H. (1996). Modelling and pricing long memory in stock market volatility, *Journal of Econometrics*, 73, 151-184.
- [5] Breidt, F. J., Crato, N., and de Lima, P. (1998). The detection and estimation of long memory in stochastic volatility, *Journal of Econometrics*, 83, 325-348.
- [6] Cho, S., Choe, H., and Park, J. Y. (2002). Long Memory Characteristics in Korean Stock Market, *The Korean Communications in Statistics*, 9, 577-594.
- [7] De Lima, P. and Crato, N. (1993). Long-memory in stock returns and volatilities, American Statistical Association, *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*.
- [8] Deo, R. S. and Hurvich, C. M. (2001). On the log periodogram regression estimator of the memory parameter in long memory stochastic volatility models, *Econometric Theory*, 17, 686-710.
- [9] Ding, Z., Granger, C., and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106.
- [10] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of UK inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [11] Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983), The estimation and application of long memory time series models, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221-237.
- [12] Granger, C. W. J, and Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series models and fractional differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-39.
- [13] Harvey, A. C. (1993). *Long memory in stochastic volatility*, Working paper.
- [14] Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing, *Biometrika*, 68, 165-176.
- [15] Künsch, H. R. (1986). Discrimination between monotonic trends and long-range dependence, *Journal of Applied Probability*, vol. 23, 1025-1030.
- [16] Lee, J. H., Kim, S., and Kwon, C. (2002). Analysis of GARCH Effects of Futures Trading Volume and Price Variability, *Journal of the Korean Data Analysis Society*, 4, 65-75.

- [17] Mandelbrot, B. and Taqqu, M. S, (1979). Robust R/S analysis of long-range serial correlation, *Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute*, 48, 2, 69-104.
- [18] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : A new approach, *Econometrica*, vol. 59, 347-370.
- [19] Robinson, P. M, (1995). Log-periodogram regression of time series with long range dependence, *Annals of Statistics*, 23, 1048-1072.
- [20] Robinson, P. M. (1991). Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression, *Journal of Econometrics*, 47, 67-84.
- [21] Taylor, S. (1986). *Modeling Financial Time Series*, Wiley, New York.