

단면적이 변하는 실린더 관에서의 음향, 엔트로피 및 와류 파동

조규식* · Lebedinsky Ev. V.**

Acoustic, entropy and vortex waves in a cylindrical tube with variable section area

Gyu-Sik Cho* · Ev. V. Lebedinsky**

ABSTRACT

In this paper a method for finding solution of acoustic, vortex and entropy wave-equations in a cylindrical tube with variable section area was suggested under the consideration of that the high frequency instability in a rocket engine combustion chamber is an acoustic phenomena, which is coupled with combustion reaction, and that a combustion chamber and exhaust nozzle are usually shaped cylindrically. As a consequence of that some method, which enable the quantitative analysis of the influence of entropy and vortex waves to acoustic wave, was suggested.

초 록

본 논문에서는 로켓 엔진의 고주파 연소불안정 현상이 연소현상과 맞물린 음향학적 현상이라는 점과 일반적으로 로켓엔진의 연소실 및 배기노즐이 원통형이라는 점을 고려하여 단면적이 변하는 원통형 관에서 음향, 엔트로피 및 와류 파동방정식의 해를 구하는 방법을 제시하였고 이를 통하여 엔트로피 및 와류파동이 음향파동에 미치는 영향을 정량적으로 해석 및 계산 할 수 있는 방법을 제시하였다.

Key Words: Acoustic wave(음향 파동), Entropy wave(엔트로피 파동), Vortex wave(와류 파동)

1. 서 론

유동이 있는 관에서의 음향 파동에 대한 연구는 기계공학의 여러 분야에서 다양한 목적을 가지고 이루어지고 있다. 본 연구는 로켓 엔진의 고주파 연소불안정 현상이 연소현상과 맞물린

음향학적 현상이라는 점[1]과 일반적으로 로켓 엔진의 연소실 및 배기노즐이 원통형이라는 점에 근거하여 단면적이 변하는 원통형 관에서 음향, 엔트로피 및 와류 파동의 수학적 해석에 목적을 두고 있다.

단면적인 변하는 원통형 관에서 음향, 엔트로피 및 와류 파동에 대해서는 B. T. Zinn[2], Ev. V. Lebedinsky[3]등에 의해서 연구된 바 있으나

* 한국항공우주연구원 추진기관그룹 선임연구원

** 모스크바 물리공과대학 항공우주학과 교수
연락처, E-mail: gscho@kari.re.kr

그들의 연구에서는 와류파동의 수학적 기술에 있어서는 불완전한 점이 있고 또한 와류 파동 및 엔트로피 파동이 음향 파동에 미치는 영향을 수학적으로 명확히 기술하거나 그 값을 정량적으로 계산할 수 있는 방법들에 대해서는 다루어 지지 않고 있다. 이에 본 논문에서는 이들 파동들을 수학적으로 보다 명확히 해석할 수 있는 파동방정식 시스템을 확립하고 그 해를 구하는 절차를 제시하고자 하며 이를 통하여 엔트로피 및 와류파동이 음향파동에 미치는 영향을 정량적으로 해석 및 계산할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

논의를 전개함에 있어 B. T. Zinn[2], Ev. V. Lebedinsky[3]등과 마찬가지로 다음과 같은 가정들을 도입하였다. 1)관속을 흐르는 유체는 이상기체이며 점성이 없다. 2)유동 상태 값들(압력, 온도, 밀도, 속도)의 섭동은 무한히 작다. 예로서 압력을 $p = \bar{P} + p'$ 로 표현할 때 섭동항인 p' 은 평균압력 \bar{P} 에 비해서 무한히 작다. 3)평균 유동은 평형상태에 도달해 있고 등엔트로피 유동이며 포텐셜 유동이다. 4)유동관은 단면적이 일정하거나 연속적으로 아주 서서히 변하는 축대칭형 원통이다(그림 1).

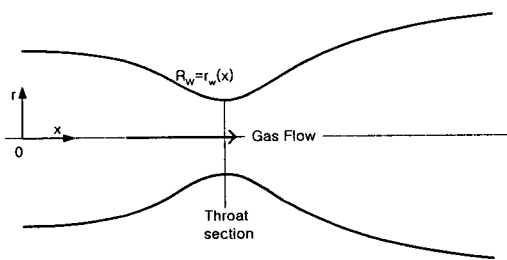


그림 1. 단면적이 변하는 원통형 관

2 지배 방정식

2.1 비 점성 유동 방정식

일반적으로 유동장내 외력이나 열전달이 없는 비 점성 유동의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\gamma} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla s = 0 \quad (2.3)$$

$$s = \frac{1}{\gamma} [\ln(p) - \gamma \ln(\rho)] \quad (2.4)$$

위 수식에서 \mathbf{V} 는 벡터 량이다. 또한 모든 변수들은 다음과 같이 무차원화 된 값이다. 즉 어떤 기준값에 대한 상대적 값이다. 아래 식에서 위첨자 *는 변수의 실제 값을 표시한다고 하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &\leftarrow \frac{\mathbf{V}^*}{a_{ref}}, \quad p \leftarrow \frac{p^*}{p_{ref}}, \quad \rho \leftarrow \frac{\rho^*}{\rho_{ref}}, \quad a_{ref} \leftarrow \sqrt{\frac{\gamma p_{ref}}{\rho_{ref}}}, \\ r &\leftarrow \frac{r^*}{R_{ref}}, \quad x \leftarrow \frac{x^*}{R_{ref}}, \quad t \leftarrow \frac{a_{ref} t^*}{R_{ref}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

무차원화의 기준값으로는 일반적으로 관 입구 단면에서의 값이나 관의 목 단면에서의 값을 사용한다. 본 논문에서는 후자를 사용하였다.

유동 상태 값들을 시간평균 항과 섭동 항의 합으로 표시(즉 $p = \bar{P} + p'$, $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'$ 등)하고 이를 (2.1)~(2.4)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 시간평균 항에 관한 지배방정식과 섭동 항에 대한 지배방정식으로 나누어 표시할 수 있다. 이때 섭동 항을 정리함에 있어서 섭동 값들의 제곱이상의 항은 일차항의 값과 비교해 매우 작다고 가정하고 수식에서 제외한다(섭동 방정식의 선형화).

[시간평균 항에 대한 지배방정식]

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{V}}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} + \frac{\nabla \bar{P}}{\gamma} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \bar{S} = 0 \quad (2.8)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{\gamma} [\ln(\bar{P}) - \gamma \ln(\bar{\rho})] \quad (2.9)$$

[섭동 항에 대한 지배 방정식]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{V}} + \bar{\rho} \mathbf{V}') = 0 \quad (2.10)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + (\rho \bar{\mathbf{V}} + \bar{\rho} \mathbf{V}') \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \mathbf{V}' + \frac{\nabla \bar{p}'}{\gamma} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla s' = 0 \quad (2.12)$$

$$s' = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\bar{p}'}{\bar{P}} - \gamma \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \right] \quad (2.13)$$

위에서 시간평균 항에 대한 지배방정식은 비선형형으로서 일반적으로 적절한 반복계산을 통해 수치적 해를 구할 수 있다. 섭동 항에 대한 지배 방정식을 보면 주어진 시간 평균 유동 값들을 계수로 갖는 선형 시스템을 알 수 있다. 따라서 선형시스템의 특성을 이용하여 섭동 값들의 시간의존성을 푸리에 급수의 합으로 표현할 수 있다고 가정한다. 즉 압력 섭동 값의 경우 $p'(\mathbf{r}, t) = p'(\mathbf{r}, \zeta) e^{s't}$ 로 놓고 경계조건을 만족하는 모든 ζ 값을 구하여 그 각각에 해당하는 단위 해들의 합으로 일반해를 표현할 수 있다 [1]. 이와 같이 푸리에 급수를 이용할 경우 수식 (2.10)~(2.13)은 다음과 같이 ζ 을 특성 값으로 하는 공간 편미분 방정식으로 변환된다.

$$\zeta \rho' + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{V}} + \bar{\rho} \mathbf{V}') = 0 \quad (2.14)$$

$$\bar{\rho} \mathbf{V}' + (\rho \bar{\mathbf{V}} + \bar{\rho} \mathbf{V}') \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \mathbf{V}' + \frac{\nabla \bar{p}'}{\gamma} = 0 \quad (2.15)$$

$$\zeta s' + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla s' = 0 \quad (2.16)$$

$$s' = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\bar{p}'}{\bar{P}} - \gamma \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \right] \quad (2.17)$$

위 수식에서 섭동 값들은 공간좌표 \mathbf{r} 과 특성 값 ζ 의 함수이며 이때 경계조건을 만족하는 특성 값들은 일반적으로 복소수이며 $\zeta = \lambda + i\omega$ 로 표현된다. 여기서 λ 는 감쇄 혹은 증폭 계수로 불리며 ω 는 고유진동수로 불린다.

2.2 파동 방정식

관계식 (2.17)을 이용하여 나머지 수식에서 밀도 섭동 값을 압력 섭동 값과 엔트로피 섭동 값으로 치환하여 나타낼 수 있다. 또한 음향 포텐셜 함수 $\phi \equiv \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}' + \bar{p}'/\gamma\bar{\rho}$ 및 와류 파동 벡터 $\mathbf{L} \equiv -\bar{\mathbf{V}} \times (\nabla \times \mathbf{V}')$ 의 도입과 시간 평균 유동장의 비회전성 가정 $\nabla \times \bar{\mathbf{V}} = 0$ 을 이용하여 수식 (2.14)~(2.15)를 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\zeta \frac{\bar{\rho}}{c^2} \frac{\bar{p}'}{\gamma\bar{\rho}} + \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{c^2} \frac{\bar{p}'}{\gamma\bar{\rho}} \bar{\mathbf{V}} \right) - \zeta \bar{\rho} s' - \nabla \cdot (\bar{\rho} s' \bar{\mathbf{V}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{V}') = 0 \quad (2.18)$$

$$\zeta \mathbf{V}' + \nabla \phi + \mathbf{L} - s' \mathbf{B} = 0 \quad (2.19)$$

위 수식에서 $c^2 \equiv \bar{P}/\bar{\rho}$, $\mathbf{B} \equiv \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})/2$ 이다. 식 (2.19)에 $\bar{\mathbf{V}} \cdot$ 을 가하고 음향 포텐셜 함수 ϕ 의 정의를 이용하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\bar{p}'}{\gamma\bar{\rho}} = \phi + \frac{1}{\zeta} \bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \phi + \mathbf{L} - s' \mathbf{B}) \quad (2.20)$$

수식 (2.19)와 (2.20)를 사용하여 수식 (2.18)에서 압력 섭동 값 및 속도 섭동 값을 새로운 파동함수 ϕ 및 \mathbf{L} 로 치환할 수 있고 이때 다음과 같은 음향 파동방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot \left[\frac{\bar{\rho}}{\zeta} \left(1 - \frac{\bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{V}}}{c^2} \right) (\nabla \phi + \mathbf{L} - s' \mathbf{B}) \right] + \\ & + \frac{\bar{\rho}}{c^2} \bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \phi + \mathbf{L} - s' \mathbf{B}) + \nabla \cdot \bar{\rho} \frac{\phi}{c^2} \bar{\mathbf{V}} + \\ & + \zeta \frac{\bar{\rho}}{c^2} \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

수식 (2.19)에 $\bar{\mathbf{V}} \times \nabla \times$ 을 가하고 와류 파동 벡터의 정의를 적용하면 다음과 같은 와류 파동

방정식을 얻을 수 있다.

$$\zeta \mathbf{L} - \bar{\mathbf{V}} \times \nabla \times (\mathbf{L} - s \mathbf{B}) = 0 \quad (2.22)$$

이렇게 해서 파동 방정식 (2.21)과 (2.22)는 엔트로피 파동방정식 (2.17)과 함께 하나의 파동 방정식 시스템을 이룬다. 방정식 (2.21)은 엔트로피 섭동 및 와류 섭동이 없고 평균 유동이 전 영역에서 균일할 경우 다음과 같이 일반적으로 알려져 있는 등속운동 균일매질에서의 파동방정식으로 귀착됨을 확인할 수 있다.

$$\nabla^2 \Phi - \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2\zeta U}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\zeta^2}{c^2} \Phi = 0 \quad (2.23)$$

2.3 곡선 좌표계에서의 파동 방정식

유동관이 그림 1과 같이 축 대칭의 원통관일 경우 평균유동의 연속방정식 (2.6)과 비회전성 조건 $\nabla \times \bar{\mathbf{V}} = 0$ 에 기초하여 평균유동의 유선(stream line)과 등 포텐셜 라인(equi-potential line)으로 구성되는 곡선 좌표계를 구성할 수 있다[4]. 평균유동의 비회전성 조건과 수식 (2.6)을 원통좌표계에서 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial r} - \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial (r\rho \bar{V}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (r\rho \bar{V}_r)}{\partial r} = 0 \quad (2.25)$$

관계식 (2.24)에 의하여 유동 포텐셜 ξ 을 정의할 수 있고 관계식 (2.25)에 의하여 유동 함수 η 을 정의할 수 있다. 이때 ξ 와 η 은 다음의 관계식을 만족하는 함수이다.

$$\bar{V}_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \bar{V}_r = \frac{\partial \xi}{\partial r} \quad (2.26)$$

$$r\rho \bar{V}_x = \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad r\rho \bar{V}_r = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.27)$$

관계식 (2.26)과 (2.27)를 사용하여 ξ -일정 곡선과 η -일정 곡선이 직교한다는 것을 쉽게 보일 수 있고 이것들로 이루어진 곡선 직교좌표계를

그림 2에 도시하였다.

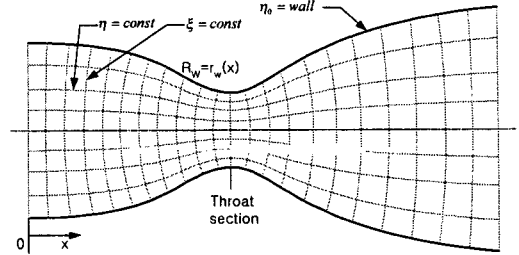


그림 2. ξ 과 η 으로 구성되는 곡선 직교 좌표계

위에 정의된 좌표계 (ξ, η, θ)에서는 속도성분 $\bar{V}_\eta = \bar{V}_\theta = 0$ 임이 자명하다. 또한 평균유동의 상태 변수 값들은 ξ 만의 함수라고 가정한다(평균유동의 준 일차원 가정). 새로운 좌표계에서는 다음과 같은 단위 길이 관계식이 성립된다.

$$dl_1 = \frac{d\xi}{V_\xi}, \quad dl_2 = \frac{d\eta}{r\rho V_\xi}, \quad dl_3 = r d\theta \quad (2.28)$$

새로운 좌표계에서 평균유동에 관한 지배방정식 (2.6)~(2.9)을 적분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\bar{\rho} \bar{V}_\xi A = \pi M_{th} = const \quad (2.29)$$

$$\frac{\bar{V}_\xi^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{M_{th}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} = const \quad (2.30)$$

$$c^2 = \rho^{\gamma-1} \quad (2.31)$$

위 수식에서 A 는 ξ -일정 단면의 면적을 나타내며 ξ 의 함수이다. 유동관의 단면적 변화가 완전한 경우 $A \approx \pi r_w^2$ 로 근사시킬 수 있다. M_{th} 는 관의 목 단면에서의 마하수이다.

이리하여 파동방정식 (2.21), (2.22), (2.17)를 새로운 좌표계 (ξ, η, θ)에서 나타낼 수 있다. 이때 와류 파동방정식 (2.22)은 해석의 편리성을 위해 연산자 $\nabla \cdot$ 을 가하여 스칼라 방정식으로 바꾼 다음 좌표변환을 수행한다. 또한 유동관의

단면적 변화율이 완만하다고 가정하고 다음과 같은 근사식을 사용한다.

$$\eta \approx \bar{\rho} \bar{V}_\xi \frac{r^2}{2} \quad (2.32)$$

그러면 다음과 같은 파동방정식 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & -\bar{V}_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 - \frac{\bar{V}_\xi^2}{c^2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] - \bar{\rho} \bar{V}_\xi \nabla_{r\theta}^2 \Phi + \\ & + 2\zeta \frac{\bar{V}_\xi^2}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \left[\zeta \bar{V}_\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{c^2}\right) + \frac{\zeta^2}{c^2} \right] \Phi = \\ & = \nabla \cdot \mathbf{L} - \bar{V}_\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{s'B}{\bar{V}_\xi} \left(1 - \frac{\bar{V}_\xi^2}{c^2}\right) \right] + \\ & + \frac{\zeta}{c^2} \bar{V}_\xi s'B \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \zeta \nabla \cdot \mathbf{L} + \bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{L}) = \\ = \bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \times \nabla \times s'\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\zeta s' + \bar{V}_\xi^2 \frac{\partial s'}{\partial \xi} = 0 \quad (2.35)$$

위 수식에서 $\nabla_{r\theta}^2 \Phi \equiv \frac{\partial}{\partial \eta} (2\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}) + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$,

$B \equiv \bar{V}_\xi \frac{d}{d\xi} \frac{\bar{V}_\xi^2}{2}$ 이다.

2.4 진동 모드별 파동방정식

파동 방정식 (2.33)~(2.35)을 적분함에 있어 변수 분리법의 적용이 가능하다고 가정하면 유동 섭동 값 함수들을 다음과 같이 푸리에-베셀 급수로 표현할 수 있다.

$$\frac{p'}{\gamma\rho} = \sum_{mn} [p'_{mn}(\xi) J_m(\alpha_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}) \cos(m\theta)]$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \sum_{mn} [\rho'_{mn}(\xi) J_m(\alpha_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}) \cos(m\theta)]$$

$$V'_\xi = \sum_{mn} [u'_{mn}(\xi) J_m(\alpha_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}) \cos(m\theta)]$$

$$V'_\eta = \sum_{mn} [v'_{mn}(\xi) \frac{d}{dr} J_m(\alpha_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}) \cos(m\theta)]$$

$$V'_\theta = \sum_{mn} [w'_{mn}(\xi) J_m(\alpha_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}) \frac{d}{d\theta} \frac{\cos(m\theta)}{r}]$$

위에서 η_0 은 실린더 벽에서의 η 값이다. 모든 변수들의 값이 목 단면에서의 값에 대한 상대값이라는 것을 상기하면 $\eta_0 = M_{th}/2$ 임을 쉽게 알 수 있다. 또한 $m = 0, 1, 2, \dots$ 이며(원주방향 대칭 및 연속 조건) α_{mn} 는 $J_m(\alpha_{mn}) = 0$ (실린더 벽에 수직인 방향으로 속도성분 제로 조건)을 만족시키는 값들이다. 이와 같이 푸리에-베셀 급수로의 표현은 원주방향 및 반경방향의 경계조건을 이미 포함하고 있다. 주어진 m 값에 대해서 $J_m(\alpha_{mn}) = 0$ 을 만족시키는 α_{mn} 값은 무수히 많은데 가장 작은 숫자부터 차례로 일련번호를 매기는 숫자가 n 이다. 따라서 숫자 m 과 n 는 횡 방향 경계조건을 만족하는 일련의 고유 진동 모드를 나타낸다고 볼 수 있다. 잘 알려져 있는 축 방향 진동 모드는 $m = 0, n = 0$ ($\alpha_{00} = 0$)에 해당하고 첫 번째 원주방향 모드는 $m = 1, n = 0$ ($\alpha_{10} = 1.841$)에 해당한다.

위와 같은 급수 표현에 따라 와류 섭동 값 $\nabla \times \bar{\mathbf{V}}' \equiv \Omega'_\xi \hat{\xi} + \Omega'_\eta \hat{\eta} + \Omega'_\theta \hat{\theta}$ 을 표현할 수 있는데 다음과 같다.

$$\Omega'_\xi = \sum_{mn} [(w'_{mn}(\xi) - v'_{mn}(\xi)) \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial r} J_m \cos]$$

$$\Omega'_\eta = \sum_{mn} [(u'_{mn}(\xi) - \bar{V}_\xi \frac{dw'_{mn}(\xi)}{d\xi}) \frac{\partial}{r \partial \theta} J_m \cos]$$

$$\Omega'_\theta = \sum_{mn} [(\bar{V}_\xi \frac{dv'_{mn}(\xi)}{d\xi} - u'_{mn}(\xi)) \frac{\partial}{\partial r} J_m \cos]$$

위에서 $J_m \cos \equiv J_m(\alpha_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}}) \cos(m\theta)$ 이다.

많은 경우에 와류 섭동 값의 ξ 방향 성분은 제로

라고 가정한다. 즉 $\Omega_\xi = 0$ 로 놓는 것인데 인위적인 회전이 없는 대부분의 원통 관 유동에서 이 조건이 만족된다. 따라서 $w'_{mn}(\xi) = v'_{mn}(\xi)$ 가 성립되고 이 조건은 방정식 (2.33)~(2.35)을 변수분리 법으로 적분하는 데 꼭 필요한 조건이다.

파동 함수들 Φ , $\nabla \cdot \mathbf{L}$, s' 과 수식 (2.34)의 벡터연산 항을 푸리에-베셀 급수를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\Phi = \sum_{mn} [\phi_{mn}(\xi) J_m \cos] \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{L} = \sum_{mn} [\bar{\rho} \bar{V}_\xi \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0} \ell_{mn}(\xi) J_m \cos] \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{L}) &= \\ &= \sum_{mn} [\bar{\rho} \bar{V}_\xi^3 \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0} \frac{d}{d\xi} \ell_{mn}(\xi) J_m \cos] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \times \nabla \times s \mathbf{B}) &= \\ &= \sum_{mn} [\bar{\rho} \bar{V}_\xi^2 \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0} B s'_{mn}(\xi) J_m \cos] \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$s' = \sum_{mn} [s'_{mn}(\xi) J_m \cos] \quad (2.40)$$

위 식에서 급수의 계수들에 해당하는 $\phi_{mn}(\xi)$, $\ell_{mn}(\xi)$, $s'_{mn}(\xi)$ 는 유선방향 좌표 값 ξ 의 함수이고 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_{mn}(\xi) \equiv \bar{V}_\xi(\xi) u'_{mn}(\xi) + p'_{mn}(\xi) \dots \dots (2.41)$$

$$\ell_{mn}(\xi) \equiv \bar{V}_\xi(\xi) [u'_{mn}(\xi) - \bar{V}_\xi(\xi) \frac{dv'_{mn}(\xi)}{d\xi}] \quad (2.42)$$

$$s'_{mn}(\xi) \equiv \frac{p'_{mn}(\xi)}{c^2} - \rho'_{mn}(\xi) \quad (2.43)$$

푸리에-베셀 급수 표현 (2.36)~(2.40)을 파동방정식 (2.33)~(2.35)에 대입하면 다음과 같이 급수의 계수들, 즉 $\phi_{mn}(\xi)$, $\ell_{mn}(\xi)$, $s'_{mn}(\xi)$ 에 대한 방정식 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} -\bar{V}_\xi^2 (1 - \frac{\bar{V}_\xi^2}{c^2}) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + \bar{V}_\xi^2 (\frac{2\zeta}{c^2} + \frac{d}{d\xi} \frac{\bar{V}_\xi^2}{c^2}) \frac{d\phi}{d\xi} \\ + (\zeta \bar{V}_\xi \frac{d}{d\xi} \frac{1}{c^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} + \bar{\rho} \bar{V}_\xi \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0}) \phi = \\ = \bar{\rho} \bar{V}_\xi \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0} \ell + [\frac{\zeta B}{V_\xi} - \bar{V}_\xi^2 \frac{d}{d\xi} \frac{B}{V_\xi} (1 - \frac{\bar{V}_\xi^2}{c^2})] s' \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\zeta \ell + \bar{V}_\xi^2 \frac{d\ell}{d\xi} = \bar{V}_\xi B s' \quad (2.45)$$

$$\zeta s' + \bar{V}_\xi^2 \frac{ds'}{d\xi} = 0 \quad (2.46)$$

간편화를 위해 진동 모드를 나타내는 하첨자 m 과 n 을 특성 값 α_{mn} 에만 살려두고 계수 함수에서는 생략하였다. 진동모드가 실질적으로 방정식의 해에 영향을 미치는 것은 특성 값 α_{mn} 을 통해서이다. 이렇게 하여 (2.44)~(2.46)는 평균유동에 대한 방정식 (2.29)~(2.31)와 함께 단면적이 변하는 원통형 관에서의 유동 섭동을 기술하는 지배 방정식 시스템을 이룬다. 주목해야 할 것은 푸리에-베셀 급수 전개를 통해 원주방향 및 반경방향의 의존성을 α_{mn} 라는 특성 값으로 대체하였으며 이를 통해 편미분 방정식 시스템을 각각의 진동모드별 계수 함수 값을 결정하는 상미분 방정식으로 변환시킴으로써 이론적 해석을 용이하게 하였다는 것이며, 또한 와류 섭동 값(일반적으로 벡터 량임)을 $\ell(\xi)$ 라는 하나의 스칼라 함수로 표현함으로써 와류 파동이 음향 파동 및 엔트로피 파동과 가지는 연관성을 수학적으로 보다 명확히 하였다는 것이다.

3. 파동방정식의 해에 관한 고찰

3.1 지배방정식의 x 좌표축으로의 변환

수식 (2.29)에 근사식 $A \approx \pi w^2$ 을 대입하고 관계식 (2.30) 및 (2.31)을 활용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} (M_{th}^2 - \bar{V}_\xi^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \bar{V}_\xi r_w^2 = M_{th} \quad (3.1)$$

위 방정식에서 목 단면 마하수 M_{th} 및 원통관의 프로파일 $R_w = r_w(\xi)$ 이 주어질 경우 속도 분포 $\bar{V}_\xi = U(\xi)$ 을 구할 수 있다. 이 속도 분포 값은 지배방정식 (2.29)~(2.31)의 근사해라고 할 수 있다. 또한 관계식 (2.28)에서 단위길이 l_1 을 x 로 표기하면 $d\xi = U(x)dx$ 의 관계식을 얻고 파동방정식 (2.44)~(2.46)를 x 좌표에 대해 기술할 수 있다. 따라서 근사관계식 $A \approx \pi r_w^2$ 를 사용하고 좌표 ξ 대신 $d\xi = U(x)dx$ 의 관계를 갖는 유선방향 길이 좌표 x 을 사용하면 파동 방정식 시스템을 다음과 같이 보다 해석하기 용이한 형태로 바꿔 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} & -\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right) \frac{d^2\phi}{dx^2} + \left[\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right) \frac{B}{U^2} + \frac{2U\zeta}{c^2} + \frac{d}{dx} \frac{U^2}{c^2}\right] \frac{d\phi}{dx} + \left[\frac{\zeta^2}{c^2} + \zeta U \frac{d}{dx} \frac{1}{c^2} + \bar{\rho} U \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0}\right] \phi = \\ & = \bar{\rho} U \frac{\alpha_{mn}^2}{2\eta_0} \ell + \left[\frac{\zeta B}{U} - U \frac{d}{dx} \frac{B}{U} \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)\right] s' \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\zeta \ell + U \frac{d\ell}{dx} = UBs' \quad (3.3)$$

$$\zeta s' + U \frac{ds'}{dx} = 0 \quad (3.4)$$

위 식에서 $B \equiv \frac{d}{dx} \frac{U^2}{2}$ 이다.

3.2 평균유속이 일정한 부분에서의 로컬 해

평균유속이 $U(x) = U_0$ 로 일정할 경우 지배방정식 (2.29)~(2.30)에 의하면 평균 압력 $\bar{P}(x)$ 및 밀도 $\bar{\rho}(x)$ 도 일정함을 쉽게 확인할 수 있다. 이때 음파의 속력도 $c_0 = \sqrt{\bar{P}_q/\bar{\rho}_0}$ 로 일정하다. 또한 평균유속의 변화율은 제로이다, 즉 $B=0$ 이다. 따라서 수식 (3.2)~(3.4)는 평균유

속이 일정한 영역에서 다음과 같이 단순화 되고 아래와 같은 형태의 해를 갖는다.

[평균유속이 일정한 영역에서의 파동 방정식]

$$\begin{aligned} & -(1 - M^2) \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2M\zeta}{c_0} \frac{d\phi}{dx} + \left[\frac{\zeta^2}{c_0^2} + \frac{\alpha_{mn}^2}{R_w^2}\right] \phi = \frac{\alpha_{mn}^2}{R_w^2} \ell \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\zeta \ell + U_0 \frac{d\ell}{dx} = 0 \quad (3.6)$$

$$\zeta s' + U_0 \frac{ds'}{dx} = 0 \quad (3.7)$$

위식에서 $M \equiv U_0/c_0$ (평균유동의 마하수)이다.

[평균유속이 일정한 영역에서의 로컬 해]

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(x) &= C_1 \exp(k_{mn}^+ \zeta x) + C_2 \exp(k_{mn}^- \zeta x) + \\ &+ C_3 \frac{U_0^2 \alpha_{mn}^2}{U_0^2 \alpha_{mn}^2 - \zeta^2 R_w^2} \exp\left(-\frac{\zeta}{U_0} x\right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\ell_{mn}(x) = C_3 \exp\left(-\frac{\zeta}{U_0} x\right) \quad (3.9)$$

$$s'_{mn}(x) = C_4 \exp\left(-\frac{\zeta}{U_0} x\right) \quad (3.10)$$

$$\text{위식에서 } k_{mn}^+ \equiv \frac{M - \sqrt{M^2 + (1 - M^2)\beta_{mn}^2}}{(1 - M^2)c},$$

$$k_{mn}^- \equiv \frac{M + \sqrt{M^2 + (1 - M^2)\beta_{mn}^2}}{(1 - M^2)c},$$

$$\beta_{mn}^2 \equiv 1 + \left(\frac{c\alpha_{mn}}{\zeta R_w}\right)^2 \text{이다. 또한 } C_1, C_2, C_3, C_4$$

는 임의의 적분 상수들이다.

우선 와류파동 및 엔트로피 파동을 보면 각각 하나의 지수함수로 구성된 해를 갖는데 이 해는 진동모드 특성 값인 α_{mn} 에 상관없이 평균유동 자체와 같은 속력인 U_0 로 평균유동과 같은 방향으로 전파되는 단일 방향 파동을 기술한다는 것을 알 수 있다. 반면에 음향파동을 기술하는 음향 포텐셜 함수 ϕ_{mn} 을 보면 세 개의 지수함수로 구성된 해를 갖고 있으며 앞의 두 지수 함

수는 평균유동의 마하수 및 진동모드 특성 값인 α_{mn} 에 따라 그 속도가 변하는 양 방향 파동을 기술하고 있고 세 번째 항은 와류파동에 의해 발생하는 특수 해로서 와류파동의 해에 계수만 변화된 결과라는 것을 알 수 있다.

음향파동이 와류 파동이나 엔트로피 파동과 다른 점은 압력의 섭동을 동반 한다는 것과 그 전파 속도가 음속에 준하여 전파되고 전파 방향이 일반적으로 모든 방향이라는 것이다. 현재와 같은 원통관의 경우 유동과 같은 방향 및 유동의 반대 방향으로 음파가 전파된다고 볼 수 있다. 그러나 평균 유동의 유속이 음속 이상인 경우(초음속 영역)에는 두 음파 모두 유동과 같은 방향으로 전파된다.

일반적으로 평균유동이 아음속인 경우 어느 한 방향의 음파는 매질의 특성이 변하거나 장애물을 만날 경우 반사파를 생성시키게 되는 데 음향 포텐셜 함수 (3.8)의 첫 번째 항과 두 번째 항이 각각 이를 기술 한다고 볼 수 있다. 세 번째 항은 와류파동이 음향 포텐셜 함수에 미치는 영향을 기술 한다고 볼 수 있는데 현재와 같이 평균유동이 일정할 경우에는 이 항은 압력 섭동 항 까지는 영향을 미치지 않는다. 이것은 수식 (2.20)에 음향 포텐셜 함수 (3.8)를 대입하여 압력 섭동 값을 계산해보면 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 일반적으로는 와류파동에 의해서 압력섭동이 증폭 혹은 감쇄하게 되는 데 이에 대해서는 다음 절에서 살펴보기로 한다.

3.3 일반해의 고찰

평균유속이 일정하지 않은 일반적인 경우 지배방정식 (3.2)~(3.4)는 다음과 같은 형태의 해를 갖는다[5].

$$\phi(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + \int_{x_0}^x F(z) \frac{\psi_1(z)\psi_2(x) - \psi_1(x)\psi_2(z)}{\psi_1(z)\psi_2'(z) - \psi_1'(z)\psi_2(z)} dz \quad (3.11)$$

$$\ell(x) = C_3\psi_s(x) + C_4 \frac{U(x)^2 - U_0^2}{2} \psi_s(x) \quad (3.12)$$

$$s'(x) = C_4\psi_s(x) \quad (3.13)$$

위식에서 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ 는 수식 (3.2)의 고유해이다. 임의의 적분 상수 C_1 , C_2 , C_3 , C_4 는 경계 조건 및 초기조건들에 의해서 결정되는 값들이다. 또한 $F(x)$, $\psi_s(x)$ 는 수식을 간편하게 하기 위해서 도입한 함수로서 다음과 같다.

$$F(x) \equiv - \frac{\bar{\rho} U \alpha_{mn}^2 \ell(x)}{(1 - U^2/c^2) 2\eta_0} - \frac{Us'(x)}{1 - U^2/c^2} \left[\frac{\zeta B}{U^2} - \frac{d}{dx} \frac{B}{U} \left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

$$\psi_s(x) \equiv \exp\left(- \int_{x_0}^x \frac{\zeta}{U(z)} dz\right) \quad (3.15)$$

위에 표현한 일반해의 형태는 세 가지 파동의 상호 연관성을 이론적으로 설명하는 데 편리하다. 그러나 정량적 해석 및 계산을 위해서는 고유해 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ 을 대수적으로 표현하기 어렵기 때문에 지배방정식 (3.2)~(3.4)를 직접 수치적으로 적분하는 것이 효과적이다.

음향 포텐셜 함수의 일반해를 표현하는 수식 (3.11)을 보면 첫 번째 두 항은 고유해에 해당하는 것으로서 수식 (3.8)의 첫 번째 두 항과 같이 와류 파동 및 엔트로피 파동과 무관한 음향파동의 전파를 기술하는 함수이다. 반면에 세 번째 항은 특수 해에 해당하는 것으로서 와류 파동 및 엔트로피 파동의 영향에 의해서 발생하는 음향 포텐셜 함수를 기술하고 있다. 평균 유동이 일정한 경우에는 이 세 번째 항이 압력 섭동 값에 영향을 미치지 않았지만 현재와 같은 일반적인 경우는 영향을 미친다. 즉 평균유동이 일정하지 않은 일반적인 경우, 즉 $B \neq 0$ 인 경우 와류 파동 및 엔트로피 파동이 압력 섭동 값을 변화시킨다는 것이다.

예외적으로 순수 축 방향 진동인 경우, 즉 $m=0$, $n=0$ 에 해당하고 $\alpha_{mn}=0$ 인 경우 수식 (3.14)에서 보듯이 와류파동 값에 해당하는 항이 제로가 된다. 이것은 수식 (2.37)을 볼 때 $m=0$, $n=0$ 에 해당하는 와류파동이 항상 제로라는 것과 일맥상통한다. 따라서 와류 파동이

음향 파동에 영향을 미치는 때는 $\alpha_{mn} \neq 0$ 인 경우이다. 수식 (3.14)에서 엔트로피 파동 값에 해당하는 항은 α_{mn} 값에 상관없이 $B \neq 0$ 인 경우 일반적으로 제로라고 볼 수 없다. 즉 엔트로피 파동 값은 축 방향 진동인 경우에도 음향 파동에 영향을 미칠 수 있다.

해의 정량적인 계산을 위해서는 방정식 시스템 (3.2)~(3.4)를 직접 수치적으로 적분해야 한다. 일반적으로 수치적 적분은 경계조건이 주어져 있는 단면이나 로컬 해가 알려져 있는 영역에서부터 출발하여 계산하는 것이 효과적이다. 본 방정식 시스템의 경우 단면적이 일정한 영역, 즉 평균유동의 속력이 일정한 영역에서 로컬 해가 알려져 있으므로 여기서부터 연속적으로 단면적이 변하는 영역으로 적분을 수행해 갈 수 있다. 이때 주어진 경계조건 및 초기조건을 적용하여 적분 상수들 C_1, C_2, C_3, C_4 을 결정할 수 있는데 C_3, C_4 는 각각 평균유동의 상류에서부터 전파되어 오는 와류파동 및 엔트로피 파동의 크기 및 위상으로부터 결정된다. C_1, C_2 의 결정을 위해서는 음향 포텐셜 함수 $\phi(x)$ 에 대해서 경계조건이 주어져야 한다.

만일 유동관의 특정 단면에서 음향 포텐셜 함수에 $\phi(x)$ 에 대한 하나의 경계 조건이 주어진다면 두 적분 상수의 비 C_2/C_1 을 결정할 수 있는데 이 값은 해당 단면에서 음향 파동의 반사율과 관계가 있다고 볼 수 있다. 만일 유동관내 두개의 단면에서 경계조건이 주어졌다면 두 적분 상수의 비 C_2/C_1 와 특정 특성 값 $\zeta (\equiv \lambda + i\omega)$ 을 결정할 수 있는데 이때 해당 주파수 ω 을 주어진 영역에서의 고유 진동수라고 한다. 방정식 시스템 (3.2)~(3.4)의 경우 경계조건을 만족시키는 특성 값 ζ 는 이론적으로 무수히 많은데 이는 선형 시스템의 특성이다. 또한 적분 상수의 비 C_2/C_1 만을 결정할 수 있을 뿐 C_1, C_2 각각의 값을 유한하게 결정할 수는 없는데 이도 선형 시스템의 특성 때문이다.

4. 맺음말

와류 파동 벡터 $\mathbf{L} \equiv -\bar{\mathbf{V}} \times (\nabla \times \mathbf{V}')$ 의 도입과 유동 섭동 항들에 대한 푸리에-베셀 급수 전개를 통해서 단면적이 변하는 원통형 관에서 음향, 엔트로피 및 와류 파동방정식 시스템을 정립하였다. 방정식 및 해의 형태 고찰을 통하여 엔트로피 및 와류 파동이 음향 파동에 미치는 영향을 보다 명확히 하였으며 이를 정량적으로 해석 및 계산할 수 있는 방법을 제시하였다.

본 논문은 저자의 박사학위 논문의 일부를 발췌 요약한 것으로서 로켓엔진의 고주파 연소불안정 연구에 있어서 단면적이 서서히 변하는 배기 노즐에서 음향파동의 반사율 등을 계산하는데 적용한 바 있다. 이에 대해서는 향후에 소개하고자 한다.

참고문헌

1. D. T. Harrje and F. H. Reardon, "Liquid propellant rocket combustion instability", National Aeronautics and Space Administration, 1972, p. 17, p. 141.
2. Zinn, B.T. and L. Crocco, "Periodic finite-amplitude oscillations inslowly converging nozzles", *ADA Astonautica*, 1968.
3. Ev. V. Lebedinsky and M. S. Natanzon, "Acoustic, entropy and vortex disturbance in a channel with variable section", *Fluid and Gas Mechanics No.1 (Russian Journal)*, 1982.
4. M. S. Natanzon, "Combustion Instability", *Mashinastroyenye (published in Russia)*, Moscow, 1986. p. 85
5. F. B. Hildebrand, "Advanced calculus for applications(second edition)", Prentice-Hall, Inc., 1976, pp. 26.