

초음속 충돌 제트 유동에 대한 $k-w$ 난류모델의 적용

김유진^{*1}, 박수형², 권장혁³, 김성인¹, 박승오³, 이광섭⁴, 홍승규⁵

Numerical Study on $k-w$ Turbulence Models for Supersonic Impinging Jet Flow Field

E. Kim, S.H. Park, J.H. Kwon, S.I. Kim, S.O. Park, K.S. Lee, and S.K.Hong

A numerical study of underexpanded jet and impingement on a wall mounted at various distances from the nozzle exit is presented. The 3-dimensional Navier-Stokes equations and $k-w$ turbulence equations are solved. The grids are constructed as overlapped grid systems to examine the distance effect. The DADI method is applied to obtain steady-state solutions. To avoid numerical instability such as the carbuncle that sometimes accompany approximate Riemann solver, the HLLE+ scheme is employed for the inviscid flux at the cell interfaces. A goal of this work is to apply a number of two-equation turbulence models based on the w equation to the impinging jet problem.

Key Words: 충돌 제트(Jet impinging), $k-w$ 난류모형($k-w$ turbulence model)

1. 서 론

수직/단거리 이착륙기의 발진, 미사일의 수직 발사, 다단로켓의 분리 등의 많은 경우에서 나타나는 초음속 충돌 제트 유동은 고속의 유동과 바닥면이 충돌함으로 인한 복잡한 구조를 가지고 있다. 여러 실험 및 계산을 통하여 충돌면에서의 평균 압력 분포 등으로 이러한 유동장을 설명하고자 하는 시도들이 많이 있어왔다. 특히, 제트 충돌면의 압력변화에서 recirculating에 의한 중심점 부근의 stagnation bubble의 발생 원인과 이에 따른 최고 압력점의 위치 변화를 해석하기 위한 노력이 이루어져 왔다.

Ginzburg 등[1]과 Kalghatgi와 Hunt[2]는 이러한 bubble의 발생 원인을 노즐로부터 평판까지의 거리

비(H/D)와 노즐 압력비(P_e/P_∞)라는 두 가지 중요한 변수에 따라 실험으로 관찰하였다. Jet shock과 바닥면 으로부터 떨어져있는 plate shock이 간섭을 일으키는 삼중점(triple point)로부터 바닥면까지 이어진 slipline이 바닥면 위의 유동을 높은 압력의 외부영역과 그렇지 않은 내부 두 영역으로 분리하게 되며, 이러한 큰 역압력과 slipline을 따라 생성되는 shear layer가 내부영역의 박리를 발생시킨다는 것으로 bubble의 생성을 설명하고자 하였다.

최근 들어 CFD를 이용한 수직 충돌 제트 유동의 해석이 이루어져 오고 있으며, 이와 같은 복잡한 충돌면의 유동특성을 해석하기 위해 적합한 난류모형의 적용에 초점을 두고 있다. Wu 등[3]은 노즐출구와 충돌면이 가깝거나, 기울어진 평판위에 충돌하는 제트에서 삼중점이 바닥면에 근접할 때 점성의 효과가 상당히 커짐을 논하였고, Alvi 등[4]은 회전과

1 학생회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

2 정회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

3 종신회원, 한국과학기술원, 항공우주공학전공

4 정회원, 국방과학연구소

5 종신회원, 국방과학연구소

곡률을 고려한 1방정식 SA (Spalart-Allmaras with Rotation and Curvature Correction) 난류모형과 2방정식 SST(Shear Stress Transport) 난류모형을 적용하여 층돌면의 압력분포를 구하였다.

본 연구에서는 3차원 수직층돌 제트 유동에 Wilcox $k-w$ 모델, $k-w$ Wilcox-Durbin(WD+) 모델, $k-w$ SST 모델 등의 몇 가지 $k-w$ 난류모형을 적용하여 과소 팽창된 초음속 제트 유동과 층돌면에서의 압력분포를 구하고, 적합성을 판단하였다.

2. 수치해석

2.1 지배방정식

일반적인 3차원 유동장은 Navier-Stokes 방정식으로 표현될 수 있다. 3차원 공간에서의 압축성 Navier-Stokes 방정식을 직교좌표계에서 미분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{vi}}{\partial x_i} \quad (1)$$

여기서 반복되는 하첨자는 텐서합의 표현법을 나타낸다.

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix}, f_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{11} p \\ \rho u_i u_1 + \delta_{22} p \\ \rho u_i u_1 + \delta_{33} p \\ \rho u_i H \end{pmatrix}, f_{vi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \delta_{i1} \\ \sigma_{ij} \delta_{i2} \\ \sigma_{ij} \delta_{i3} \\ u_i \sigma_{ij} + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2)$$

이고, ρ , u_i , p , E , H , T 는 각각 밀도, x_i 축 방향의 속도성분, 압력, 총에너지, 총엔탈피 및 온도를 나타낸다. 이상기체에서 총에너지 및 총엔탈피는 다음과 같다.

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u_i u_i) \quad H = E + \frac{p}{\rho} \quad (3)$$

γ 는 비열비를 나타내며 완전 기체(perfect gas)의 경우 1.4로 고정시킨다. 또한 점성응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (4)$$

여기서 μ 는 점성 계수(coefficient of viscosity)이고, 층류(laminar) 점성계수와 난류(turbulent) 점성계수의 합으로 결정된다. Pr 과 Pr_t 는 각각 층류와 난류에서의 Prandtl수를 의미하며, 공기의 경우 Pr 과 Pr_t 는 각각 0.72와 0.9로 고정된다. 층류 점성 계수를 계산하기 위해 Sutherland law를 사용하였으며, 난류 점성 계수는 $k-w$ 난류모형을 적용하여 계산하였다.

경계면의 유속계산에는 층돌 제트와 같은 초음속 유동에서 해의 정확성 확보와 동시에 층돌면의 대칭성을 깨뜨리는 현상을 막을 수 있는 HLLE+ 기법을 사용하였다[5]. 또한, 정상 상태의 해를 얻기 위해 내재적 시간 전진 기법인 Diagonalized ADI를 사용하였다[6].

2.2 난류 모형

$k-w$ 2방정식을 난류 모델로 사용할 때 난류 점성계수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mu_T = c_\mu \frac{\rho k}{\omega} \quad (5)$$

난류의 생성을 표현하는 원천항은 구배로 표현되는 대류나 확산과 달리 종속변수의 국부값에 의해 결정되며, 지배방정식의 물리현상을 반영한다. 난류 운동에너지(k)와 비소산율(w)의 원천항은 다음과 같다.

$$S_{kw} = \begin{bmatrix} P_k - D_k \\ P_w - D_w + P_{cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_t S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk} - \beta' \rho k w \\ \alpha \frac{w}{k} \left(S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk} \right) - \beta \rho w^2 + P_{cd} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 k 와 w 의 생성율(production rate)은 P_k 와 P_w 로, 소멸율(destruction rate)은 D_k 와 D_w 로 각각 표시된다. 또한, $k-w$ SST 모형에 사용되는 교차 확산항(cross-diffusion term)은 P_{cd} 로 표시된다. 평

균 strain율(mean strain rate) S 는 다음과 같이 정의된다.

$$S^2 = 2S_{ij}S_{ji} - \frac{2}{3}S_{kk}^2 \quad (7)$$

2.2.1 Wilcox의 $k-w$ 난류모형

Wilcox $k-w$ 난류 모형[7]의 상수는 다음과 같다.

$$c_\mu = c_\mu^o = 0.09, \quad \beta = 1, \quad \beta = \frac{5}{6} \\ \alpha = \frac{5}{9}, \quad \alpha_\nu = \frac{c_\mu}{c_\mu^o} = 1, \quad \sigma_k = \sigma_w = 0.5 \quad (8)$$

2.2.2 $k-w$ WD+ 난류모형

Boussinesq 가정에 따른 식(5)의 선형 난류점성 모델은 역압력구배(adverse pressure gradient)가 존재하는 난류 유동장의 해석에 부적절한 것으로 알려져 있다. 약한 비선형 난류점성 모형(weakly-nonlinear eddy viscosity model)은 이러한 단점을 극복하며 특히 충격파와 경계층의 간섭영역에서 좋은 성능을 보여준다[8]. 난류 상수는 다음과 같다

$$c_\mu = \min \left[c_\mu^o, \frac{\sqrt{c_\mu^o w}}{\sqrt{S^2 + \Omega^2}} \right] \quad (9)$$

여기서 Ω 는 와도(vorticity)의 절대값이다.

이러한 비선형 모형은 평균 strain율 S 가 무한대일 때 난류 점성의 상수가 영으로 접근하는 특성을 가지도록 한다.

2.2.3 $k-w$ SST 난류모형

벽면 근방에서 정확한 $k-w$ 모형을 사용하고, 경계층 외부에서 자유류 의존성이 없는 $k-\epsilon$ 모형을 사용하는 것을 기본으로 하는 SST 난류모형은 $k-\epsilon$ 모형을 $k-w$ 모형 형태로 치환하고 모형상수를 결합하기 위한 혼합(blending) 관계식을 이용한다[9]. 그 값과 관계식은 다음과 같다.

$$\Phi = F_1\Phi_1 + (1 - F_1)\Phi_2 \quad (10)$$

Φ_1 은 $k-w$ 모형의 상수를 사용하게 되고, $k-\epsilon$ 모형 (Φ_2)의 경우 다음과 같은 상수를 사용한다.

$$\beta = 1, \quad \beta = 0.92 \\ \alpha = 0.4404, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_w = 0.856 \quad (11)$$

$k-\epsilon$ 모형의 치환으로 유도된 교차확산항 P_{cd} 는 다음과 같다.

$$P_{cd} = 2\rho(1 - F_1) \frac{\sigma_w w}{w} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} \quad (12)$$

SST 모형에서 난류점성 모형은 역압력구배가 존재하는 곳에서 주(principal)난류 전단응력의 전달(transport)을 고려하도록 설계되었다. 이때, 난류점성 모형의 상수 C_μ 는 다음과 같이 정의된다.

$$c_\mu = \min \left[c_\mu^o, \frac{0.31w}{\Omega F_2} \right] \quad (13)$$

F_2 는 경계층에서 1의 값을, free shear layer 에서는 0의 값을 가진다.

2.3 격자구성 및 경계조건

노즐출구와 충돌면의 거리의 변화를 격자의 재구성 없이 용이하게 하기 위하여 Chimera 중첩격자기법[10]을 사용하였다. 벽면으로부터의 수직방향의 첫 번째 격자크기는 난류현상의 구현을 위해 노즐목의 Re수에 기초하여 10^{-5} 의 크기로 고정하였다. Fig.1은 2차원 축대칭 격자들로, 정렬격자와 중첩격자를 보여준다. 3차원 격자의 경우 축대칭 중첩격자를 기준으로 구성되었으며, 충돌면의 격자는 특이점을 피하기 위해 직사각형의 정렬격자 구조를 가진다.

벽면의 경계조건으로 속도는 no-slip 조건을 적용하며, 밀도와 에너지 등은 내부점으로부터 외삽되어진 단열조건을 적용한다. 벽면에서의 k 는 0으로 고정하고, w 는 다음과 같은 식을 따른다[11].

$$w_{wall} = \frac{19}{9} \frac{6\mu_w}{\beta\rho d_1^2} \quad (14)$$

여기서 d_1 은 벽면부터 첫 번째 격자 중심까지의 거리를 나타낸다.

노즐내부의 유동은 정상상태 등엔트로피 가정으로부터 노즐목에서 Chock조건을 적용하였다.

3. 유동해석 결과

유동해석은 Ginzburg 등[1]의 실험에 이용된 Convergent-Divergent 노즐의 형태와 노즐출구 조건에 따른다. 그 실험조건은 다음과 같다.

$$M_e = 2.185, \quad \theta_e = 5^\circ, \quad D_e = 30mm \\ n_e = P_e/P_\infty = 1.9 \quad (15)$$

M 은 마하수, θ 는 출구면의 각도, D 는 지름, n 은 압

력비를 뜻하며, 주어진 조건은 과소팽창된 제트유동을 뜻한다. 출구면의 속도를 명확히 하기 위해 이러한 출구조건을 기준으로 노즐목에서의 압력비와 면적을 구하고 계산에 이용하였다. 노즐목에서의 레이놀즈수는 5.2×10^6 이다.

출구면으로부터 충돌면까지의 거리비 $\bar{h} = h/R_c$ 는 2.8, 4.0, 5.2, 6.8 네가지 경우에 대해 계산하였다. $\bar{h} > 3.6$ 인 조건에서 특정지점에 separation이 발생하게 되고 최고 압력점은 중심을 벗어나게 된다[1].

Fig.2 는 $\bar{h} = 4.0$ 격자면의 유속계산에 사용된 HLLE+기법의 성능을 보여주는 것으로 carbuncle과 같은 현상을 보정하기 위한 Yee의 엔트로피 보정기법($\delta = 0.25$)을 적용한 Roe기법과 비교하였다. 사용된 난류모형은 $k-w$ WD+모형이다. 비교적 큰 수치적 점성이 더해짐에도 불구하고 Roe기법의 경우 대칭성을 잃는 것을 확인할 수 있으며, 적용된 HLLE+기법은 충돌면의 대칭성을 확보함을 확인할 수 있다.

Fig.3-5 는 같은 조건에서 축대칭 정렬 격자계와 축대칭 중첩격자계, 그리고 3차원 중첩격자계를 이용한 계산 결과를 보여준다. 정렬격자계의 경우 노즐과 함께 구성된 격자계의 격자중형비를 고려하여 중첩격자계에 비해 많은 격자수를 요하고, 마하수 분포 그림에서와 같이 plate shock의 해상도는 중첩격자계에 비해 뛰어난 것을 알 수 있다. 이러한 차이가 정렬격자와 중첩격자 사이의 압력분포 결과에 다소 영향을 미치는 것으로 생각된다. 이러한 비교는 차후 격자에 대한 명확한 검증이 필요할 것이나, 다양한 경우에 대해 격자의 재구성이 필요 없는 중첩격자계의 사용은 계산의 효율성을 증대시킬 수 있는 장점이 있다.

축대칭계산과 3차원 계산의 축대칭면에 대한 마하수분포는 거의 일치함을 알 수 있고, 충돌면의 압력분포에서 보여주는 약간의 차이는 3차원 계산에서 사용된 충돌면의 격자 구성이 앞서 설명한 바와 같이 직사각형 구조를 가짐으로 설명할 수 있다.

Fig. 6은 각각의 조건에 따른 충돌면의 압력분포를 나타낸 것으로, 3차원 계산에 적용된 3가지 난류모형에 따른 결과를 비교하였다. 중심점에서 최고압력점이 발생하는 (a)의 경우 세가지 모형이 크게 차이를 보이지 않음을 알 수 있으나, 최고압력점이 중심점을 벗어나기 시작하면 $k-w$ WD+모형이 가장

좋은 성능을 보여줌을 알 수 있다. 역압력구배에 의해 벽면에서 separation이 생성되기 시작하면 이 지점으로부터 bubble이 내부로 생성되게 되고, 이러한 separation point를 가장 잘 포착하고 있는 것이 $k-w$ WD+모형을 확인할 수 있다. 특히, (b)의 경우 난류모형에 따라 가장 큰 차이를 보여준다. 실험치에서 알 수 있듯이 separation point와 중심에서의 압력차이가 크지 않고, 그 사이에는 다소 압력이 낮은 가속구간이 존재함을 알 수 있는데, 이러한 원인은 shear layer 부근에서 발생된 bubble이 중심까지 커지지 않고 반지형태를 띄고 있음으로 설명할 수 있고, 이는 Fig. 7에서 보여주는 두 난류모형의 유선(streamline)으로 분명히 확인할 수 있다. (c)의 경우 세 모형 모두 다소 실험치와 차이를 보여주지만, 역시 WD+모형이 비교적 좋은 결과를 보여주고 있다.

Fig. 8은 $k-w$ WD+난류모형을 적용하여 계산된 대칭면의 마하수 분포를 각 경우에 대해 보여주고 있다. 축대칭을 완벽하게 보여주며 서로 다른 bubble의 크기와 충격파 구조를 확인할 수 있다.

4. 결 론

노즐로부터 과소팽창된 제트유동이 일정 거리 떨어져 있는 바닥면에 충돌하는 유동을 3차원 중첩격자계를 이용하여 다양한 거리에 대해 계산하였다. 세가지 $k-w$ 계열의 난류모형을 이용하여 이러한 유동장에 대해 충돌면의 압력분포로부터 모형의 성능을 판별하였으며, $k-w$ WD+ 난류모형이 shear layer 내부의 큰 역압력구배로 인하여 발생하는 separation 지점을 잘 포착하여 충돌면의 압력분포를 비교적 정확히 구현함을 알 수 있다. 본 연구에 사용된 난류모형과 중첩격자기법을 이용하여 차후 수직 발사하는 유도탄의 거동해석을 수행할 것이다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 “유도탄의 유동해석 기술 및 다탄두 운동예측” 연구의 일부이며 지원에 감사드립니다.

참고문헌

[1] Ginzberg, I. P., Semilentenko, B. G., Terpigorev, V. S., and Iskov, V. N., "Some Singularities of Supersonic Underexpanded Jet Interaction with a Plane Obstacle," *Journal of Engineering Physics*, Vol. 19, 1973, pp.1081-1084.

[2] Kalghatgi, G. T. and Hunt, B. L., "The Occurrence of Stagnation Bubbles in Supersonic Jet Impingement Flows," *Aeronautical Quarterly*, Vol. 27, 1976, pp.169-185.

[3] Wu, J., Tang, L., Luke, E. A., Tong, X.-L., and Cinnella, P., "Comprehensive Numerical Study of Jet-Flow Impingement over Flat Plates," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 3, 2002, pp.357-366.

[4] Alvi, F. S., Ladd, J. A., and Bower, W. W., "Experimental and Computational Investigation of Supersonic Impinging Jets," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 4, 2002, pp.599-609.

[5] Park, S. H., and Kwon, J. H., "On the dissipation mechanism of Godunov-type schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 188, Issue 2, 2003, pp.524-542.

[6] 박수형, 권장혁, " $k-w$ 난류방정식을 위한 다중 격자기법의 수렴성 연구," *전산유체공학회지*, 제 7권, 제4호, 2002, pp.19-27.

[7] Wilcox, D. C., "Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models," *AIAA Journal*, Vol. 26, No.11, 1988, pp.1299-1310.

[8] Thivet, F., "Lessons Learned from RANS Simulations of Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions," *AIAA Paper 2002-0583*, Jan. 2002.

[9] Menter, F. R., "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications," *AIAA Journal*, Vol. 32, No.8, 1994, pp.1598-1605

[10] 조금원, "상대운동이 있는 3차원 비정상 유동해석을 위한 효율적인 중첩격자계 개발," 박사학위논문, 한국과학기술원, 2000.

[11] Liu, F., and Zheng, X., "A Strongly Coupled Time-Marching Method for Solving the Navier-Stokes and $k-w$ Turbulence Model Equations with Multigrid," *Journal of Computational Physics*, Vol. 128, No. 2, 1996, pp.289-300.

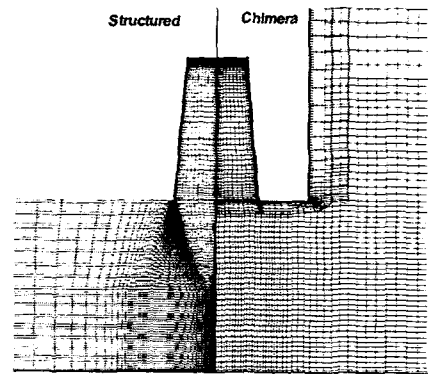


Fig. 1 정렬격자계와 중첩격자계의 구성

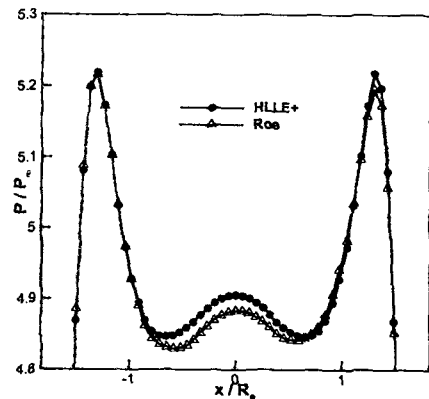


Fig. 2 총돌면의 압력분포, $\bar{h} = 4.0$

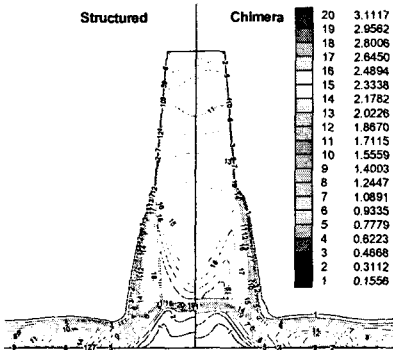


Fig. 3 마하수 분포, $\bar{h} = 4.0$
(축대칭 정렬격자계/축대칭 중첩격자계)

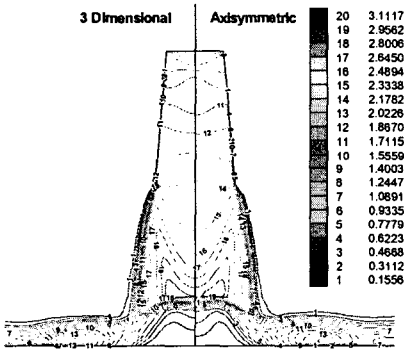


Fig. 4 마하수 분포, $\bar{h} = 4.0$ (3D/축대칭)

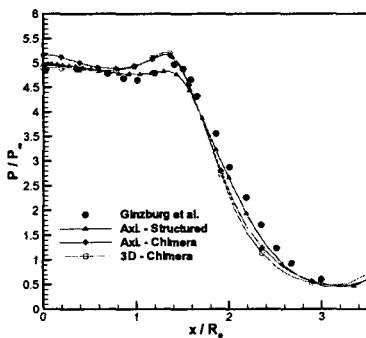
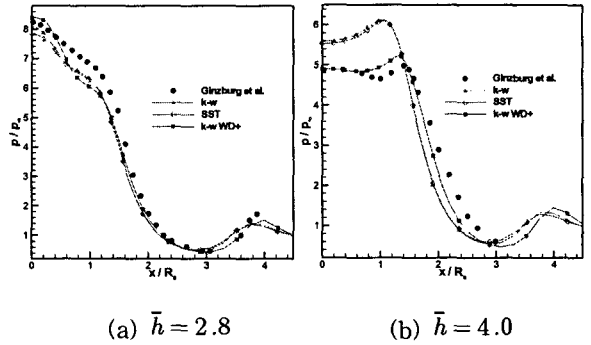
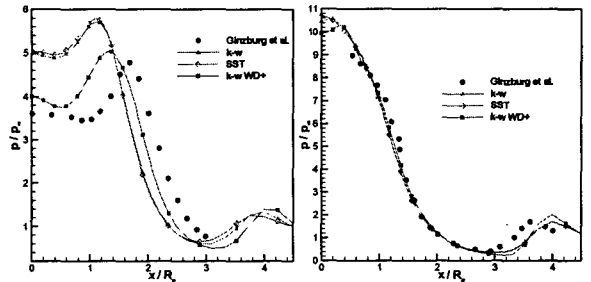


Fig. 5 충돌면의 압력 비교, $\bar{h} = 4.0$



(a) $\bar{h} = 2.8$

(b) $\bar{h} = 4.0$



(c) $\bar{h} = 5.2$

(d) $\bar{h} = 6.8$

Fig. 6 난류모형에 따른 충돌면의 압력비교

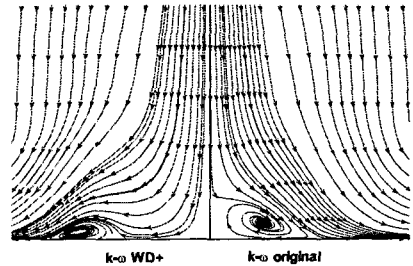
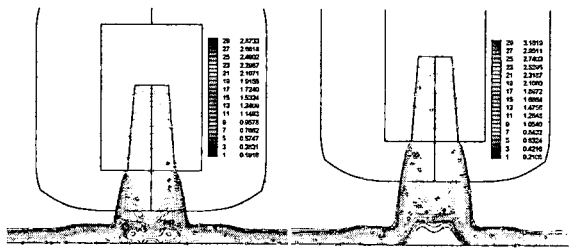
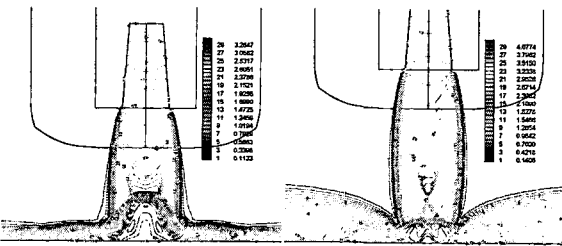


Fig. 7 난류모형에 따른 streamline, $\bar{h} = 4.0$



(a) $\bar{h} = 2.8$

(b) $\bar{h} = 4.0$



(c) $\bar{h} = 5.2$

(d) $\bar{h} = 6.8$

Fig. 8 대칭면의 마하수 분포
($k-w$ WD+ 난류모형)