

## 미소평판 주위의 저속 유동장 해석

정 찬 흥<sup>\*1</sup>

## Numerical Simulation of Low-Speed Gas Flows Around a Micro-Plate

C. H. Chung

A kinetic theory analysis is made of low-speed gas flows around a micro-plate. The Boltzmann equation simplified by a collision model is solved by means of a finite difference approximation with the discrete ordinate method. The method does not suffer from statistical noise which is common in particle based methods and requires much less amount of computational effort. Calculations are made for flows around a micro-scale flat plate with a finite length of 20 microns. The method is assessed by comparing the results with those from several different methods and available experimental data.

**Key Words:** 전산유체역학(CFD), 저속유동(Low Speed Flow), 희박기체유동(Rarefied Gas Flow) 볼츠만 방정식(Boltzmann Equation), BGK 모델(BGK Model)

## 1. 서 론

최근 미세항공기(MAV)에 대한 관심이 대두되고 있다 [1]. 현재의 MAV는 대부분 기존 항공기의 축소판으로, 코드 길이가 수 cm인 익형 주위의 저 레이놀즈수 유동장을 이해하기 위한 연구의 필요성이 증대되고 있다. 미래에는 현재 보다 훨씬 소형의 MAV가 개발될 것이며 이 경우 낮은 고도에서도 익형 주위의 유동장이 미끄럼 및 천이영역에 도달하게 되어 희박류 환경에서의 저 레이놀즈수 유동장에 대한 이해가 MAV의 설계에 중요한 요소가 될 것이다 유동장의 특성을 구분할 수 있는 척도는 평균자유행로(mean free path)  $\lambda$ 와 특성거리(characteristic length scale)  $L$ 의 비인 누센수(Knudsen number)  $Kn = \lambda/L$ 이다. 누센수에 따라서 유장은 연속체영역(continuum flow regime,  $Kn < 0.01$ ), 미끄럼영역(slip flow regime,  $0.01 < Kn < 0.1$ ), 천이영역

(transitional flow regime,  $0.1 < Kn < 10$ ), 및 자유분자영역(free molecular flow regime,  $10 < Kn$ )으로 나누어진다.

미끄럼, 천이 및 자유분자영역의 미세 저 레이놀즈수 유동장은 Navier-Stokes 방정식 등 연속체영역에 적용되는 기존의 CFD 기법으로 해석하기 어려우며, 비연속체영역에서의 유체의 이동 및 전달현상을 분석하기 위해서 phase space에서의 분포함수에 대한 보존식인 Boltzmann 방정식을 풀어야 한다.

Boltzmann 방정식의 강력한 해석 기법인 직접모사법(Direct Simulation Monte-Carlo method)의 [2] 가장 취약한 부분은 저속 유동장 해석이다. 지금까지 직접모사법을 적용한 수많은 연구결과들이 발표되었으나 고속 유동장이 대부분이고, 저속의 경우 유동장의 특성길이가 평균자유행로의 수십 배 이하인 경우에 한정되어 있다. 저속 유동장을 직접모사법으로 수치해석 시 통계적 산란(Statistical noise)으로 인하여 현재의 전산처리 능력으로는 기존의 직접모사법을 이용한 실용적인 저속 유동장 분석은 불가능하다고 알려져 있다 [3]. 최근에는 직접모사법과

\*1 정희원, 대구대학교 화학공학과

\*E-mail : chc@webmail.daegu.ac.kr

병행하여 macroscopic 유동변수들을 함께 계산 및 저장하여 CPU time을 수천 배 이상 줄일 수 있는 IP(Information Preservation) DSMC 방법이 [4] 제시되었으나 아직도 막대한 전산처리용량을 필요로 하며 정확도의 검증이 더 필요하다.

본 연구에서는 모델 충돌적분항(Model Collision Integral)으로 단순화된 Boltzmann 방정식을 Discrete Ordinate 방법과 결합된 유한차분법을 [5] 이용하여 미소평판 주위의 저 레이놀즈수 유동장을 해석하였다.

## 2. 해석 기법

### 2.1 Model Equation

2차원 Cartesian 좌표계에서 BGK 모델 Boltzmann 방정식은 [5] 정상상태에서 아래의 식으로 기술된다.

$$V_x \frac{\partial f}{\partial x} + V_y \frac{\partial f}{\partial y} = A_c (F - f) \quad (1)$$

여기에서  $V_x, V_y, V_z$ 는 각 방향의 분자속도,  $f(x, y, V_x, V_y, V_z)$ 은 수밀도분포함수(number density distribution function),  $A_c$ 는 충돌빈도(collision frequency)이다. 국지평형분포함수(local equilibrium distribution)  $F$ 는 아래의 식으로 주어진다.

$$F = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(V-U)^2}{2RT}\right] \quad (2)$$

유동장의 거시흐름변수(macroscopic flow variable)인 수밀도  $n$ , 속도  $U$ , 온도  $T$  등은 다음과 같이 수밀도분포함수를 분자속도계에 대하여 적분하여 구할 수 있다.

$$n(\vec{\eta}) = \int f(V, \vec{\eta}) dV \quad (3.1)$$

$$nU(\vec{\eta}) = \int V f(V, \vec{\eta}) dV \quad (3.2)$$

$$\frac{3}{2} nRT(\vec{\eta}) = \frac{1}{2} \int V^2 f(V, \vec{\eta}) dV \quad (3.3)$$

여기에서  $\vec{p}$ 는 peculiar velocity  $\vec{p} = V - U$ 이다. 아래의 축소분포함수(reduced distribution function)

를 [6] 도입하여  $z$  방향의 분자속도에 대하여 적분한 후

$$g(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, V_x, V_y) dV_z \quad (4.1)$$

$$h(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_z^2 f(x, y, V_x, V_y) dV_z \quad (4.2)$$

독립변수의 수를 줄이면 다음의 식을 얻는다.

$$V_x \frac{\partial g}{\partial x} + V_y \frac{\partial g}{\partial y} + A_c g = A_c G \quad (5.1)$$

$$V_x \frac{\partial h}{\partial x} + V_y \frac{\partial h}{\partial y} + A_c h = A_c H \quad (5.2)$$

$$G(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F dV_z \quad (5.3)$$

$$H(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_z^2 F dV_z \quad (5.4)$$

유동장의 특성거리  $L$ 과 기준 상태에서의 평균분자속도(most probable speed)  $V_o = \sqrt{2RT}$ 를 이용하여 아래의 무차원 변수들을 도입한 후

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x/L, \quad \hat{y} = y/L, \quad \hat{n} = n/n_o, \quad \hat{V}_i = V_i/V_o \\ \hat{U}_i &= U_i/V_o, \quad \hat{T} = T/T_o, \quad \hat{A}_c = A_c L/V_o, \quad \hat{g} = g V_o^3/n_o \\ \hat{h} &= h/n_o, \quad \hat{G} = G V_o^3/n_o \\ \hat{H} &= H/n_o \end{aligned} \quad (6)$$

분자속도계에 다음의 극좌표계(Polar Coordinate System)를 도입한 후

$$\hat{V}_x = \hat{V} \sin \phi \quad (7.1)$$

$$\hat{V}_y = \hat{V} \cos \phi \quad (7.2)$$

$$\phi = \tan^{-1}(\hat{V}_x / \hat{V}_y) \quad (7.3)$$

물리좌표계를 일반좌표계로 변환하면 다음의 지배방정식을 얻는다.

$$B \frac{\partial g}{\partial \eta} + C \frac{\partial g}{\partial \xi} + A_c g = A_c G \quad (8.1)$$

$$B \frac{\partial h}{\partial \eta} + C \frac{\partial h}{\partial \xi} + A_c h = A_c H \quad (8.2)$$

$$B = (V \cos \phi x_\xi - V \sin \phi y_\eta) / J_t \quad (8.3)$$

$$C = (V \sin \phi x_\eta - V \cos \phi y_\eta) / J_t \quad (8.4)$$

무차원변수 표시기호  $\hat{\cdot}$ 는 편의상 모든 변수에서 생략되었으며,  $J_t$ 는 변환의 자코비안(Jacobian)이다.

2.2 Discrete Ordinate Method

Gauss-Hermite 반구적공식(Half range quadrature)은 [7] 다음의 식과 같이 함수에 관한 적분을 마디(root)  $V_\delta$ 에서의 계수((weight)  $P_\delta$ 을 이용하여 변환하는 방법이다.

$$\int_0^\infty e^{-V^2} V^a Q(V) dV = \sum_{\delta=1}^N P_\delta Q(V_\delta) \quad (9)$$

속도각(velocity angle)  $\phi$ 에 대한 적분에는 Simpson 규칙을 도입하면 거시흐름변수를 구하기 위한 속도계에 관한 적분들은 다음의 구적법으로 표시될 수 있다.

$$n = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma g_{\delta\sigma} \quad (10.1)$$

$$nU_x = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma V_\delta \sin \phi_\sigma g_{\delta\sigma} \quad (10.2)$$

$$nU_y = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma V_\delta \cos \phi_\sigma g_{\delta\sigma} \quad (10.3)$$

$$\frac{3}{2} nT = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma (h_{\delta\sigma} + V_\delta^2 g_{\delta\sigma}) - n(U_x^2 + U_y^2) \quad (10.4)$$

여기에서  $N$ 은 Gauss-Hermite 반구적공식의 차수(order)이고,  $K$ 는 Simpson 규칙에서 소구간의 개수이다.

볼츠만식의 해를 구하는 목적은 분포함수  $f$  자체보다는 거시흐름변수를 구하는 것이므로 지배방정식은 다음과 같이 분자속도계에 독립적인  $2 \times N \times K$  개의 별개의 식(discrete equation)으로 변형될 수 있다.

$$B \frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \eta} + C \frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \xi} + A_x g_{\delta\sigma} = A_c G_{\delta\sigma} \quad (11.1)$$

$$B \frac{\partial h_{\delta\sigma}}{\partial \eta} + C \frac{\partial h_{\delta\sigma}}{\partial \xi} + A_x h_{\delta\sigma} = A_c H_{\delta\sigma} \quad (11.2)$$

$$B = (V_\delta \cos \phi_\sigma x_\xi - V_\delta \sin \phi_\sigma y_\eta) / J_t \quad (11.3)$$

$$C = (V_\delta \sin \phi_\sigma x_\eta - V_\delta \cos \phi_\sigma y_\eta) / J_t \quad (11.4)$$

$$G_{\delta\sigma} = \frac{n}{\pi T} \exp \left\{ - \left[ (V_\delta \sin \phi_\sigma - U_x)^2 + (V_\delta \cos \phi_\sigma - U_y)^2 / T \right] \right\} \quad (11.5)$$

$$H_{\delta\sigma} = \frac{1}{2} T G_{\delta\sigma} \quad (11.6)$$

2.3 유한차분법

위의 식을 풀기위하여 물리적공간계와 속도계의 특성에 따라 아래의 단순 양함수법(simple explicit scheme)을 이용하면

$$\frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \xi} = \frac{g_{\delta\sigma}(\xi, \eta) - g_{\delta\sigma}(\xi - js\Delta\xi, \eta)}{js\Delta\xi} \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \eta} = \frac{g_{\delta\sigma}(\xi, \eta) - g_{\delta\sigma}(\xi, \eta - is\Delta\eta)}{is\Delta\eta} \quad (12.2)$$

$$is = \text{sign}[(V_\delta \cos \phi_\sigma x_\xi - V_\delta \sin \phi_\sigma y_\eta) / J_t] \quad (12.3)$$

$$js = \text{sign}[(V_\delta \sin \phi_\sigma x_\eta - V_\delta \cos \phi_\sigma y_\eta) / J_t] \quad (12.4)$$

아래의 유한차분방정식을 얻는다.

$$g_{\delta\sigma}(\xi, \eta) = [D_\sigma G_{\delta\sigma}(\xi, \eta) + B_\sigma g_{\delta\sigma}(\xi, \eta - is\Delta\eta) + C_\sigma g_{\delta\sigma}(\xi - js\Delta\xi, \eta)] / (B_\sigma + C_\sigma + D_\sigma) \quad (13.1)$$

$$B_\sigma = is(\cos \phi_\sigma x_\xi - \sin \phi_\sigma y_\eta) / (J_t \Delta\eta) \quad (13.2)$$

$$C_\sigma = js(\sin \phi_\sigma x_\eta - \cos \phi_\sigma y_\eta) / (J_t \Delta\xi) \quad (13.3)$$

$$D_\sigma = A_\sigma / V_\delta \quad (13.4)$$

동일한 방법을 적용하면  $h_{\delta\sigma}$ 에 대하여도 유사한 방정식을 얻는다. 위의 방정식을 반복계산법을 이용하여 해석할 때에 분포함수  $g_{\delta\sigma}$ 와  $h_{\delta\sigma}$ 의 값은 다음 단계를 위하여 저장할 필요가 없으며 단지  $A_c G_{\delta\sigma}$  및  $H_{\delta\sigma}$ 의 값만 직전 단계의 거시흐름변수를 이용하여 계산하면 된다.

2.4 경계조건

원방경계에서는 유장이 평형상태에 놓여있으므로

분포함수가 다음의 Maxwell 분포로 주어진다.

$$g_{\infty} = \frac{n}{\pi T_b} \exp\left\{-\left[\frac{(V_{\delta} \sin \phi_{\sigma} - U_{x,b})^2}{T_b} + (V_{\delta} \cos \phi_{\sigma} - U_{y,b})^2 / T_b\right]\right\} \quad (14.1)$$

$$h_{\infty} = \frac{1}{2} T_b g_{\infty} \quad (14.2)$$

여기서 하첨자  $b$ 는 원방경계를 나타낸다. 표면에서는 반사된 분자가 표면의 온도  $T_w$ 에 따른 Maxwell 분포를 갖는 diffuse 반사조건이 사용되었다.

$$g_w = \frac{n_w}{\pi T_w} \exp\left\{-\left[\frac{(V_{\delta} \sin \phi_{\sigma} - U_{w,x})^2}{T_w} + (V_{\delta} \cos \phi_{\sigma} - U_{w,y})^2 / T_w\right]\right\} \quad (15.1)$$

$$h_w = \frac{1}{2} T_w g_w \quad (15.2)$$

for  $(\vec{c} \cdot \vec{n}) < 0$

여기서  $\vec{n}$ 은 표면내방향 (inward normal to surface) 법선벡터이다.  $n_w$ 은 표면수밀도흐름(wall number flux)으로 미리 알 수 없으며, 표면에서 법선방향의 순수밀도흐름(net flux normal to surface)이 없다는 조건을 적용하여 계산되어야만 한다.

$$\int_{(\vec{c} \cdot \vec{n}) > 0} (\vec{c} \cdot \vec{n}) f d\vec{c} = - \int_{(\vec{c} \cdot \vec{n}) < 0} (\vec{c} \cdot \vec{n}) F d\vec{c} \quad (16)$$

### 2.5 Collision Frequency

BGK model의 경우 충돌빈도는 다음과 같이 주어진다.

$$A_c = \frac{\psi P}{\mu} \quad (17)$$

여기에서  $P$ 는 압력,  $k$ 는 Boltzmann 상수,  $R$ 은 기체상수이다. 충돌빈도를 계산하기 위하여 강구모델(Hard Sphere model)의 평균자유행로(mean free path)를 이용하는 경우 모델상수  $\psi$ 는 일반적으로 2/3에서 1사이의 값을 [8] 가진다.  $\mu$ 는 coefficient

of viscosity이며, 다음과 같은 온도 의존성을 [9] 갖고 있다. 여기서 하첨자  $o$ 는 기준상태를 나타낸다.

$$\frac{\mu}{\mu_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\omega} \quad (18)$$

가변강구(Variable Hard Sphere) 분자모델의 [1] 경우 기준상태에서의 평균자유행로(mean free path)  $\lambda_o$ 는 점도  $\mu_o$ 와 다음의 관계로 나타낼 수 있다.

$$\lambda_o = \frac{16}{5} \frac{F_k \mu_o}{m_o (2\pi RT_o)^{1/2}} \quad (19.1)$$

$$F_k = \frac{(7-2\omega)(5-2\omega)}{24} \quad (19.2)$$

따라서 무차원화된 충돌빈도는 가변강구 분자모델의 평균자유행로를 이용하는 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_c = Z F_k \frac{8n T^{1-\omega}}{5 \sqrt{\pi} K n} \quad (20)$$

여기서  $Kn$ 는 기준상태에서의 누센수(Knudsen Number)이다.

$$Kn = \frac{\lambda_o}{L} \quad (21)$$

### 3. 해석 결과

자유류와 평행으로 놓여있는 두께가 없는 2차원 평판유동은 단순 유장이나, 코드를 검증할 수 있는 기본적인 유장이다. 본 연구에서 해석된 평판의 길이는 20  $\mu$ m로, 유동영역은 x축 좌우 및 y축 상하로 각각 평판 길이의 4배이다. 자유류의 속도 및 온도는 69m/s 및 295K로 마하수가 0.2이다. 평판의 온도는 자유류의 온도와 같은 295K이다. 계산영역은 241×161의 격자계로 전체 격자점은 38,801개이다. 계산에 사용된 점도지수(viscosity exponent)는  $\omega=0.7$ , 모델상수는  $Z=0.89$ 이다.

프로그램의 정확도를 검증하기 위하여 이론값이 존재하는 자유분자흐름에서의 계산결과가 이론값과 비교되었다. 평판의 온도가 자유류에서의 온도와 같

은 경우 표면에서의 압력과 표면마찰계수는 자유류 및 표면에서의 분포함수를 이용하여 다음의 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}P &= \frac{3}{4}\{\exp(-U_{\infty,y}^2) \\ &\quad -\sqrt{\pi}U_{\infty,y}^2[1-\operatorname{erf}(-U_{\infty,y}^2)]\} \\ &\quad +\frac{1}{2}[1-\operatorname{erf}(-U_{\infty,y}^2)] \\ &\quad +\frac{1}{4}[1-\operatorname{erf}(-U_{\infty,y}^2)](1+2U_{\infty,x}^2) \\ &\quad +\frac{1}{2}U_{\infty,y}^2[1-\operatorname{erf}(-U_{\infty,y}^2)] \\ &\quad +\frac{U_{\infty,y}}{\sqrt{\pi}U_{\infty,y}^2}\exp(-U_{\infty,y}^2)-nU_x^2 \end{aligned} \quad (22.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_w &= \frac{2U_{\infty,x}}{\sqrt{\pi}U_{\infty,y}^2}\left\{-\frac{1}{2}\exp(-U_{\infty,y}^2) \right. \\ &\quad \left. +\frac{\sqrt{\pi}}{2}U_{\infty,y}[1-\operatorname{erf}(-U_{\infty,y}^2)]\right\} \end{aligned} \quad (22.2)$$

위의 식에서 모든 속도는 평균분자속도  $V_o = \sqrt{2RT}$ 로 나누어진 무차원 속도, 수밀도  $n$ 과 압력  $P$ 도 자유흐름영역에서의 값으로 나누어준 무차원 변수이고, 표면마찰계수는  $1/2\rho U_{\infty}^2$ 으로 나누어준 값이다. Figures 1과 2는 각각 자유분자흐름영역에서 받음각의 변화에 대한 표면에서의 압력의 변화와 표면마찰계수의 변화이다. 그림에서 실선은 식 (22.1) 및 (22.2)로 주어지는  $Kn = \infty$  또는  $Re = 0$ 일 때의 이론값이며, 원들은 각각  $Kn = 100$  및  $Kn = 10$ 일 때의 유동해석 결과로 평판 중간위치( $x = L/2$ )에서의 값이다. 본 연구의 해석기법이 자유분자흐름영역에서 유동장을 정확하게 해석할 수 있음을 보여준다.

Figure 3은 자유류 속도를 고정시키고 밀도를 변화시켰을 때 회박도에 따른 압력분포의 변화를 보여준다. (a)의 경우는 레이놀즈수가  $Re = 1$ 이며 누센수는 약  $Kn = 0.25$ 로 천이영역(transition regime,  $0.1 < Kn < 1.0$ )에 해당된다. (b)의 경우는 레이놀즈수가  $Re = 10$ 이며 누센수는 약  $Kn = 0.025$ 로 미끄럼영역(slip flow regime,  $0.001 < Kn < 0.1$ )에 해당된다. (c)의 경우는 레이놀즈수가  $Re = 100$ 이며

누센수는 약  $Kn = 0.0025$ 로 연속체영역(continuum flow regime,  $Kn < 0.001$ )에 가까운 미끄럼영역에 해당된다. 레이놀즈수가 커질수록 즉 연속체 영역에 가까워질수록 유동장에 대한 평판의 영향이 미치는 영역이 평판 주위로 축소됨을 볼 수 있다.

Figure 4에는 레이놀즈수의 변화에 대한 항력계수의 변화가 Information Preservation 방법(IP) [11], 압축성유체실험값 [12], 비압축성유체실험값 [13], 비압축성유체에 대한 Navier-Stokes 식의 수치해석값 [14] 및 boundary layer 이론에 의한 Blasius 방법을 [15] 이용한 결과들과 비교되었다. 레이놀즈수가 5보다 큰 경우 Blasius 방법을 제외한 다른 방법을 이용한 결과들이 실험값과 비교적 잘 일치하고 있으며, 레이놀즈수가 2 이하의 경우 Navier-Stokes 식을 이용한 방법은 사용될 수 없음을 보여주고 있다. 레이놀즈수가 2 이하의 경우 IP 방법을 이용한 결과와 본 연구의 결과에 상당한 차이를 보이고 있다. 실험값이 존재하지 않는 이 영역에서 두 방법의 정확도를 비교할 방법은 이론값이 존재하는 자유분자영역에서의 값을 검토하는 것이다. 본 연구의 결과는  $Re = 0.025$  ( $Kn = 10$ ) 보다 작은 영역에서 자유분자영역 ( $Re = 0, Kn = \infty$ )에 대한 이론값에 근접하였으나, IP 방법의 결과는 천이영역인  $Re = 0.2$  ( $Kn = 1.5$ )에서 이미 자유분자영역의 이론값에 근접하여 자유분자 및 천이영역에서 IP방법의 정확성에 대한 검증이 더 필요할 것으로 사료된다.

## 4. 결론

모델 충돌적분항으로 단순화된 Boltzmann 방정식을 Discrete Ordinate 방법과 결합된 유한차분법을 이용하여 특성길이가  $20 \mu m$ 인 미소평판 주위의 저 레이놀즈수 유동장을 해석하였다.

본 연구의 해석방법을 검증하기 위하여 자유분자영역의 해석결과가 이론값과, 천이 및 미끄럼영역의 해석결과는 실험값 및 다른 여러 가지 방법에 의한 계산결과와 비교되었다.

이 방법은 statistical noise가 없고 전산요구량이 적으며 저속 및 고속 유동장에 모두 적용할 수 있는 방법이다.

## 후 기

본 연구는 국방과학연구소 기초연구사업의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] 안준, "초소형 항공기(MAV)의 개발 현황 및 전망," 한국항공우주학회지 제28권 제7호, 2000, pp.145-154.
- [2] Bird, G. A., *Molecular Gas Dynamics and The Direct Simulation of Gas Flows*, Oxford University Press, London, 1994.
- [3] Oh, C. K., Oran, E. S., and Sinkovits, R. S., "Computations of High-Speed, High Knudsen Number Microchannel Flows," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 11, No. 4, 1997, pp. 497-505.
- [4] Fan, J. and Shen, C., "Statistical Simulation of Low-Speed Rarefied Gas," *Journal of Computational Physics*, Vol. 167, 2001, pp. 393-412.
- [5] Chung, C. H., De Witt, K. J., Jeng, D. R., and Keith Jr., T. G., "Numerical Analysis of Rarefied Gas Flow Through a Slit," *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 6, No. 1, 1992, pp. 27-34.
- [6] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M., "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," *Physicaal Review*, Vol. 94, No. 3, 1954, pp. 511-525.
- [7] Chu, C. K., "Kinetic-Theoretic Description of the Formation of a Shock Wave," *Physics of Fluids*, Vol. 8, No. 1, 1965, pp. 12-22.
- [8] Shizgal, B., "A Gaussian Quadrature Procedure for Use in the Solution of the Boltzmann Equation and Related Problems," *J. of Computational Physics*, Vol. 41, No. 2, 1981, pp. 309-327.
- [9] Atassi, H. and Shen, S. F., "A Unified Kinetic Theory Approach to External Rarefied Gas Flows. Part 1. Derivation of Hydrodynamic Equations," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 53, Part 3, 1972, pp. 417-431.
- [10] Chapman, S., and Cowling, T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, London (1958).
- [11] Sun, Q., Boyd, I. D., and Candler, G. V., "Numerical Simulation of Gas Flow Over Micro-Scale Airfoils," *AIAA paper 2001-3071*, 2001.
- [12] Schaaf, S. A. and Sherman, F. S., "Skin Friction in Slip Flow," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 21, No. 2, 1954, pp. 85-89.
- [13] Janour, Z., "Resistance of a Plate in Parallel Flow at Low Reynolds Numbers," *NACA TM 1316*, 1951.
- [14] Dennis, S. C. and Dunwoody, J., "The Steady Flow of a Viscous Fluid past a Flat Plate," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 24, No. 3, 1966, pp. 577-595.
- [15] Churchill, S. W., "Viscous Flows: The Practical Use of the Theory," *Butterworth Publishers, Stoneham*, 1988.

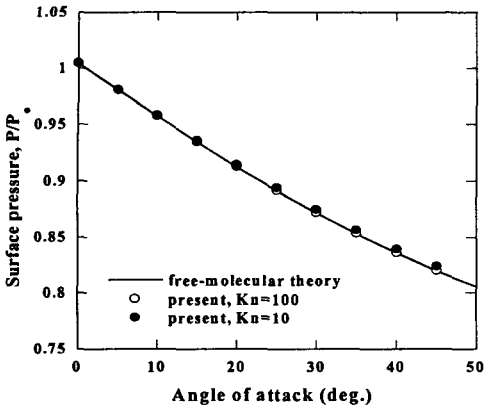


Fig. 1 자유흐름영역에서 받음각에 대한 표면압력의 변화.

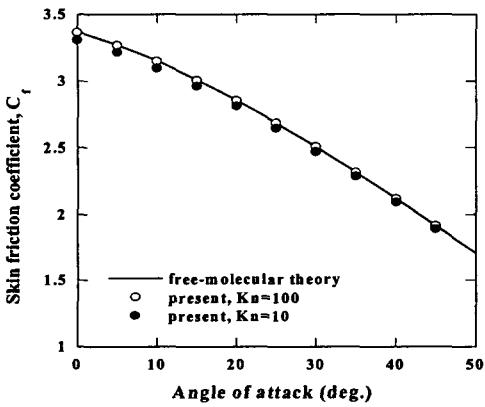


Fig. 2 자유흐름영역에서 받음각에 대한 표면마찰계수의 변화.

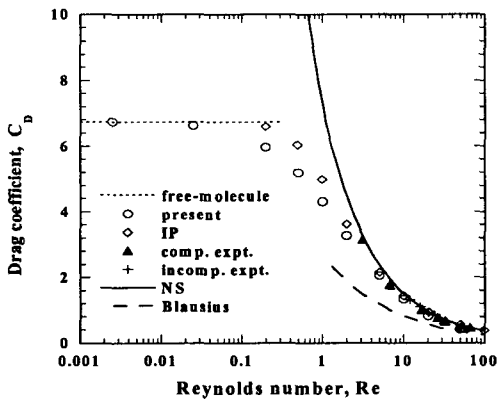
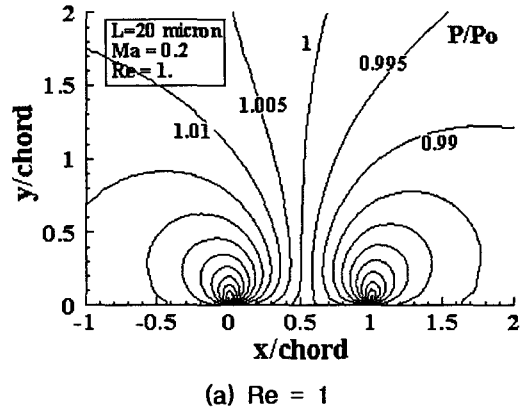
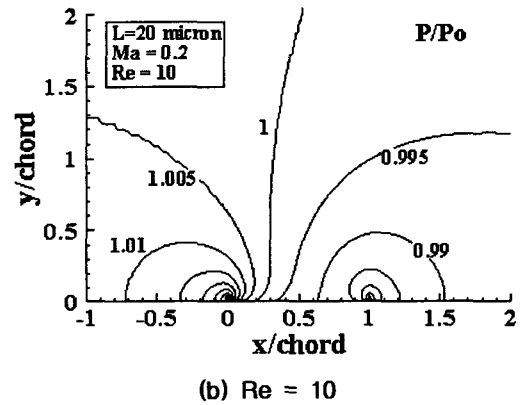


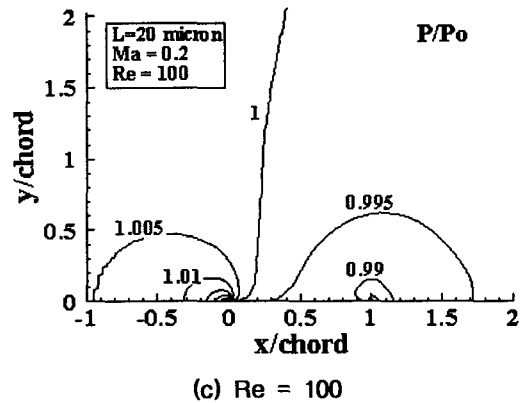
Fig. 4 Drag coefficient of a finite plate at low Reynolds numbers.



(a) Re = 1



(b) Re = 10



(c) Re = 100

Fig. 3 고정된 자유류 속도에서 희박도의 압력분포에 대한 영향.