

모델 볼츠만방정식을 이용한 마이크로채널 유동 해석

정 찬 흥^{*1}

Analysis of Microchannel Flows Using a Model Boltzmann Equation

C. H. Chung

A kinetic theory analysis is made of low-speed gas flows in microchannels. The Boltzmann equation simplified by a collision model is solved by means of a finite difference approximation with the discrete ordinate method. The method does not suffer from statistical noise which is common in particle based methods and requires much less amount of computational effort. Calculations are made for flows in simple microchannels and a microfluidic system consisting of two microchannels in series. The method is assessed by comparing the results with those from several different methods and available experimental data.

Key Words: 전산유체역학(CFD), 저속유동(Low Speed Flow), 마이크로채널 유동(Microchannel Flow) 볼츠만 방정식(Boltzmann Equation), BGK 모델(BGK Model)

1. 서 론

MEMS는 크기가 수백 nm에서 수 mm에 이르는 초소형 시스템이나 초소형 정밀기계를 의미하며, 전기전자, 기계, 소형화 및 바이오 분야 등 상용에서 군수용에 이르기 까지 무궁무진한 응용처를 가지고 있는 21세기의 산업적 요구를 충족시킬 수 있는 중요한 기술이다. MEMS 기술의 발전을 위하여는 미세가공기술의 발전과 더불어 MEMS 장치들의 효율적인 설계를 위한 micron 및 submicron 스케일의 유동장 대한 이해와 분석이 필수적이다. 이미 수년 전부터 다양한 응용제품이 나오고 있는 가공기술 분야의 빠른 발전에도 불구하고, MEMS 장치 내에서의 유체의 흐름을 분석하고 예측할 수 있는 기술의 개발은 종래와는 다른 microscale 유동장의 특성으로 인하여 많은 어려움을 겪고 있는 실정이다. 미소 MEMS 유동장은 Navier-Stokes 방정식을 이용한

기존의 CFD 기법이 적용되지 않는 새로운 유동영역이기 때문이다. 미끄럼, 천이 및 자유분자영역의 저속 microchannel 유동장은 Navier-Stokes 방정식 등 연속체영역에 적용되는 기존의 CFD 기법으로 해석하기 어려우며, 비연속체영역에서의 유체의 이동 및 전달현상을 분석하기 위해서 phase space에서의 분포함수에 대한 보존식인 Boltzmann 방정식을 풀어야 한다.

Boltzmann 방정식의 강력한 해석 기법인 직접모사법(Direct Simulation Monte-Carlo method)의 [1] 가장 취약한 부분은 저속 유동장 해석이다. 지금까지 직접모사법을 적용한 수많은 연구결과들이 발표되었으나 고속 유동장이 대부분이고, 저속의 경우 유동장의 특성길이가 평균자유행로의 수십 배 이하인 경우에 한정되어 있다. 저속 유동장을 직접모사법으로 수치해석 시 통계적 산란(Statistical noise)으로 인하여 현재의 전산처리 능력으로는 기존의 직접모사법을 이용한 실용적인 저속 유동장 분석은 불가능하다고 알려져 있다 [2]. 최근에는 직접모사법과 병행하여 macroscopic 유동변수들을 함께 계산 및

*1 정회원, 대구대학교 화학공학과

*E-mail : chc@webmail.daegu.ac.kr

저장하여 CPU time을 수천 배 이상 줄일 수 있는 IP(Information Preservation) DSMC 방법이 [3] 제시되었으나 아직도 막대한 전산처리용량을 필요로 하며 정확도의 검증이 더 필요하다.

본 연구에서는 모델 충돌적분항(Model Collision Integral)으로 단순화된 Boltzmann 방정식을 Discrete Ordinate 방법과 결합된 유한차분법을 [4] 이용하여 길이와 높이의비 L/h 가 30인 작은 마이크로 채널, L/h 가 2,500으로 큰 마이크로 채널 및 두 개의 채널이 직렬로 연결된 마이크로 시스템 내부의 저속 유동장을 해석하였으며, 검증을 위하여 해석결과가 실험값 및 다른 여러 가지 방법에 의한 계산결과와 비교되었다.

2. 해석 기법

2.1 Model Equation

2차원 Cartesian 좌표계에서 BGK 모델 Boltzmann 방정식은 [5] 정상상태에서 아래의 식으로 기술된다.

$$V_x \frac{\partial f}{\partial x} + V_y \frac{\partial f}{\partial y} = A_c(F-f) \quad (1)$$

여기에서 V_x, V_y, V_z 는 각 방향의 분자속도, $f(x, y, V_x, V_y, V_z)$ 은 수밀도분포함수(number density distribution function), A_c 는 충돌빈도(collision frequency)이다. 국지평형분포함수(local equilibrium distribution) F 는 아래의 식으로 주어진다.

$$F = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(V-U)^2}{2RT}\right] \quad (2)$$

유동장의 거시흐름변수(macroscopic flow variable)인 수밀도 n 속도 U 온도 T 등은 다음과 같이 수밀도분포함수를 분자속도계에 대하여 적분하여 구할 수 있다.

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{V}, \vec{r}) dV \quad (3.1)$$

$$nU(\vec{r}) = \int V f(\vec{V}, \vec{r}) dV \quad (3.2)$$

$$\frac{3}{2} nRT(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int V^2 f(\vec{V}, \vec{r}) dV \quad (3.3)$$

여기에서 \vec{f} 는 peculiar velocity $\vec{f} = \vec{V} - \vec{U}$ 이다. 아래의 축소분포함수(reduced distribution function)를 [6] 도입하여 z 방향의 분자속도에 대하여 적분한 후

$$g(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, V_x, V_y) dV_z \quad (4.1)$$

$$h(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_z^2 f(x, y, V_x, V_y) dV_z \quad (4.2)$$

독립변수의 수를 줄이면 다음의 식을 얻는다.

$$V_x \frac{\partial g}{\partial x} + V_y \frac{\partial g}{\partial y} + A_c g = A_c G \quad (5.1)$$

$$V_x \frac{\partial h}{\partial x} + V_y \frac{\partial h}{\partial y} + A_c h = A_c H \quad (5.2)$$

$$G(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F dV_z \quad (5.3)$$

$$H(x, y, V_x, V_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_z^2 F dV_z \quad (5.4)$$

유동장의 특성거리 L 과 기준 상태에서의 평균분자속도(most probable speed) $V_o = \sqrt{2RT}$ 를 이용하여 아래의 무차원 변수들을 도입한 후

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x/L & \hat{y} &= y/L & \hat{n} &= n/n_o & \hat{V}_i &= V_i/V_o \\ \hat{U}_i &= U_i/V_o & \hat{T} &= T/T_o & \hat{A}_c &= A_c L/V_o & \hat{g} &= gV_o^2/n_o \\ \hat{h} &= h/n_o & \hat{G} &= GV_o/n_o & & & & \\ \hat{H} &= H/n_o & & & & & & \end{aligned} \quad (6)$$

분자속도계에 다음의 극좌표계(Polar Coordinate System)를 도입한 후

$$\hat{V}_x = \hat{V} \sin \phi \quad (7.1)$$

$$\hat{V}_y = \hat{V} \cos \phi \quad (7.2)$$

$$\phi = \tan^{-1}(\hat{V}_x/\hat{V}_y) \quad (7.3)$$

물리좌표계를 일반좌표계로 변환하면 다음의 지배방

정식을 얻는다.

$$B \frac{\partial g}{\partial \eta} + C \frac{\partial g}{\partial \xi} + A_x g = A_c G \quad (8.1)$$

$$B \frac{\partial h}{\partial \eta} + C \frac{\partial h}{\partial \xi} + A_x h = A_c H \quad (8.2)$$

$$B = (V \cos \phi_{x\xi} - V \sin \phi_{y\xi}) / J_t \quad (8.3)$$

$$C = (V \sin \phi_{x\eta} - V \cos \phi_{y\eta}) / J_t \quad (8.4)$$

무차원변수 표시기호 $\hat{\cdot}$ 는 편의상 모든 변수에서 생략되었으며, J_t 는 변환의 자코비안(Jacobian)이다.

2.2 Discrete Ordinate Method

Gauss-Hermite 반구적공식(Half range quadrature)은 [7] 다음의 식과 같이 함수에 관한 적분을 마디(root) V_δ 에서의 계수((weight) P_δ 을 이용하여 변환하는 방법이다.

$$\int_0^\infty e^{-V^2} V^w Q(V) dV = \sum_{\delta=1}^N P_\delta Q(V_\delta) \quad (9)$$

속도각(velocity angle) ϕ 에 대한 적분에는 Simpson 규칙을 도입하면 거시흐름변수를 구하기 위한 속도계에 관한 적분들은 다음의 구적법으로 표시될 수 있다.

$$n = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma g_{\delta\sigma} \quad (10.1)$$

$$nU_x = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma V_\delta \sin \phi_{\sigma} g_{\delta\sigma} \quad (10.2)$$

$$nU_y = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma V_\delta \cos \phi_{\sigma} g_{\delta\sigma} \quad (10.3)$$

$$\frac{3}{2} nT = \sum_{\delta=1}^N \sum_{\sigma=1}^K P_\delta P_\sigma (h_{\delta\sigma} + V_\delta^2 g_{\delta\sigma}) - n(U_x^2 + U_y^2) \quad (10.4)$$

여기에서 N 은 Gauss-Hermite 반구적공식의 차수(order)이고, K 은 Simpson 규칙에서 소구간의 개수이다.

볼츠만식의 해를 구하는 목적은 분포함수 f 자체보다는 거시흐름변수를 구하는 것이므로 지배방정식은 다음과 같이 분자속도계에 독립적인 $2 \times N \times K$ 개

의 별개의 식(discrete equation)으로 변형될 수 있다.

$$B \frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \eta} + C \frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \xi} + A_x g_{\delta\sigma} = A_c G_{\delta\sigma} \quad (11.1)$$

$$B \frac{\partial h_{\delta\sigma}}{\partial \eta} + C \frac{\partial h_{\delta\sigma}}{\partial \xi} + A_x h_{\delta\sigma} = A_c H_{\delta\sigma} \quad (11.2)$$

$$B = (V_\delta \cos \phi_{\sigma x\xi} - V_\delta \sin \phi_{\sigma y\xi}) / J_t \quad (11.3)$$

$$C = (V_\delta \sin \phi_{\sigma x\eta} - V_\delta \cos \phi_{\sigma y\eta}) / J_t \quad (11.4)$$

$$G_{\delta\sigma} = \frac{n}{\pi T} \exp \{ - [(V_\delta \sin \phi_{\sigma} - U_x)^2 + (V_\delta \cos \phi_{\sigma} - U_y)^2 / T] \} \quad (11.5)$$

$$H_{\delta\sigma} = \frac{1}{2} T G_{\delta\sigma} \quad (11.6)$$

2.3 유한차분법

위의 식을 풀기위하여 물리적공간계와 속도계의 특성에 따라 아래의 단순 양함수법(simple explicit scheme)을 이용하면

$$\frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \xi} = \frac{g_{\delta\sigma}(\xi, \eta) - g_{\delta\sigma}(\xi - j\Delta\xi, \eta)}{j\Delta\xi} \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial g_{\delta\sigma}}{\partial \eta} = \frac{g_{\delta\sigma}(\xi, \eta) - g_{\delta\sigma}(\xi, \eta - i\Delta\eta)}{i\Delta\eta} \quad (12.2)$$

$$i\sigma = \text{sign}[(V_\delta \cos \phi_{\sigma x\xi} - V_\delta \sin \phi_{\sigma y\xi}) / J_t] \quad (12.3)$$

$$j\sigma = \text{sign}[(V_\delta \sin \phi_{\sigma x\eta} - V_\delta \cos \phi_{\sigma y\eta}) / J_t] \quad (12.4)$$

아래의 유한차분방정식을 얻는다.

$$g_{\delta\sigma}(\xi, \eta) = [D_\sigma G_{\delta\sigma}(\xi, \eta) + B_\sigma g_{\delta\sigma}(\xi, \eta - i\Delta\eta) + C_\sigma g_{\delta\sigma}(\xi - j\Delta\xi, \eta)] / (B_\sigma + C_\sigma + D_\sigma) \quad (13.1)$$

$$B_\sigma = i\sigma(\cos \phi_{\sigma x\xi} - \sin \phi_{\sigma y\xi}) / (J_t \Delta\eta) \quad (13.2)$$

$$C_\sigma = j\sigma(\sin \phi_{\sigma x\eta} - \cos \phi_{\sigma y\eta}) / (J_t \Delta\xi) \quad (13.3)$$

$$D_\sigma = A_\sigma / V_\delta \quad (13.4)$$

동일한 방법을 적용하면 $h_{\delta\sigma}$ 에 대하여도 유사한 방정식을 얻는다. 위의 방정식을 반복계산법을 이용하여 해석할 때에 분포함수 $g_{\delta\sigma}$ 와 $h_{\delta\sigma}$ 의 값은 다음 단계를 위하여 저장할 필요가 없으며 단지 A_c , $G_{\delta\sigma}$ 및 $H_{\delta\sigma}$ 의 값만 직전 단계의 거시흐름변수를 이용하여 계산하면 된다.

2.4 경계조건

원방경계에서는 유장이 평형상태에 놓여있으므로 분포함수가 다음의 Maxwell 분포로 주어진다.

$$g_{\delta\sigma} = \frac{n}{\pi T_b} \exp\{-[(V_{\delta} \sin \phi_{\sigma} - U_{x,b})^2 + (V_{\delta} \cos \phi_{\sigma} - U_{y,b})^2 / T_b]\} \quad (14.1)$$

$$h_{\delta\sigma} = \frac{1}{2} T_b g_{\delta\sigma} \quad (14.2)$$

여기서 하첨자 δ 는 원방경계를 나타낸다. 표면에서는 반사된 분자가 표면의 온도 T_w 에 따른 Maxwell 분포를 갖는 diffuse 반사조건이 사용되었다.

$$g_w = \frac{n_w}{\pi T_w} \exp\{-[(V_{\delta} \sin \phi_{\sigma} - U_{w,x})^2 + (V_{\delta} \cos \phi_{\sigma} - U_{w,y})^2 / T_w]\} \quad (15.1)$$

$$h_w = \frac{1}{2} T_w g_w \quad (15.2)$$

for $(\vec{c} \cdot \vec{n}) < 0$

여기서 \vec{n} 는 표면내방향 (inward normal to surface) 법선벡터이다. n_w 은 표면수밀도흐름(wall number flux)으로 미리 알 수 없으며, 표면에서 법선방향의 순수밀도흐름(net flux normal to surface)이 없다는 조건을 적용하여 계산되어야만 한다.

$$\int_{(\vec{c} \cdot \vec{n}) > 0} (\vec{c} \cdot \vec{n}) f d\vec{c} = - \int_{(\vec{c} \cdot \vec{n}) < 0} (\vec{c} \cdot \vec{n}) F d\vec{c} \quad (16)$$

2.5 Collision Frequency

BGK model의 경우 충돌빈도는 다음과 같이 주어진다.

$$A_c = \frac{\phi P}{\mu} \quad (17)$$

여기에서 P 는 압력, k_B 는 Boltzmann 상수, R 은 기체상수이다. 충돌빈도를 계산하기 위하여 강구모델(Hard Sphere Model)의 평균자유행로(mean free

path)를 이용하는 경우 모델상수 ϕ 는 일반적으로 2/3에서 1사이의 값을 [8] 가진다. μ 는 coefficient of viscosity이며, 다음과 같은 온도 의존성을 [9] 갖고 있다. 여기서 하첨자 o 는 기준상태를 나타낸다.

$$\frac{\mu}{\mu_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\omega} \quad (18)$$

가변강구(Variable Hard Sphere) 분자모델의 [1] 경우 기준상태에서의 평균자유행로(mean free path) λ_o 는 점도 μ_o 와 다음의 관계로 나타낼 수 있다.

$$\lambda_o = \frac{16}{5} \frac{F_k \mu_o}{m_o (2\pi RT)^{1/2}} \quad (19.1)$$

$$F_k = \frac{(7-2\omega)(5-2\omega)}{24} \quad (19.2)$$

따라서 무차원화된 충돌빈도는 가변강구 분자모델의 평균자유행로를 이용하는 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_c = Z F_k \frac{8nT^{1-\omega}}{5\sqrt{\pi} k_B n} \quad (20)$$

여기서 Kn 는 기준상태에서의 누센수(Knudsen Number)이다.

$$Kn = \frac{\lambda_o}{L} \quad (21)$$

3. 해석 결과

MEMS 장치는 다양한 형상의 microchannel 과 chamber들로 구성되어있다. Figure 1과 같은 microchannel은 MEMS 장치를 구성하는 가장 기본적인 형상이나, 이런 단순한 형상에서조차도 기존의 직접모사법 등으로 미끄럼, 천이 및 자유분자영역에서의 유동장을 해석하는데 많은 어려움이 존재한다.

첫 번째로 계산된 문제는 높이 $h = 0.5 \mu m$ 길이 $L = 15 \mu m$ 인 비교적 짧은 microchannel이다. 상류 및 하류 chamber와 channel 벽면의 온도는 모두 300K인 경우로 유장내의 온도변화를 무시할 수 있

고, 따라서 내부에너지 전달을 무시할 수 있다. 입구 압력은 2.5bar, 출구압력은 1bar로 압력비는 2.5이며, 평균압력에서의 누센수는 $Kn = 0.06$ 으로 미끄럼영역에 해당한다. Channel의 길이가 짧고 압력비가 높아 직접모사법에 의한 계산이 가능하고, 미끄럼영역에 해당하므로 여러 가지 방법에 의한 수치해석결과를 비교하여 검증할 수 있어 많은 연구에서 유사한 문제가 해석 되었다.

Figure 2에는 본 연구와 직접모사법에 의하여 계산된 channel 내에서의 x-velocity contour가 비교되었으며, 속도의 단위는 m/s 이다. 직접모사법 계산결과(아랫부분)를 위하여 이용된 code에는 [10] Variable Hard Sphere(VHS) 모델과 [1] No Time Counter(NTC) 기법이 [1] 사용되었으며, cell 수는 4,000(80×50), cell 당 평균 sampling size는 1,000,000이다. 본 연구의 계산에서(윗부분의 contour)는 81×51 grid가 사용었다. 기체는 질소이며, 계산에 사용된 점도지수(viscosity exponent)는 $\omega=0.77$, 모델상수는 $Z=1.35$ 이다. Channel 입구 및 출구에서의 압력경계조건을 위하여 characteristic line 방법이 [11] 이용되었다. 서로 다른 방법에 의한 계산결과들이 잘 일치하고 있으나, 직접모사법에 의한 계산결과에는 statistical noise가 많이 있음을 알 수 있다.

두 번째로 계산된 문제는 Fig. 3에 보인 것처럼 두 개의 channel이 직렬로 연결된 microfluidic system이다. 각 channel의 높이와 길이는 각각 $h_1 = 0.5 \mu m$, $L_1 = 7.5 \mu m$, $h_2 = 1.0 \mu m$, $L_2 = 7.5 \mu m$ 이다. 상류 및 하류 chamber와 channel 벽면의 온도는 모두 300K이다. 입구압력은 2.5bar, 출구압력은 1bar로 첫 번째 문제와 같다. Figure 3에는 본 연구와 직접모사법에 의하여 계산된 channel 내에서의 x-velocity contour가 비교되었으며, 속도의 단위는 m/s 이다. 두 개의 channel이 직렬로 연결된 경우 연결부분에서의 팽창으로 인하여 기체의 속도가 갑작스럽게 감소한 후 다시 증가함을 볼 수 있다. 첫 번째 문제와 마찬가지로 본 연구의 계산결과와 직접모사법에 의한 계산결과들이 잘 일치하고 있으나, 직접모사법에 의한 계산결과에는 statistical noise가 많이 있음을 알 수 있다.

세 번째로 계산된 문제는 높이 $h = 1.2 \mu m$ 길이 $L = 3,000 \mu m$ 로 L/h 비율이 매우 큰 단순 microchannel이다. 상류 및 하류 chamber와 channel

벽면의 온도는 모두 300K이고, 입구압력은 20psig, 출구압력은 0psig로 압력비는 2.36이며, 평균압력에서의 누센수는 $Kn = 0.03$ 으로 미끄럼영역에 해당한다. L/h 비율이 매우 커 channel 내부의 유속이 1 m/s 이하로 매우 작아 직접모사법에 의한 계산은 불가능하다.

미끄럼 영역에 해당하는 길이가 매우 긴 등은 상태의 2차원 단순 channel의 경우 미끄럼 경계조건을 이용하여 Nvier-Stokes 방정식의 해를 다음과 같이 구할 수 있다 [12].

$$\overline{P}(\overline{x}) = \frac{-6\theta K_e}{\sqrt{(6\theta K_e + R_p)^2 - \overline{x}[(R_p^2 - 1)] + 12\theta K_e(R_p - 1)}} \quad (22)$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - h^2 - 4h^2 K\theta) \quad (23)$$

여기서 \overline{P} 와 \overline{x} 는 각각 출구압력과 channel 길이로 무차원화된 값이며, θ 는 흐름방향(streamwise)의 모멘텀 accommodation이다. 하첨자 e 는 출구에서의 값을 나타내며 K 는 다음과 같이 정의된 local 누센수이다.

$$K = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2}} \frac{M_0}{Re} \quad (24)$$

Figure 5에는 본 연구와 식(23)에 의하여 계산된 channel 내에서의 x-velocity contour가 비교되었으며, 속도의 단위는 m/s 이다. Figure 6에는 본 연구와 식(22)에 의하여 계산된 channel 내에서의 압력 분포가 실험값과 비교되었다. 계산결과가 실험에서 나타난 압력의 비선형성을 잘 나타내고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

모델 충돌적분항으로 단순화된 Boltzmann 방정식을 Discrete Ordinate 방법과 결합된 유한차분법을 이용하여 다양한 종류의 microchannel 내부 유동장이 해석되었다.

본 연구의 해석방법을 검증하기 위하여 해석결과가 실험값 및 다른 여러 가지 방법에 의한 계산결과

와 비교되었다.

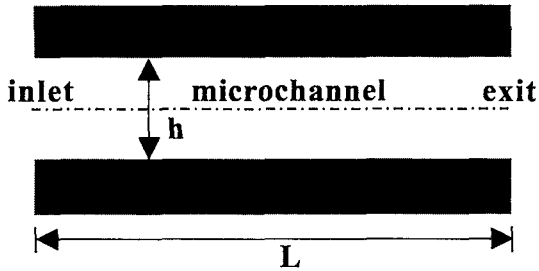
이 방법은 statistical noise가 없고 전산요구량이 적으며 저속 및 고속 유동장에 모두 적용할 수 있는 방법이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2003-000-10145-0) 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Bird, G. A., Molecular Gas Dynamics and The Direct Simulation of Gas Flows, Oxford University Press, London, 1994.
- [2] Oh, C. K., Oran, E. S., and Sinkovits, R. S., "Computations of High-Speed, High Knudsen Number Microchannel Flows," Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 11, No. 4, 1997, pp. 497-505.
- [3] Fan, J. and Shen, C., "Statistical Simulation of Low-Speed Rarefied Gas," Journal of Computational Physics, Vol. 167, 2001, pp. 393-412.
- [4] Chung, C. H., De Witt, K. J., Jeng, D. R., and Keith Jr., T. G., "Numerical Analysis of Rarefied Gas Flow Through a Slit," J. of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 6, No. 1, 1992, pp. 27-34.
- [5] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M., "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," Physical Review, Vol. 94, No. 3, 1954, pp. 511-525.
- [6] Chu, C. K., "Kinetic-Theoretic Description of the Formation of a Shock Wave," Physics of Fluids, Vol. 8, No. 1, 1965, pp. 12-22.
- [7] Shizgal, B., "A Gaussian Quadrature Procedure for Use in the Solution of the Boltzmann Equation and Related Problems," J. of Computational Physics, Vol. 41, No. 2, 1981, pp. 309-327.
- [8] Atassi, H. and Shen, S. F., "A Unified Kinetic Theory Approach to External Rarefied Gas Flows. Part 1. Derivation of Hydrodynamic Equations," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 53, Part 3, 1972, pp. 417-431.
- [9] Chapman, S., and Cowling, T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, London (1958).
- [10] Chung, C. H., De Witt, K. J., Stubbs, R. M., and Penko, P. F., "Simulation of Overexpanded Low-Density Nozzle Plume Flow," AIAA J., Vol. 33, No. 9, 1995, pp. 1646-1650.
- [11] Nance, P. R., Hash, D. B., and Hassan, H. A., "Role of Boundary Conditions in Monte Carlo Simulation of Microelectromechanical Systems," Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 12, No. 3, 1998, pp. 447-449.
- [12] Arkilic, E. B., Schmidt, M. A., and Breuer, K. S., "Gaseous Slip Flow in Long Microchannels," Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 6, No. 2, 1977, pp. 167-178.



(Not to scale)

Fig. 3 Simple microchannel geometry.

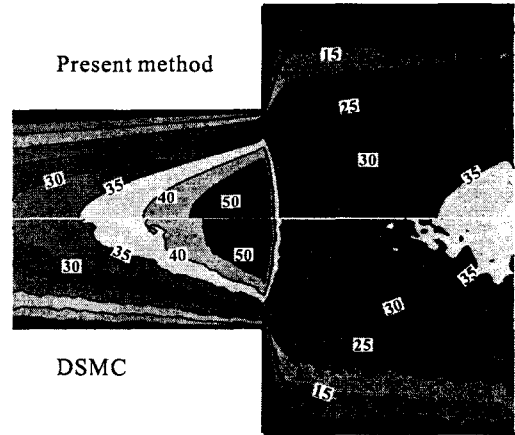


Fig. 6 Comparison of x-velocity contours (m/s) for the microfluidic system.

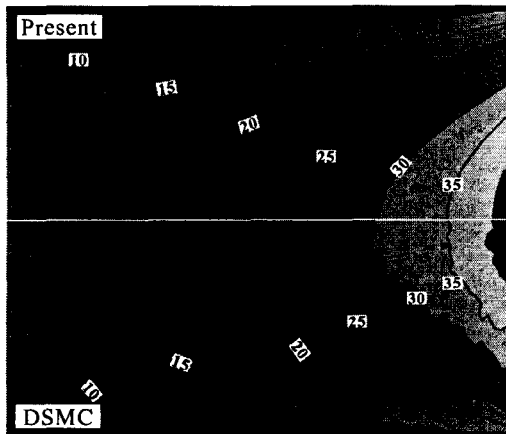


Fig. 4 Comparison of x-velocity contours (m/s) for the simple microchannel.

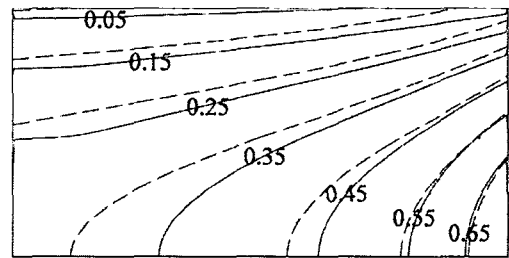
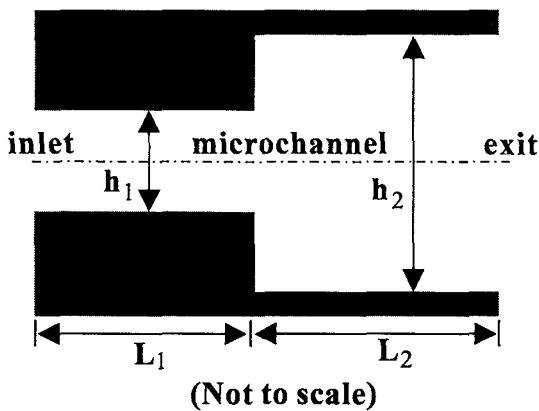


Fig. 5 Comparison of x-velocity contours (m/s) in a microchannel of $h = 1.2 \mu\text{m}$ and $L = 3,000 \mu\text{m}$ at $\text{Kn} = 0.03$: dashed lines, A-NS, solid lines, present method.



(Not to scale)

Fig. 5 Microfluidic system with two microchannels in series.

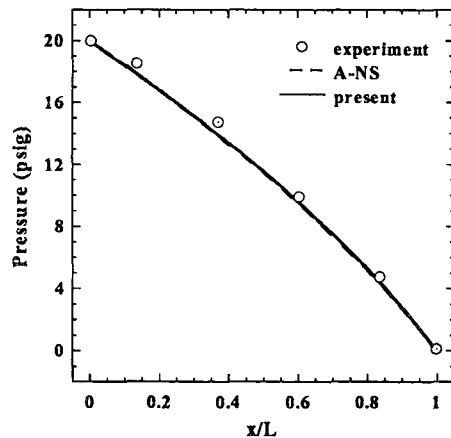


Fig. 6 Comparison of pressure distribution in a microchannel of $h = 1.2 \mu\text{m}$ and $L = 3,000 \mu\text{m}$ at $\text{Kn} = 0.03$.