

# 다단계 부분 구조법에 의한 비 압축성 유동 계산

김진환<sup>\*1</sup>

## An Incompressible Flow Computation using a Multi-level Substructuring Method

J. W. Kim

Substructuring methods are usually used in finite element structural analyses. In this study a multi-level substructuring algorithm is developed and proposed as a possible candidate for incompressible fluid solves. Finite element formulation for incompressible flow has been stabilized by a modified residual procedure proposed by Ilinca et.al.[5]. The present algorithm consists of four stages such as a gathering stage, a condensing stage, a solving stage and a scattering stage. At each level, a predetermined number of elements are gathered and condensed to form an element of higher level. At highest level, each subdomain consists of only one super-element. Thus, the inversion process of a stiffness matrix associated with internal degrees of freedom of each subdomain has been replaced by a sequential static condensation. The global algebraic system arising from the assembly of each subdomains is solved using Conjugate Gradient Squared(CGS) method. In this case, pre-conditioning techniques usually accompanied by iterative solvers are not needed.

**Key Words:** 부분구조(Substructure), 응축(Condensation), 부영역(Subdomain)

### 1. 서론

영역 분할(domain decomposition) 기법은 최근 병렬 처리와 관련하여 많은 연구자들의 관심이 다.[1] 이 영역 분할법은 대체로 부영역(subdomain)들의 겹침(overlapping)과 비겹침(non-overlapping) 방법의 두 종류로 나누어지며, 겹침 영역 분할법은 종종 Schwarz 방법이라 칭하고 비겹침 영역 분할법은 반복적 부구조화 방법(iterative substructuring method)이라고도 불린다.[2] 본 연구에서는 비겹침 영역 분할에 대하여 수행하고자 한다.

비 겹침 영역 분할 혹은 부분 구조(substructuring)법은 부 영역의 내부 자유도들을 소거한 Schur complement 행렬을 구성한 후, 이 행렬들을 조합(assembly)하여 보다 작은 수의 자유도에 대한 전체(global) 행렬을 구성하게 된다. 제 2장에서 언급되는 부분 구조법의 전개 과정에는 부 영역(j)에 대한 Schur complement 행렬  $S^{(j)}$ 의 구성에는 내부 자유도 행렬  $A_{ii}^{(j)}$ 의 역행렬이 요구된다.

이는  $A_{ii}^{(j)}$ 에 대한 새로운 대수 방정식을 풀어야 함을 의미하며, 부 영역의 수가 많고 또 각각의 부 영역이 많은 수의 내부 자유도를 포함한다면, 이를 위한 효율적인 해결책이 요구된다. 이를 피하기 위하여 너무 많은 부영역을 만드는 것도 좋은 방법이 못된다.

\*1 정회원, 동의대학교 기계공학부  
kimjw@dongeui.ac.kr

본 연구는 영역 분할법(비접침)의 전개 과정이 유한 요소법에서 내부 자유도를 제거하기 위한 정적 응축(static condensation) 과정과 유사함에 주목하고, 이를 연속적으로 수행함으로써 동일한  $S^{(j)}$ 를 구성할 수 있음을 관찰하였다. 즉, 초기의 요소들은 응축과정을 통하여 더 큰 새로운 요소가 형성되고 이의 연속적 수행을 통하여 최종적으로 부 영역은 슈퍼(super) 요소 하나만으로 구성된다. 이리하여 부 영역을 구성하는 최 상위 단계의 요소만을 조합하여 전체 행렬을 구성하면 계산상의 효율성을 도모할 수 있다.

이러한 개념은 이미 유한 요소 구조 해석에서 부분 구조법으로 통용되고 있었다. 일찍이 항공기나 선박 등의 대형 구조물 해석에서 각 부위별로 나누어 동시에 독립적으로 해석함이 더 효율적이라는 관점이 제기되었고, 이로부터 행렬을 나누어 계산하는 방법에 대한 연구가 시작되었다. 또 부분 구조법의 효율성이 입증되면서 부분 구조 내부에 부분 구조를 가지는 다단계 부분 구조법이 Furuike[3]에 의하여 제안되었으며, 현재의 범용 해석 코드인 NASTRAN 혹은 ABAQUS 등에도 다단계 부분 구조법을 적용하고 있다. 하지만, 이 경우에는 실제 구조물의 계층적 특성을 이용하여 수행하는 관계로 다양한 기하학적 형상을 요구하는 유동 해석에는 적용되지 못하고 있다. 본 연구에서는 유동 해석에 적합한 다단계 부분 구조법을 제시하고자 한다.

비 압축성 유동 방정식의 해석은 지배 방정식의 비대칭성 및 부정형(indefinite)인 관계로 이의 풀이가 쉽지 않다. 유한 요소법을 사용하는 수치 모사의 경우, 갈러킨(Galerkin) 가중 잔여치 법을 그대로 적용하기에는 많은 무리가 따르며, 일찍이 Hughes와 Brooks[4]는 상류 방향의 유동 정보를 받아들일 수 있는 시험(test) 함수를 개발하여 Streamline Upwind Petrov Galerkin(SUPG)이라 하였다. 이리하여 대류항이 우세하여 야기되는 비대칭적 불안정성은 상당 부분 완화될 수 있으나, 비 압축성 유동에서 속도 및 압력을 변수로 사용하는 지배 방정식의 경우에는 부정형의 문제가 남아있다. 최근 Ilina 등[5]은 SUPG 기법이 잔여치에 대한 풍상 차분(upwind differencing)과 유사하다는 관찰을 통하여 비 압축성 유동 방정식의 잔여치에 대한 섭동(perturbation)을 도입한 수정 잔여치 법을 제안하였다. 따라서 본 연구에서도 이를 적용하였다.

현재의 연구는 유동 해석에 적용이 가능한 다단계 부분 구조법의 개발과 비 압축성 유동 계산을

통한 효율성 검증에 있다.

## 2. 다단계 부분 구조법

### 2.1. 부분 구조법

영역을 분할하지 않으면 다음과 같은 큰 행렬을 풀어야한다.

$$Ax = b \quad (1)$$

영역이 Fig. 1과 같이 분할된다면 비접침 분할의 경우 알고리즘은 다음과 같다.[2]

1. 각각의 부 영역(j)에 대하여 강성(stiffness) 행렬  $A_j$ 를 내부 자유도와 경계(외부 및 내부) 자유도에 대하여 아래와 같이 구성한다.

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} A_{bb}^{(j)} & A_{bi}^{(j)} \\ A_{ib}^{(j)} & A_{ii}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. 각각의 부 영역(j)의 내부 자유도 행렬  $A_{ii}$ 에 대한 Schure complement  $S^{(j)}$ 를 아래와 같이 구성한다.

$$S^{(j)} = A_{bb}^{(j)} - A_{bi}^{(j)} A_{ii}^{(j)-1} A_{ib}^{(j)} \quad (3)$$

3. 각각의 부 영역(j)에 대하여 우변  $b^{(j)}$ 를 구성한 후, 경계(외부 및 내부) 자유도에 대한 새로운 우변  $g_b^{(j)}$ 를 아래와 같이 구성한다.

$$g_b^{(j)} = b_b^{(j)} - A_{bi}^{(j)} A_{ii}^{(j)-1} b_i^{(j)} \quad (4)$$

4. 성긴(coarse) 강성 행렬  $S$ 를  $S^{(j)}$ 의 조합(assembly)으로부터 구성하고, 또  $g_b$ 를  $g_b^{(j)}$ 의 조합으로 구성한다.

$$S = \sum_j S^{(j)} \quad (5)$$

$$g_b = \sum_j g_b^{(j)} \quad (6)$$

필요에 따라서는  $S$  및  $g_b$  를 자유도 특성, 즉 면, 변 혹은 꼭지점에 따른 자유도 순으로 재구성할 수 도 있다.

5. 적절한 풀이 방법을 도입하여 내부 및 외부 경 계에 대한 해  $x_b$  를 아래와 같이 구한다.

$$S x_b = g_b \quad (7)$$

6. 내부 자유도에 대한 우변 벡터  $g_i^{(j)}$  를 아래와 같이 구성한다.

$$g_i^{(j)} = b_i^{(j)} - A_{ii}^{(j)-1} A_{ib}^{(j)} x_b^{(j)} \quad (8)$$

7. 각각의 부 영역에 대한 내부 자유도 값들을 구 한다.

$$x_i^{(j)} = A_{ii}^{(j)-1} g_i^{(j)} \quad (9)$$

이상과 같이 부분 구조법 혹은 영역 분할법의 성 공 여부는 식(7)의 적절한 풀이에 있다고 보여지너, 이는 또 문제의 특성에 많이 좌우된다. 만일 개별 부 영역의 내부 자유도 행렬  $A_{ii}^{(j)}$  의 자유도 수가 많아서 역행렬 계산의 시간이 많이 걸리거나 혹은 행렬의 특성상 반올림 오차를 많이 유발한다면, 직접적인 역행렬 연산을 피해야 한다. 이 연구에서는 식(2)에서 식(9)까지의 과정을 요소 단계별로 적용하여 부 영역내의 자유도 수가 많더라도  $A_{ii}^{(j)}$  의 역 행렬을 아래의 순차적 결합, 응축 및 분배를 통하여 효율적으로 구하고자 하였다.

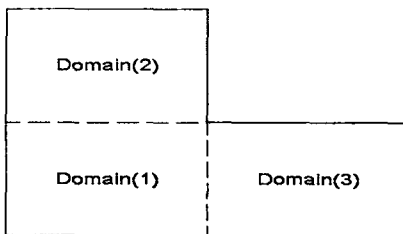


Fig. 1 An illustration of non-overlapping three sub-domains

## 2.2. 순차적 결합, 응축 그리고 분배 (Sequential Gathering, Condensation and Scattering)

부 영역을 구성하는 요소들은 부영역을 연속적 으로 세분화하는 과정에서 생성시킬 수 있으며, 이 개념은 프랙탈(fractal) 알고리즘과 비슷하다. 즉, 요소의 구성을 단계(level)별로 하여, 하위 단계의 요소들(세분화된 요소)은 상위 단계의 요소(큰 요소)의 분할로 이루어진다면 양 단계간에 어떤 규칙성을 찾을 수 있다. 따라서, 식(2)에서 식(6)까지의 과정을 각 단계(level)별 요소들에 대하여 수행하면 부 영역 들에 대한 요소 행렬식을 구성하게 된다.

Fig. 2(a)에는 임의 단계( $l$ )에 대한  $2 \times 2$  요소를 보여주며, Fig. 2(b)에는 상위 단계( $l+1$ )의 요소를 보여준다. Fig. 2(b)의 사각형 마크(mark)는 내부 자유도와 관련된 절점들이다. 이 경우,  $2 \times 2$  요소(Fig. 2(a))들이 결합되어 하나의 상위 단계 요소(Fig. 2(b))와 같이 됨을 보인다. 우리는 이를 결합(gathering) 과정이라 부르며, 이 과정은 아래와 같이 경계 및 내부 절점들에 대한 식들이 분리될 수 있는 방정식을 구성함으로써 수행된다.

$$\begin{pmatrix} A_{bb} & A_{bi} \\ A_{ib} & A_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b \\ u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_b \\ F_i \end{pmatrix} \quad (10)$$

여기서, 아래 첨자  $b$ 는 요소 경계상의 절점들의 의미하고, 아래 첨자  $i$ 는 요소 내부 절점들을 의미한다. 식(10)로부터 상위 단계 요소에 대한 강성 행렬  $S$ 와 우변 벡터  $g$ 는 다음과 같으며, 이 과정을 응축(condensation) 과정이라고 한다.

$$S = A_{bb} - A_{bi} A_{ii}^{-1} A_{ib} \quad (11-1)$$

$$g = F_b - A_{bi} A_{ii}^{-1} F_i \quad (11-2)$$

따라서 행렬  $S$ 와 벡터  $g$ 는 상위 단계( $l+1$ )의 새로운 강성 행렬과 우변 벡터로서 아래 식을 만족시킨다.

$$S u_b = g \quad (12)$$

식(12)는 다시 ( $l+1$ ) 단계의 새로운 요소 결합으로 식(10)의 과정을 반복하여 더 상위 단계로 진행할 수 있다. 따라서, 최상위 단계, 즉 부영역이 하나

의 요소가 될 때까지 식(10)에서 식(12)의 과정이 반복된다.

최종적으로 각각의 부영역에 대한 식(12)와 같은 강성 행렬과 우변 벡터를 구성하게 되면, 이들을 조합(assembly)하여 전체 영역에 대한 선형 대수 행렬 방정식을 풀게된다. 이 과정은 식(5) ~ (7)과 동일하다. 식(7)에 의하여 구해진 자유도 값( $u_b$ )은 다시 하위 단계(부영역 단계)로 전달된다. 부영역에 경계 자유도 값  $u_b$ 가 전달되면 내부 자유도에 대한 해  $u_i$ 는 다음과 같이 구한다.

$$u_i = A_{ii}^{-1} (F_i - A_{ib} u_b) \quad (13)$$

여기서 구한 내부 자유도들에 대한 해는 다시 상위 단계의 경계 자유도 값으로 전달되어 식(13)의 과정이 계속된다. 우리는 이 과정을 분배(scattering) 과정이라 부르기로 한다. 다시 정리하면, 식(10)을 결합(gathering) 과정이라 하고 식(11)을 응축(condensing) 과정이라 하고, 식(13)의 과정을 분배(scattering) 과정이라고 구별하기로 한다.

### 2.3 코드 구성

실제 사용에 있어서, 상위 단계의 요소 분할을 일원화(2 x 2 분할 혹은 3 x 2 분할 등)시키면, 임의의 기하 형상에 적용하기 곤란하다. 따라서 3 가지의 분할 형태를 고려하였다. 즉, 각 단계별 요소(element), 매크로(macro) 요소, 부 영역(subdomain)들이다. 요소는 최하위 단계(level = 1)의 분할 및 단계별 요소들의 집합으로 구성되며, 매크로 요소(level = Max. Level - 1)는 중형 비(aspect ratio)를 고려한 부영역의 분할이다. 부 영역(level = Max. Level) 또한 중형 비 및 풀이 과정의 수월성 등을 고려한 영역(domain)의 분할이다. 예를 들어 부 영역이 M x N 매크로 요소로 분할되고, 최대 단계는 L이라 하자. 그러면 각 매크로 요소는  $2^{L-2} \times 2^{L-2}$  요소로 분할된다. 임의의 부영역, 임의의 단계 l에서의 요소 개수는  $M \times N \times [2^{L-l-1}]$  이 된다. 이 과정을 M = 3, N = 4, 그리고 L = 5에 대하여 Table 1에 각 단계별 요소의 수를 표시하였다.

이러한 과정을 수행하기 위하여 각 단계(iLevel)별, 각 부 영역(iDomain)별로 요소들의 정보를 구조적으로 저장하는 Elem[iLevel, iDomain] 공간을 정의하면 편리하다. 특히 최근의 대다수의 프

로그래밍 언어들은 자료들을 구조적으로 저장할 수 있도록 하고 있다. 이 Elem 공간은 다음과 같은 항목들(entries)로 구성할 수 있다.(2 차원 경우로 함)

- 1) nNodB : 각 단계별 요소의 경계 절점 수.
- 2) nNodI : 각 단계별 요소의 내부 절점 수.
- 3) nElem[1 to 2] : 각 단계별 요소 수를 각 방향으로 정의.
- 4) Nodes[iele, jele, 1 to nNodB] : m x n 요소가 결합되어 상위 단계가 되었을 시의 절점 번호를 (iele, jele)-요소에 대하여 부여한다. 최대 단계, 즉 부 영역의 단계에서는 iele = 1, jele = 1 이 되고, 매크로 요소의 단계( iLevel = Max.Level-1)에서는 iele = 1, ..., M, jele = 1, ..., N 이 된다. 그 이하 단계( 1 ≤ iLevel ≤ Max.Level-2)에서는 iele = 1, ..., m, jele = 1, ..., n 이 된다. 이 연구에서는 m = n = 2로 정하였다.

5) Pointer[ielem, jelem, 1 to 2] : 현재 단계의 (ielem, jelem) 요소가 (m x n) 하위 단계 요소로 분리되었을 경우, (m x n) 요소 중에서 (1, 1) 요소에 대한 부 영역 iDomain에서의 요소 순서이다.

6) U[ielem, jelem, 1 to nNodB] : 현재 단계(iLevel)에서 요소 (ielem, jelem)의 해를 저장한다.

또 단계별 요소 방정식으로부터 구성되는 요소 강성 행렬과 우변 벡터들에 대한 저장 공간이 요구되며, 이에 따르는 항목들은 아래와 같다.

- 1) S[ielem, jelem, i, j] : 요소 결합 혹은 응축 과정에서 생기는 Schure complement 행렬.
- 2) g[ielem, jelem, i] : 응축 과정에서 생기는 우변 벡터.
- 3)  $A_{ii}^{-1}$ [ielem, jelem, i, j] : 요소 내부 절점에 대한 역행렬
- 4)  $A_{ib}$ [ielem, jelem, i, j] : 식(10)에 나타난  $A_{ib}$
- 5)  $F_i$ [ielem, jelem, i] : 식(10)에 나타난  $F_i$

일반적 유한 요소 코드는 각 절점에 대한 전체적(global) 번호가 부여되지만, 현재의 경우에는 결합, 응축 및 분배에 필요한 각 단계별 절점 번호만 필요하며, 이들은 각각 Nodes[]에 미리 저장해 두면 된다. 식(10)을 구성하기 위하여는 단계 l에 대한 Nodes[]의 절점 번호를 참조한다. 식(13)을 수행하기 위하여도 Nodes[]의 절점 번호에 따라 해를 분배한다. 부록에 Nodes[]의 구성에 대하여 별도로 설명하였다.

이상과 같이 우리는 부 영역 ( $j$ )에서 생성될 수 있는 큰 강성 행렬  $A_{ii}^{(j)}$ 에 대한 역행렬 대신에 단계별 비교적 작은 행렬의 역행렬 연산을 통해 영역 분할법의 효율성을 높일 수 있으리라 본다. 다음은 이차원 Navier-Stokes 방정식에 대한 유한 요소 정식화 과정을 살펴보기로 한다.

### 3. 이차원 비압축성 유동의 정식화

이차원 유동 계산을 위한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 -\nu \nabla^2 u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= f_u \\
 -\nu \nabla^2 v + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= f_v \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서  $u, v, p$  그리고  $\nu$ 는 각각  $x-, y-$  방향의 속도, 압력 그리고 동점성계수이다. 위의 방정식에 적절한 가중함수(weighting function)와 보간함수를 취하여 내적하면 갈러킨 잔여법에 의하여 아래의 비선형 연립 대수 방정식을 얻게 된다.

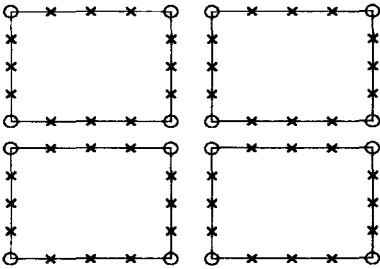
$$\begin{aligned}
 A_{11} \cdot U + A_{12} \cdot V + A_{13} \cdot P &= R_1 \\
 A_{21} \cdot U + A_{22} \cdot V + A_{23} \cdot P &= R_2 \\
 A_{31} \cdot U + A_{32} \cdot V &= R_3
 \end{aligned} \tag{15}$$

여기서  $A_{11}, \dots, A_{32}$ 들은 미지수  $U, V$  및  $P$ 들에 대한 좌변 행렬들이며,  $R_1, R_2$  그리고  $R_3$ 들은 중력항 등과 경계조건 처리에 의하여 형성된 우변 벡터들이다. 식(15)에서 행렬  $A_{33}$ 가 영 행렬인 관계로 피보팅(pivoting)을 이용한 직접 풀이법외에는 대안이 없으며, 레이놀즈(Re) 수가 커지게 되면 직접 풀이법조차 적절한 해를 주지 못한다. 따라서 우리는 먼저 수정 잔여치법[5]을 도입하여 식(15)를 안정화(stabilization)시키고자 한다.

수정 잔여치(modified residual)법은 Ilinca 등이 제안한 방법으로 잔여치에 대한 섭동을 원래의 Galerkin 식에 추가한다. 따라서 이를 만족시키는 해는 원래의 Galerkin 식도 만족시키게 된다. 이러한 관점에서 SUPG[4]도 일종의 잔여치 풍상(residual upwinding) 차분법으로 설명하고 있다. 이를 통하여 Ilinca 등은 대류 우세에 의한 불안정뿐만 아니라 식(15)의 부정형적 불안정성(악조건 행렬)도 안정화시키고자 하였다.

2차원 정상상태 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 정의한다.

(a)



(b)

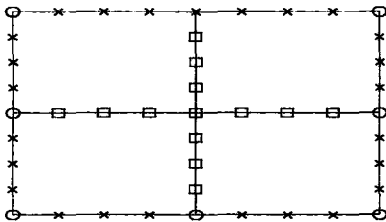


Fig. 2 Elements at different levels: (a) lower level (b) higher level.

Table 1 Number of elements at each level

$l =$	1	2	3	4	5
$m \times n =$	24x16	12x8	6x4	3x2	1x1

$$M_i = \tilde{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{f_i}{\rho} \quad (16)$$

$$C = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (17)$$

위의 식에서 tilde (~) 기호를 붙인 속도 성분 ( $\tilde{u}_i$ ) 은 요소 중심점에서 계산한 값을 의미하며, 편도함수 행렬 (Jacobian) 을 계산할 때 상수로 취급한다. Navier-Stokes 방정식에 대한 수정 잔여치 방법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_i &= \int_{\Omega} \psi_i M_i d\Omega \\ &+ \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \tau \left( \tilde{u}_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right) M_i d\Omega_k \\ &+ \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \delta \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} C d\Omega_k = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} R_p &= \int_{\Omega} \psi_p C d\Omega \\ &+ \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \tau \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i} M_i d\Omega_k = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

위의 식에서  $\Omega$  는 경계를 포함하는 전체 해석 영역을 의미하며,  $\Omega_k$  는 각 요소의 내부 영역만을 의미한다. 따라서 식(18)와 (19)의 첫 번째 항에는 부분 적분을 적용하여, 미분 차수를 한 단계 내리고 또 미분 경계 조건을 적용하게 할 수 있다.

섭동항들의 크기를 결정하는  $\tau$  와  $\delta$  는 레이놀즈 수( $Re$ )와 요소의 대표 길이  $h$  의 함수로 Ilinc아 등[5]을 참조하면 다음과 같다.

$$\tau = \frac{h_k}{2|\vec{v}|} \xi(Re_k)$$

$$\delta = |\vec{v}| h_k \xi(Re_k)$$

$$\xi(Re_k) = \begin{cases} Re_k & , 0 \leq Re_k < 1 \\ 1 & , Re_k \geq 1 \end{cases}$$

$$Re_k = \frac{m_k |\vec{v}| h_k}{2\nu} \quad \text{or} \quad \frac{m_k |\vec{v}| h_k}{2k/\rho c_p}$$

$$(m_k \text{ is } 1/3 \text{ for linear element}) \quad (20)$$

위의 식(18)과 (19)를 전개하면, 종속 변수  $u_i$  의 2차 미분항,  $\partial^2 u_i / \partial x_1^2$  와  $\partial^2 u_i / \partial x_2^2$  들이 포함되어 있음을 볼 수 있다. 그러나  $C^0$ -연속성을 갖는 형상함수로 이들을 취급하기가 쉽지 않으므로 현재의 정식화 과정에서는 무시하기로 한다.

## 4. 수치 계산

Navier-Stokes 방정식의 이산화로부터 나오는 행렬은 비대칭 행렬이며, 이의 수행과정은 1)결합 2)응축 3)풀이 4)해의 분배로 나뉘어진다. 현재의 실험에서는 Newton 반복에 의하여 풀이하며 수정값 (correction)의 최대 절대값 ( $l-\infty$  norm)이  $1.0E-05$  이하로 될 때까지 반복하였다. 응축 과정에서는 가우스 소거법, 풀이 과정에서는 Conjugate Gradient Squared(CGS)[6] 방법을 사용하였다. 그러나 CGS 방법의 풀이 시간은 초기값에 매우 민감하게 나타났으므로, 처음 3번의 Newton 반복 과정에서는 가우스 소거법/역대입법을 사용하였다.

### 4.1 Kovaszny 유동에 대한 예

다음은 수정 잔여치 방법에 의한 정식화가 현재의 다단계 부분 구조법에 의하여 풀이된 Kovaszny 유동에 대한 해의 수렴성을 보기로 한다. 이는  $-1/2 \leq x \leq 1$  과  $-1/2 \leq y \leq 3/2$  의 영역에 대한 Navier-Stokes 방정식으로 엄밀 해는 아래와 같다.

$$u = 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \quad (21)$$

$$v = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \quad (22)$$

$$\lambda = Re/2 - \sqrt{(Re/2)^2 + (2\pi)^2}$$

좌측 입구, 위 그리고 아래 벽면에는 엄밀 해에 의한 고정 경계 조건을 주고, 우측 출구 측에는 압력만을 명시한다.  $Re = 40$ 으로 취한 해의 수렴 경향을 수평 속도 성분의 오차에 대한 H-1 norm을 통하여 수행하여, Fig. 3 에 log-log plot으로 나타내었다. H-1 norm의 정의는 다음과 같다.

$$\|u - u^h\|_1 = \left[ \sum_{elem} \int_{\Omega} \left\{ (u - u^h)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u^h}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Omega \right]^{1/2} \leq Ch^k \quad (23)$$

이 경우, 일차와 이차 요소에 대한 해의 수렴 경사는 각각 0.9956 및 1.9104로 이론적 경사와 거의 일치하지만(처음 두 구간), 3차 요소에 대하여는 그렇지 못하다. 이에 대한 이유는 반올림 오차로 인하여 계산기가 제시하는 포화값에 일찍 도달한 결과이다. 실험에 의하면 수평 속도 오차에 대한 H-1 norm의 포화값은 약  $(2.0)10^{-2}$  이었다. 따라서 현재의 실험은 이론을 대체적으로 잘 따른다고 볼 수 있다.

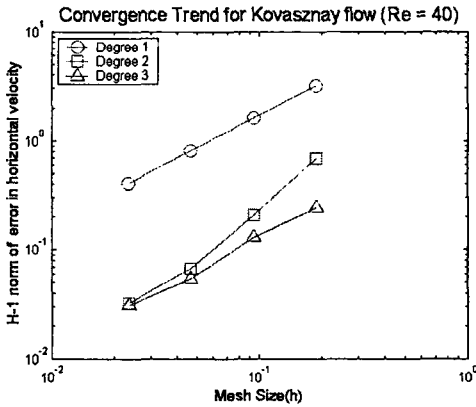


Fig. 3 Convergence trends for Kovasznay flow

### 4.2 Lid Driven Cavity 유동

Cavity 유동 [7]에 대한 영역 및 경계조건의 정의는 Fig. 4 에 하였다. 여기서 압력에 대한 기준 값으로 좌측 하단 모서리 점에 "0"의 값을 취하였다. 이 유동은 우측 상단에 특이점이 존재하는 관계로 해는 격자 형상에 많이 좌우되며, 현재 제시되는 결과들은 각각의 모서리에 어느 정도 세분화된 격자계에 대한 것들이다. 이 문제에서는 부 영역의 수를 4 개로 하였으며, 유한 요소 해의 검증을 위해 수평 속도 성분에 대하여만 보기로 한다.

Fig. 4에는 레이놀즈 수 3200에 대하여 선형 요소를 16 x 16, 32 x 32 그리고 64 x 64 요소들로 세분화함에 따른 수렴성을 보여주고 있다. 이 경우, 32 x 32 와 64 x 64 요소의 해는 Ghia 등의 해의 추세를 따르고는 있다. Fig. 5에는 16 x 16 요소 분할에 의한 1차, 2차 그리고 3차 요소에 대한 해를 보여준다. 이 경우에 2차와 3차 요소의 해는 Ghia 등의 해와 대체로 잘 일치함을 알 수 있으며, 두 해간의 우열을 가리기 어렵다.

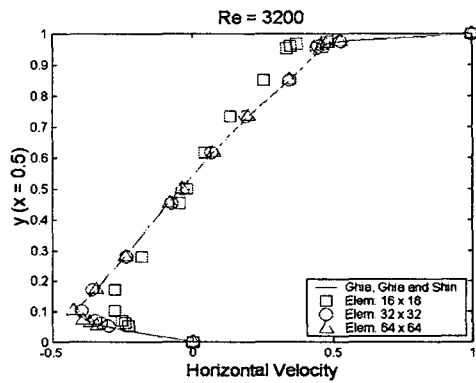


Fig. 4 Comparison of linear element solutions for Re = 3200.

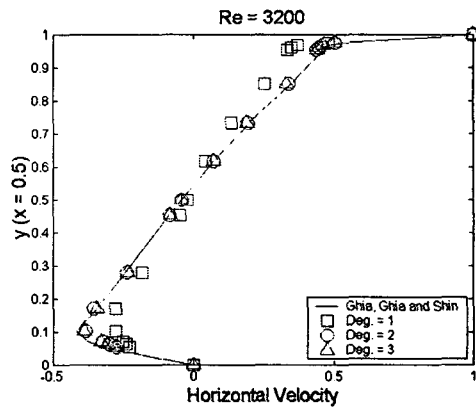


Fig. 5 Comparison of solutions from degree 1, 2 and 3 using 16 x 16 elements.

## 5. 결 론

본 연구에서는 영역 분할 알고리즘에서 나타나는 부 영역에 대한 풀이 과정을 순차적 결합, 응축 및 분배를 이용하여 계산상의 효율성을 도모하였다. 특히 유한 요소법을 이용할 경우 이러한 접근은 자연스러우며, 또 현재의 알고리즘은 고차화에도 쉽게 적용될 수 있다. 비 압축성 유동 계산에 연계하여 수행한 결과, 일반적으로 요구되는 예 조건화가 필요하지 않았으며, 이 점은 현재의 정적 응축을 이용한 결합 과정이 일종의 예조건화임을 의미한다고 하겠다.

Kovaszny 유동에서 선형 요소의 수렴성은 확인되나 고차 요소의 경우에는 미흡하다. 이는 고차 요소의 해는 오차가 일찍이 감소하여 계산기의 반올림 오차 한계에 도달했기 때문으로 이해된다. Cavity 유동에서 알 수 있듯이 2차나 3차 요소의 사용이 매우 긍정적으로 나타났으며, 이 경우 3차 요소보다 2차 요소가 더 효율적으로 보인다.

현재의 다단계 부분 구조법 알고리즘은 병렬 연산에 적합하며, 현재 3차원으로 확장도 진행중이다.

Dominated Flows, Vol. 34, ASME, New York, pp 19~35, 1979.

- [5] Ilinca, F., Hetu, J. F. and Pelletier, D., "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 188, pp 235~255, 2000.
- [6] Barrett, R., Berry, M., Chan, T., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and van der Vorst, H., "Templates for the Solution of Linear Systems; Building Blocks for Iterative Methods," SIAM, Philadelphia (1994).
- [7] Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. of Comp. Physics*, Vol. 48, (1982), pp. 387~411.

## 참고문헌

- [1] Hodgeson, D.C. and Jimack, P.K., "A Domain Decomposition preconditioner for a Parallel Finite Element Solver on Distributed Unstructured Grids," Vol. 24, (1997), *Parallel Computing*, pp.1157 ~ 1181.
- [2] Smith, B. F., "Domain Decomposition Algorithms for the Partial Differential Equations of Linear Elasticity," Technical Report 517, Courant Institute of Mathematical Sciences (Sep. 1990).
- [3] Furuike, T., "Computerized Multiple Level Substructuring Analysis," *Comput. & Struct.*, Vol. 2, (1972), pp. 1063 ~ 1073.
- [4] Hughes, T. J. R. and Brooks, A. N., "A Multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion," T.J.R. Hughes(Ed.), *Finite Element Methods for Convection*