

비정렬 유한 체적법을 위한 비등방 격자 미세화 기법

이 경 세^{*1}, 백 제 현^{*2}

An anisotropic mesh refinement for an unstructured finite volume method

K. S. Lee and J. H. Baek

A new anisotropic mesh refinement method is proposed. The new method is based on a simple second order interpolation error indicator. Therefore, it is methodologically direct and intuitive as compared with traditional anisotropic refinement strategies. Moreover, it does not depend on the mesh type. The error indicator is face-wisely calculated for all faces in a mesh and the cell refinement type is determined by the configuration of face markings with a given threshold. For the sake of simplicity, an application for a Poisson equation on a triangle mesh is considered. The error field and resultant mesh refinement pattern are compared and effects of the threshold selection are discussed. Applying anisotropic refinement with various thresholds, we observed higher convergence rates than those in the uniform refinement cases.

Key Words: 비등방 격자 미세화 기법(anisotropic mesh refinement), 유한체적법(finite volume method), unstructured mesh(비정렬 격자), 포아송 방정식(Poisson equation)

1. 서 론

근래에 들어, 수치해석을 통해 다양한 물리 현상을 해석하고 이를 통한 보다 근원적이고 정밀한 이해를 도모하는 일련의 방법론들이 산업계 및 학계에 일반화됨에 따라, 그 해석의 대상은 무척 빠른 속도로 대형화되며 복잡해지고 있다. 이는 그 대상이 기존의 국소적인 요소의 단순한 현상에 국한되지 않고 더 많은 요소들을 포함한 시스템으로 이행하면서, 필연적으로 해석 대상의 현상적, 형상적 복잡함이 야기되기 때문이다. 이로 인해, 초기적인 수치해법의 기반이 되었던 사각격자 및 이의 발전된 형태인 일반좌표계에서의 정렬격자를 이용한 수치해법의 한계를 극복하기 위한 다양한 연구들이 시도되고 있으며 [1,2,3], 그 중 대표적인 것으로 비정렬 격자를 이용하는 방법을 들 수 있다.

특히 삼각형 비정렬 격자의 경우 기존의 정렬격자와는 달리 격자 생성을 자동화할 수 있는 방법들이 고안되어 있으며 국소적으로 격자의 크기를 조정하기가 상대적으로 용의하여 효율적인 격자의 배분을 할 수 있다는 장점으로 인해 많은 인기를 얻고 있다[4].

그러나 셀 중심 유한체적법에 삼각형 비정렬 격자를 사용하는 경우, 일반적으로 동일한 정확도를 얻기 위해서 사각형 비정렬 격자에 비해 상대적으로 많은 수의 셀을 사용하여야 하므로 과도한 격자수를 가진 격자를 생성하게 될 가능성이 높다.

따라서, 삼각형 격자를 사용하여 매우 큰 계산용량을 요구하는 문제를 해석하려고 하는 경우 초기 격자 생성에서의 격자의 분포에 대한 신중한 고려뿐만 아니라, 해에 기반하여 효율적으로 격자를 미세화 하거나 재분포 시키는 등의 적극적인 방법 또한 필수적으로 요구된다.

이러한 격자의 재분포 및 미세화 기법은 이미 많은 연구가 진행되고 있다[5]. 이 중 국소적 격자 미세화 기법은 해의 변화에 국소적인 편중이 있는 문

*1 학생회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과

*2 정회원, 포항공과대학교 기계공학과

*E-mail : jhbaek@postech.ac.kr

제에 있어 초기 격자를 국소적으로 분할해 감으로써 격자분포의 효율성을 높이기 위한 방법으로서 크게 등방적으로 격자를 미세화하거나 해의 방향성을 고려해 비등방적으로 미세화하는 두가지로 나눌 수 있다. 비등방 격자 미세화 기법은 불필요한 방향으로의 셀의 분할을 억제하기 때문에 등방적인 미세화 기법에 비해 보다 더 효율적인 미세화가 가능하다.

비등방적인 격자 미세화 기법은 주로 유한요소법을 이용한 연구에서 많이 다루어져 왔다[5,6]. 이러한 경향은 수치해에 기반한 격자 미세화를 행하기 위해서는 정확한 오차의 분포 및 그 정도를 판별할 수 있는 방법이 필요하며 이에 앞서 신뢰할 수 있는 차분화 방법 자체의 확립이 전제되어야 하고 이런 면에서 유한요소법이 보다 성숙해 있기 때문이라고 보여진다.

본 연구에서는 비정렬 격자를 이용한 셀 중심 유한체적법에 있어서의 수치해에 기반한 비등방적인 국소 격자 미세화 기법에 관한 연구를 수행하였다. 이를 위하여 최근 개발된 국지적 선형 재구성기법[7]을 삼각형 비정렬 격자에서의 포아송 방정식의 해석에 적용하고 수치해로부터 오차를 추정할 수 있는 방법을 제안하여 그 유효성에 대하여 검증하였다.

2. 본 론

2.1 이산화 방법

유한체적법은 보존형의 지배방정식을 제어체적에 서 적분하여 그 표면에서의 플럭스들의 관계식을 통해 지배방정식을 이산화하는 방법이다. 흔히 가장 일반적인 연구에서 많이 쓰이는 공간정확도가 2차 정확도인 유한 체적법에서는 보통 벡터에서의 값들을 재구성하는 과정이 필요하며 본 연구에서는 포아송 방정식을 이산화하기 위하여 최근 개발된 국지적 선형 재구성기법을 사용하였다.

또한 연구의 본질을 해치지 않으며 단순화하기 위하여 2차원 삼각형 격자를 사용하였다.

보다 자세한 재구성 방법과 이산화 과정은 참고 문헌을 참조하기 바란다[7].

2.2 오차 평가 및 비등방 셀 분할

비등방적인 셀의 분할을 위해서 영역내의 전 셀면에 대한 각각의 오차 추정을 하여 주어진 기준(threshold)보다 과도한 오차일 경우 면이 분할 대상임을 표기(marking)한다. 모든 면에 대하여 분할/비분할을 결정하여 마킹한 후 Fig.1과 같이 셀의 3면의 마킹 상황에 따라 비등방적으로 분할 되게 된다. 분할되는 경우의 수를 줄이기 위해 Fig.1의 c와 같은 상황에서는 두 분할점 중 일률적으로 하나만 선택하여 마주보는 원래 삼각형의 꼭지점과 연결하여 이분하는 방식을 취한다.

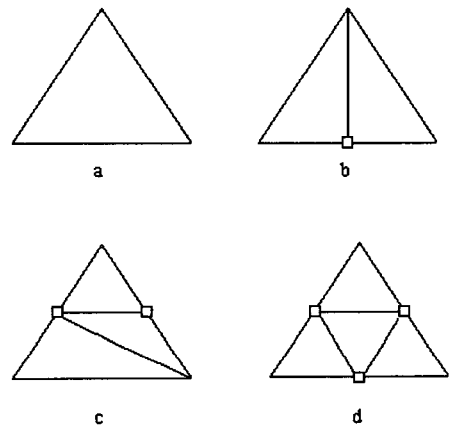


Fig. 1 비등방 셀 분할 방법

본 연구에서 사용한 재구성 기법은 2차 정확도를 보장하므로 격자의 연결구조와는 상관없이 셀의 크기와 이차 미분의 크기에 오차가 비례하게 된다. 따라서 Fig.2와 같이 셀면 양단의 벡터에서 재구성된 값들만으로 내삽한 값과 면에 접하는 두 셀의 중점의 값만으로 내삽한 값의 차를 면에서의 오차로 추정하기로 한다. 즉 셀면에서의 오차는 식(1)과 같이 추정한다.

$$E_f = |\phi_f(\phi_1^c, \phi_2^c) - \phi_f(\phi_1^s, \phi_2^s)| \quad (1)$$

여기에서, $\phi_f(\phi_1^c, \phi_2^c)$ 는 면을 공유한 두 셀의 중점의

값을 통해 셀면에서의 값을 구한 것이며 $\phi_k(\phi_1^*, \phi_2^*)$ 는 버텍스에서의 재구성된 값을 통해 셀면에서 구한 값이다.

두 개의 값이 같은 경우는 공간 차분법의 2차 정확도의 가정 상 오직 평면일 경우이다. 즉 곡률이 큰 부분에서 오차가 크게 측정됨을 알 수 있다.

이런 오차 평가 방법은 이산화 과정 중에 파생되는 값들로부터 자연스럽게 셀면에 대한 오차를 근사화 할 수 있으며 그 값들이 실질적으로 계산에 쓰이는 값들이므로 밀접하게 관련되어 있어 다른 형태의 것들보다 이산화 자체를 잘 반영할 수 있다는 장점이 있다.

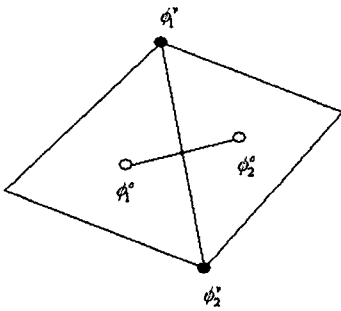


Fig. 2 셀면에서의 오차 추정

3. 계산결과

3.1 오차 추정 방법의 특성

오차 추정 방법은 비등방 격자 미세화 기법의 기반이 되므로 그 특성만을 독립적으로 검증하기 위하여 임의로 주어진 해에 대해 오차 추정이 올바른지와 이에 따른 비등방 격자 미세화가 바람직한 방향으로 진전되는지에 대해 알아본다.

해석 영역은 반지름 0.5인 원형 영역을 0.3만큼 원점에서 이동시킨 형태이며 2608개의 셀로 이루어진 삼각형 비정렬 격자이다. 먼저 임의로 주어진 해를 다음 식(2)와 같이 정의 한다.

$$\phi(\underline{x}) = \sin(8r), r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

이 해의 개괄적인 형태를 Fig.3에 보였다.

Fig.4는 주어진 해의 버텍스에서의 이론적인 오차를 그린 것으로, 오차가 뚜렷한 방향성을 가지고 분화구 중심과 분화구 주위 계곡에 집중되어 있는 것을 확인 할 수 있다. Fig.5는 미세화 기준값을 0.006로 설정하여 한번 미세화를 진행하였을 때의 새롭게 생성된 격자이며, 초기 격자에서 대략 80%의 셀 수가 증가한 4656개의 셀로 이루어져 있다. 최대 오차가 분화구쪽에서 생기는 것을 알 수 있으며 등방 미세화가 진행되었고 그 주변부는 주위의 미세화되지 않는 부위와의 연결을 위해 이분되는 형태로 추가적으로 미세화 되었다. 비탈면은 sine 곡선의 특성상 국소적으로 평면으로 근사될 수 있는 부분으로서, 주어진 기준값에 대해 충분한 정확도라고 판단되기 때문에 미세화가 진행되지 않았으며 계곡부위는 다시 미세화의 영향을 받는다. 이때의 미세화는 분화구 주위에서와 마찬가지로 방향성을 가지도록 계곡 방향으로는 미세화가 진행되지 않고 비탈쪽으로만 선택적으로 미세화가 진행되었다. 따라서, Fig.5의 미세화는 타당한 방향으로 이루어졌다고 평가할 수 있다.

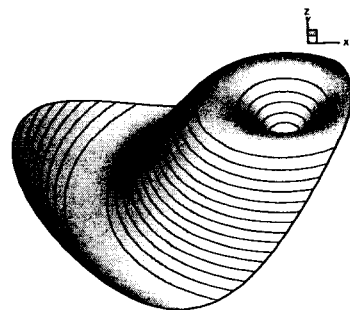


Fig. 3 임의로 가정한 해

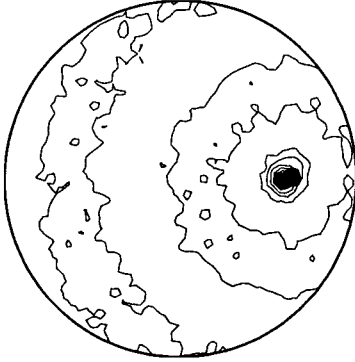


Fig. 4 오차의 분포

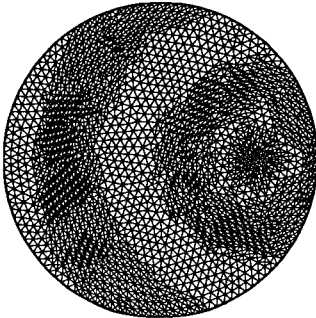


Fig. 5 기준값=0.006

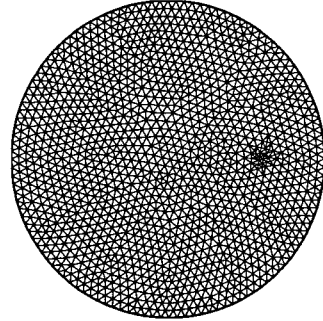


Fig. 6 기준값=0.02

Fig.6과 Fig.7은 미세화 기준값의 선택이 미세화에 미치는 영향을 확인하기 위하여 상대적으로 크거나 상대적으로 작은 기준값을 설정했을 때 새로 생성된 격자들이다. Fig.6은 큰 기준값(0.02)을 설정했을 때이며 최대 오차가 발생하는 분화구쪽만 미세화가 이루어진 상황이고, 반면에 Fig.7은 기준값을 너무 작게 설정하여(0.002) 거의 모든 구간에서 미세화가 진행된 상황이다. 극단적인 경우, 기준값을 너무 크게 설정하면 주어진 격자에서 미세화가 전혀 진행되지 않을 수 있으며, 너무 작으면 모든 영역에서 미세화가 진행되어 전 영역에서 균일하게 등방 미세화를 한 것에 가까운 결과를 얻게 된다. 그러므로, 빠른 시간내에 미세화를 진전시키기 위해 기준값을 작게 설정하여 과도한 격자수를 유발하거나 이와는 반대로 너무 높게 설정하여 미세화의 진전이 매우 느린 것은 모두 바람직하지 못하며 상호 상충되는 면의 절충이 필요한 부분이다.

결론적으로, 이러한 미세화 과정은 이상적인 경우 최대 오차 발생 지역들을 순차적으로 없애 나가며 최종적으로 전 영역에 걸쳐 균일한 오차를 갖도록 최적화하는 과정으로 이해할 수 있다.

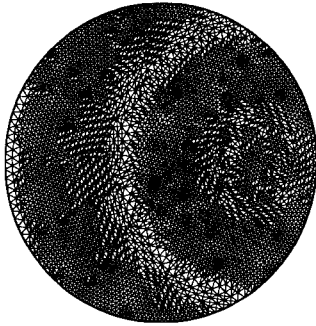


Fig. 7 기준값=0.002

3.2 Poisson 방정식에의 적용

현실적인 문제는 일반적으로 다변수 문제이고 오차 추정에 있어서도 포함된 변수들 모두로부터의 오차를 고려해야 하지만 본 연구에서는 비등방 격자 미세화 자체의 특성을 명확히 하기 위하여 단순한 Poisson 문제를 적용 예로서 기술하였다. 해석에 사용된 Poisson 방정식은 해가 다소 굴곡을 갖고 비등방성을 지니도록 하였으며 다음 식(3)으로 표현된다.

$$\nabla^2\phi = 50(y - 0.5)\cos(10x) \quad (3)$$

경계조건은 $\phi_{bc} = 0$ 으로 설정하였다.

해석 영역은 앞서와 같은 격자를 사용하였다. 이산화는 셀 중심 유한체적법을 사용하였으며 앞서 기술한 바와 같이 국지적 재구성 기법을 토대로 하였다.

이산화 과정을 거쳐 최종적으로 도출된 매트릭스 방정식의 해법으로는 BiCGStab 방법을 사용하였으며 예조건자로는 ILUT 방법을 사용하였다[8].

비등방 격자 미세화 과정의 유효성을 검증하기 위해서는 이론해와의 오차를 그 기준으로 삼아야 하지만, 본 예에 대한 이론해를 얻기가 어려우므로 매우 미세한 격자를 사용한 해를 수치적인 이론해라고 가정하고 이와의 차이를 오차라고 정의하기로 한다. 또한 수렴을 판정은 영역내의 해의 적분량으로 간접적으로 비교하기로 한다. 균일 미세화는 3회 반복하였으며 최종적으로 외삽하여 수치적인 이론해를 구하였다.

Fig.8은 수치적 이론해를 삼차원 곡면으로 도시한 것이다. Fig.9는 기준값 0.002일 때 격자 미세화 이

후의 격자를 표시한 것이며 앞서의 오차 추정 방법의 독립적인 특성에서 확인한 바와 같이 해의 국소적인 특성에 맞는 비등방적 미세화를 잘 보여주고 있다.

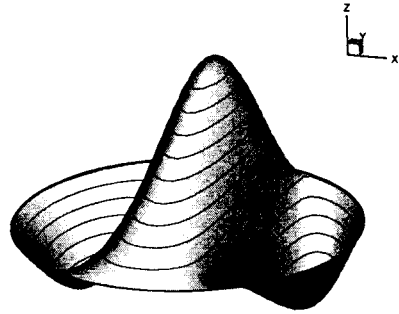


Fig. 8 이론해의 분포

그러나 앞서와 같이 주어진 해의 분포에 대한 오차 추정 방법만으로 미세화의 테스트를 하는 경우와는 달리, 수치해에 대한 미세화 과정은 필연적으로 해의 변형을 가져오게 된다. 이로 인해, 수렴해로 수치해가 접근하는 과정에서, 초기의 해의 분포와 거시적으로는 동일하더라도 국소적으로 완전히 다른 성질을 가질 수 있게 된다. 따라서, 정적인 방식의 미세화 과정은 전단계의 미세화와 다음단계의 미세화가 상충되는 문제를 야기할 수 있다. 즉 전단계에서의 비등방성에 대한 평가자체가 미세화를 진행하면서 그와는 전혀 다른 상황으로 바뀔 수 있으며, 격자의 비등방적인 변형이 다음 단계에서의 변형에 의 해 심각한 격자질의 열화를 가져올 수 있다.

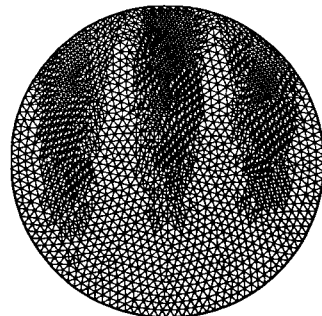


Fig. 9 비등방 미세화(기준값 0.001)

그러므로 연속적으로 미세화 과정을 진행하기 위해서는 각 단계에서의 최소한의 격자의 길이 보장되어야 한다. 그러나 현 연구 단계에서는 미세화 과정을 거치고 나서의 edge swapping이나 edge collapsing, node shifting 등의 격자 보정 과정을 거치지 않아 연속적인 미세화에는 한계가 있다. 따라서 본 연구에서는 균일한 격자 미세화 단계에서 한번의 추가적인 비등방 미세화 과정을 거치는 것까지로 연구의 범위를 한정하도록 한다. 비등방 미세화는 첫단계와 두번째 단계의 균일 미세화된 격자에서 각각 미세화 기준값 0.001과 0.0002로 설정하여 비등방 미세화한 격자에서의 수렴도를 평가하였다. Fig.10은 그 결과를 도시한 것이며 균질한 격자 상태에서 약간의 셀 수 증가에 대해 상대적으로 높은 수렴율을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

4. 결론

국지적 선형 재구성 기법을 사용한 셀 중심 유한체적법에서의 비등방 국소 격자 미세화 기법을 개발하였다. 이를 위하여 이산화 방법과 강한 상관관계를 가지며 3차원로의 확장이 용의하고 격자 형태에 비존재적인 오차 추정 방법을 제안하였다. 제안된 기법의 타당성을 검증하기 위하여 해의 분포를 임의로 가정한 삼각형 비정렬 격자에 적용한 결과 국소적인 특성에 맞는 비등방적인 미세화를 잘 구현함을 보였고, 이 때 미세화의 기준값 설정에 따른

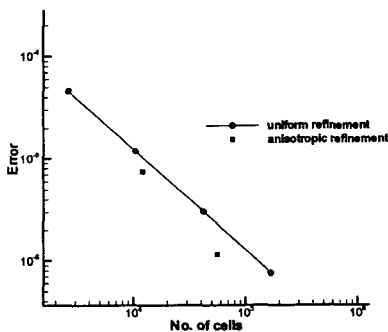


Fig. 10 등방 균일 미세화 및 비등방 미세화의 수렴을 비교

영향에 대하여 고찰하였다. 최종적으로 단순한 원형 영역에서의 포아송 방정식에 적용하여 그 유효성을 보였다. 그러나 차후 미세화에 따른 격자질의 열화를 막고 더욱 미세화의 적합성을 높일 수 있는 격자의 보정 기법과의 결합에 대한 추가적인 연구를 필요로 한다.

참고문헌

- [1] Ahmad, J., Duque, E. P. N., "Helicopter Rotor Blade Computation in Unsteady Flows Using Moving Overset Grids," J. Aircraft, Vol. 33 No.1, (1996), p54-60
- [2] Aftosmis, M. J., "Solution Adaptive Cartesian Grid Methods for Aerodynamic Flows with Complex Geometries," VKI Lecture Series, (1997)
- [3] Lai, M. C., Peskin C. S., "An immersed boundary method with formal second order accuracy and reduced numerical viscosity," Journal of Computational Physics, (2000) p705-719
- [4] Barth, T. J., "Aspects of Unstructured Grids and Finite Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations," VKI Lecture Series, (1995)
- [5] Nithiarasu, P. and Zienkiewicz, C., "Adaptive Mesh Generation for fluid mechanics problems," Inter. J. Num. Metho. Eng., (2000), p629-662
- [6] Castro-Diaz, M. J, et al. , "Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations," Int. J. Numer. Metho. Fluids, vol. 25, (1997) p475-491
- [7] 이경세, 백제현, "임의의 비정렬 격자계에서의 국지적 선형 재구성 기법," 한국전산유체공학회 2003 춘계 학술대회논문집, (2002), p31-36
- [8] Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS publishing, (1996)