

2차 정확도를 가지는 비정상 비압축성 유동장 해석을 위한 비정렬 유한 체적법의 개발

이 경 세^{*1}, 백 제 현^{*2}

An unstructured finite volume method for unsteady incompressible flows with full second order accuracy

K. S. Lee and J. H. Baik

An extension of our recently developed locally linear reconstruction scheme to 2 dimensional incompressible flow solver is presented. The solver is based on a semi-implicit fractional step method in which the convective term is discretized by Adams-Bashforth method and the diffusion term by Crank-Nicolson method. Several numerical examples are tested to demonstrate the mesh type independent accuracy of the solver, which include decaying vortex flow, square cavity flow, and flow around a circular cylinder. The above examples are solved on quadrilateral or hybrid meshes. For all numerical examples, we obtained reasonable results.

Key Words: 국지적 선형 재구성기법(locally linear reconstruction scheme), 유한체적법(finite volume method), 비정렬격자(unstructured mesh), fractional step 방법

1. 서 론

근래와 같이 전산유체역학의 해석 대상이 다양해지고 복잡해지고 있는 상황에서 대상의 형상 자체 또한 복잡해지기 마련이며, 이로 인해 야기 되는 격자 생성의 난점을 극복하기 위한 비정렬 격자의 사용은 이제 필수불가결한 것으로 인식되고 있다.

그러나, 비정렬격자의 이산화과정이 정렬격자에 비해 가변적이고 복잡하며 심지어 정확도에 있어서도 상대적으로 열세에 있다는 점은 비정렬격자의 사용을 어렵게 만드는 요인이다. 이에 현재까지 다양한 방법론들이 연구되어 왔으나 비정렬격자에서의 유동해석에 관한 많은 연구들이 정상 유동장의 해석에 국한되거나 순수한 외재적 방법인 경우가 많아 DNS나 LES와 같이 높은 정확도와 함께 효율적인

비정상 시간전진을 요구하는 분야에는 적용하기 곤란한 실정이다. 따라서, 이와 같은 유동 해석 분야에서의 비정렬격자를 사용을 위해서는 비정상 유동해석을 위한 고정도의 이산화 기법의 개발이 필수적이다.

본 연구에서는 최근 개발된 국지적 선형 재구성 기법[1]을 실제적인 유동해석 코드로 확장할 수 있음을 보이고, 지난 연구에서 보였던 재구성 기법 자체의 정확한 2차 정확도와 격자의 타입에 대한 비의존성을 유동해석에서 재확인하는데 주력한다.

이를 위해 국지적 선형 재구성 기법을 기반으로 한 공간 이산화와 semi-implicit 방식의 fractional step 방법을 이용한 비정상 비압축성 유동 해석 코드를 개발하고, 이를 검증하기 위해 decaying vortex 문제, 사각 공동 문제, 실린더 주위 유동 문제들에 대한 적용 예를 보인다.

각 예는 본래의 국지적 선형 재구성 기법의 격자의 종류에 구애 받지 않는다는 특성을 보이기 위해

*1 학생회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과

*2 정회원, 포항공과대학교 기계공학과

*E-mail : jhbaek@postech.ac.kr

여 비정렬 사각형과 사각형 격자가 혼합된 hybrid 격자들에서 계산된다.

2. 본 론

2.1 지배 방정식의 이산화

무차원화된 비정상 비압축성 유동의 지배 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_j u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_j} u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1), (2)$$

여기에서 Re는 Reynolds 수이다.

비정렬 격자에서 엇갈림 격자를 사용하는 것이 정렬격자의 경우에 비해 상대적으로 곤란하기 때문에 비엇갈림 격자를 사용하였으며, 비엇갈림 격자에서 나타날 수 있는 압력장의 비물리적인 진동을 억제하기 위하여 Rhi & Chow[2]의 momentum interpolation 방법을 사용하였다. 격자상의 변수 배치는 Kim & Choi[3]의 방법과 동일하며 Fig.1과 같다. 즉 셀 중앙에 속도와 압력의 모든 변수가 저장되며, 셀면에 부가적인 변수로 contravariant 속도가 저장된다. 이러한 구성은 Zang[4]이 정렬격자에서 사용한 방식을 Kim & Choi가 비정렬 격자에 적용한 것이다.

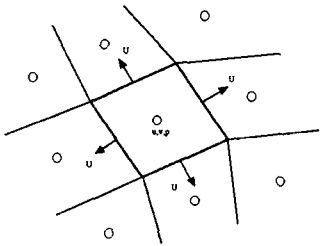


Fig. 1 변수 위치

본 연구에서는 Kim & Moin[5]과 같이 대류항에 Adams-Bashforth 방법을 사용하여 외재적으로 처리하였으며, 점성항은 Crank-Nicolson 방법을 사용하여 내재적으로 처리하였다.

비정상 비압축성 유동해석 코드의 근간으로서 본

연구에서는 Ducowicz & Dvinsky[6]의 fractional step 방법을 사용하였다. Kim & Moin의 fractional step 방법에 비해 Ducowicz & Dvinsky 방법은 u^* 를 구할 때 $n-1/2$ step의 압력장을 포함하여 시간진진을 하며, 압력 보정을 위한 Poisson 방정식은 $n+1/2$ step과 $n-1/2$ step의 압력차가 미지수가 된다. 보다 자세한 사항은 참고문헌 [3],[5],[6]을 참고하기 바란다.

최종적으로 시간에 관하여 이산화되고 이를 fractional step 방법을 적용하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = & -\frac{1}{2} \left(3 \frac{\partial (U_j u_i)^n}{\partial x_j} - \frac{\partial (U_j u_i)^{n-1}}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{\partial p^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x_i} + \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_j} (u_i^* + u_i^n) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} (p^{n+\frac{1}{2}} - p^{n-\frac{1}{2}}) = & \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3), (4)$$

의 두 부분으로 분할된다. 식(3)은 비압축성 조건을 만족하지 못하는 다음 시간 스텝에서의 추정값인 u_i^* 를 구하는 과정이며, 식(4)는 구해진 u_i^* 로부터 비압축성을 만족하는 압력장을 구해내는 과정이다.

식(3)과 (4)를 거쳐 u_i^* 와 압력장이 구해지면

$$u_i^{n+1} - u_i^* = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (p^{n+\frac{1}{2}} - p^{n-\frac{1}{2}})}{\partial x_i} \quad (5)$$

로 보정하여 u_i^{n+1} 를 구한다. 또한 셀면에서의 셀면에 수직인 contravariant 속도 U_i 는

$$U_i^{n+1} - U_i^* = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (p^{n+\frac{1}{2}} - p^{n-\frac{1}{2}})}{\partial x_i} \quad (6)$$

로 보정한다.

여기에서 U_i 는 보정된 u_i^{n+1} 을 내삽해 구하는 것이 아닌 u_i^* 의 내삽을 통해 구해진 U_i^* 로부터 보정하여 구하는 것에 주의할 필요가 있다. 이 과정은 모든 셀에서의 셀 단위의 비압축성을 보장함과 동시에 decoupling을 방지하는데 있어 중요하다. 유한체적법

의 특성상 셀 단위의 질량 보존은 전체 영역에서의 질량 보존을 보장한다.

위처럼 시간에 대해 이산화된 식을 각 셀에 대해 적분하고 2차 정확도를 갖도록 공간에 대해 이산화하면 시간 전진을 위한 대수 방정식을 얻을 수 있다. 공간에 대한 이산화는 참고문헌 [1]을 참조하기 바란다.

시간전진기법이 semi-implicit이므로 외재적으로 처리한 대류항의 Adams-Bashforth 방법의 시간제약이 전체 시간 전진에 대한 제약으로 작용하며, 엄밀히는 Re에 대한 복잡한 연관이 있지만 일반적으로 CFL 수가 0.5이하이면 안정적이라고 받아들여진다.

CFL 수에 대한 정의는 비정렬 격자에서 정확히 정의된 경우를 찾기 힘들다. 그러나, CFL 수의 정의가 물리적인 의미에서 1차원 균일 격자상에서의 셀의 길이와 한 시간스텝당 대류로 정보가 전달되는 거리의 비이기 때문에 이의 의미를 살려 다음과 같이 정의 한다.

$$CFL = Max(\frac{u_i l_i \Delta t}{l^2}) \tag{7}$$

여기에서 l_i 은 한 셀과 그에 인접한 다른 셀의 중점을 잇는 벡터이며 l 은 그 길이이다.

2.2 경계조건

경계조건을 만족시키기 위하여 가상셀을 사용하였다. 가상셀의 위치는 Fig.2와 같이 경계면에 인접한 셀의 중점과 가상셀의 중점이 경계면의 셀면 중앙과 일치하도록 결정한다.

속도 경계조건은 2차 정확도를 가정한다면 u_i^{n+1} 을 경계조건으로 사용하여도 무방하다. 따라서 $u_i^*|_{boundary} = u_i^{n+1}|_{boundary}$ 으로 설정하였다.

압력 방정식의 경계조건은 위의 속도 경계조건의 물리적 의미와 합치되도록, 압력을 구한 후의 속도 보정과정에서 속도경계조건에 보정이 일어나지 않도록 압력의 경계조건을 설정한다. 즉, 전 스텝과 현 스텝의 압력 차가 경계면에 수직인 방향으로 0의 미분량을 갖도록 설정하였다.

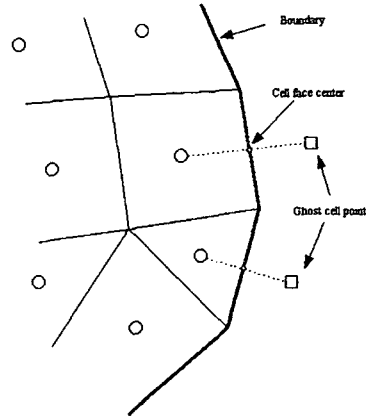


Fig. 2 가상셀의 위치

2.3 대수 방정식 해법

대수 방정식의 풀기 위한 해법으로는 conjugate gradient 방법의 일종인 BiCGStab 방법을 사용하였으며 예조건자로는 ILU의 변형인 ILUT를 사용하였다[7].

3. 계산결과

3.1 Decaying Vortex 문제

개발된 코드의 정확성을 정량적으로 검증하기 위하여 흔히 사용되는 decaying vortex 문제에 대하여 해석하였다.

decaying vortex 문제는 해석적으로,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\cos(\pi x)\sin(\pi y)e^{(-2\pi^2 t/Re)} \\ v(x, y, t) &= \sin(\pi x)\cos(\pi y)e^{(-2\pi^2 t/Re)} \\ p(x, y, t) &= -\frac{1}{2}(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y))e^{(-4\pi^2 t/Re)} \end{aligned} \tag{8}$$

로 주어진다.

Re 수는 10으로 정하였으며 정확도는 이론해를 t=0에서 부여하여 무차원 시간 0.1까지 시간전진한 후의 수치해와 이론해의 차이를 오차로 하여 L1 오차를 다음과 같이 정의하였다.

$$L_1 = \sum_{c_i \in \Omega} |\phi_{exact} - \phi_i| \tag{9}$$

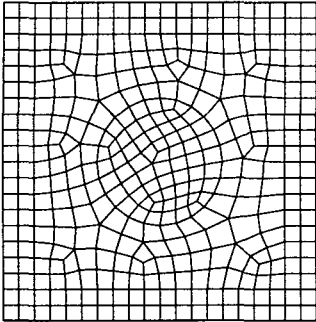


Fig. 3 decaying vortex 문제의 초기 격자

해석 영역은 가로 세로 1이며 371개의 사각형 셀로 이루어진 비정렬격자이다. 의도적으로 다소 질적인 면에서 좋지 않은 격자를 초기 격자로 사용하였다. 이 격자를 초기 격자로 하여 각 사각형 셀을 Fig.4와 같이 4분해 함으로서 오차의 감소율로 수렴율을 평가하였다.

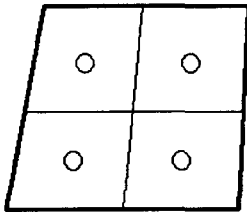


Fig. 4 사각격자의 분할 방법

총 3번의 미세화를 진행하였으며 371개 셀의 초기격자에서 각 미세화가 진행됨에 따라 4배씩의 셀수의 증가가 있고 최종적으로 23744개의 셀 수를 가지게 된다.

Fig.5는 u 속도의 오차를 격자를 미세화함에 따라 그린 것이며, 완전한 2차 정확도를 확인할 수 있다.

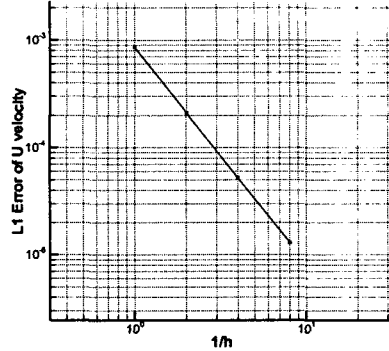


Fig. 5 u 속도의 오차

3.2 사각 공동 문제

내부 유동 해석에서의 검증 문제로 흔히 사용되는 사각 공동 문제에 대하여 해석하였다. 레이놀즈수는 1000이며 해석에 사용된 격자는 Fig.6과 같이 사각형과 삼각형 셀로 이루어진 hybrid 격자로서 총 셀수는 4901개이다. 초기의 정지상태에서 무차원 시간 120만큼 시간 전진하여 정상상태의 수치해를 구하였다.

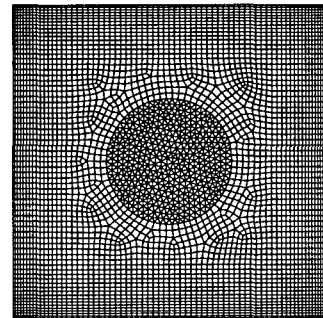


Fig. 6 사각 공동 문제의 hybrid 격자

해석된 결과는 수평과 수직 중앙선을 따라 추출된 u와 v 속도에 대하여 일반적으로 grid independent 해로 인정되는 Ghia[8]의 수치 결과와 비교하였다. Fig.7에서 보는 바와 같이 Ghia의 결과와 거의 완전한 일치를 보여준다. 사각형과 삼각형 셀의 혼재로 인한 문제 유무를 확인하기 위하여

Fig.8은 압력장을 3차원 곡면으로 도시한 것이다. 삼각형과 사각형 셀의 인접부위가 매끄럽게 연결되어 있는 것을 확인 할 수 있다.

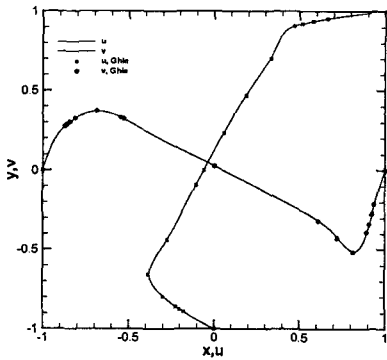


Fig. 7 수직,수평 중앙선에서의 u,v (Re=1000)

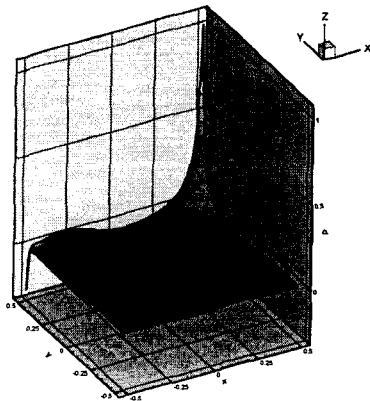


Fig. 8 압력장

3.3 실린더 주위 유동장 문제

외부 유동장에서의 해석에 대한 예로 원형 실린더 주위의 유동에 대하여 해석하였다. 레이놀즈 수는 100으로 층류이다. 사각형 비정렬 격자이며 총 셀수는 9419개이다. 해석영역의 크기는 가로 12, 세로 10으로 다소 작아 정량적 검증은 하기에는 부적절하다고 판단되어 여타 실험이나 기존의 수치해와의 비교는 하지 않았다. 좌측면과 상하면은 무차원 속도 1로 설정 되었으며 우측면은 대류 경계조건으로 다음식과 같이 정의 된다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_b \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

u_b 는 출구에서의 평균 유동 속도이다. Fig.9는 전 영역에 대한 격자이고 Fig.10은 실린더 근처의 격자를 확대한 것이다. 충분한 시간 전진 후 한 시간 스텝에서의 u 속도장, 압력장, 와도장을 각각 Fig.11, Fig.12, Fig.13에 도시하였다. 급격히 격자의 밀도가 변하는 구간에서도 매끄러운 해를 유지하고 있음을 확인 할 수 있다. .

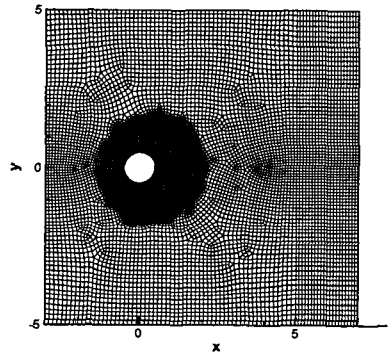


Fig. 9 실린더 주위 유동을 위한 사각 비정렬 격자

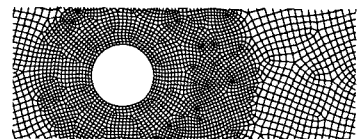


Fig. 10 실린더 근처의 격자

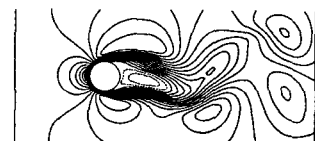


Fig. 11 u 속도장

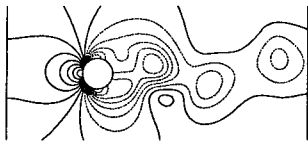


Fig. 12 압력장

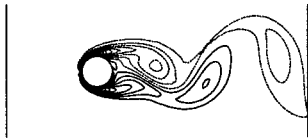


Fig. 13 와도장

4. 결 론

국지적 선형 재구성 기법을 기반으로 하여 완전한 이차 정확도를 가지는 비정상 비압축성 유동 해석 코드를 개발하였다. 비엇갈림 격자에서 momentum interpolation과 Ducowicz & Dvinsky의 fractional step 방법을 사용하였다. 시간 전진에 semi-implicit 방법을 사용하여 비정상 유동 해석에 적합하도록 하였다. 개발된 코드를 decaying vortex 문제에 적용하여 완전한 이차 정확도를 보임을 확인하였고, 사각공동문제와 실린더 주위 유동에 적용하여 비정렬 hybrid 격자와 사각 비정렬 격자에서의 유동해석의 예를 보였다.

본 연구에서 개발된 코드는 보다 정량적이며 세밀한 검토 및 개선을 거쳐 DNS나 LES와 같은 비정상 유동장 해석방법으로 사용될 수 있을 것으로 보인다.

참고문헌

[1] 이경세,백제현, "임의의 비정렬 격자계에서의 국지적 선형 재구성 기법," 한국전산유체공학회 2003 춘계학술대회 논문집, (2003) p31-36.
 [2] Rhie, C. M., Chow, W. L., "Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation," AIAA Journal, 21, (1983)

p1525.

[3] Kim, D., Choi, H., "A second order time accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids," Journal of Computational Physics, 162, (2000) p411-428.
 [4] Y. Zang, R. L. Street, and J. R. Koseff, A non-staggered grid, fractional step method for time dependent incompressible Navier - Stokes equations in curvilinear coordinates, J. Comput. Phys. 114, (1994), p18.
 [5] Kim, J., Moin, P., "Application of a fractional step method to incompressible Navier - Stokes equations," Journal of Computational Physics, 59, (1985) p308.
 [6] Dukowicz J. K. and Dvinsky, A. S. "Approximate factorization as a higher-order splitting for the implicit incompressible flow equations," Journal of Computational Physics, 102 (1992), p336.
 [7] Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS publishing Company, (1996)
 [8] Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., "High Resolutions for incompressible flow using the Navier Stokes equations and a multigrid method," Journal of Computational Physics, 48, (1982) p387