

CSF 모델을 이용한 자유표면 유동 해석

홍 인 철^{*1}, 백 제 현^{*2}

A method for incompressible free surface flow including surface tension using CSF model

I. C. Hong and J. H. Baek

A numerical method for simulating two-phase flows including surface force is presented. The method is based on fractional step method of finite volume formulation and the interface is tracked with PLIC VOF method.

In the CSF model, as color function, f , representing the location of interface varies steeply in the interface region, we need to use smoothed function \tilde{f} to get accurate unit normal and the curvature. Peskin kernel is used to get smoothed function \tilde{f} . A spherical drop in static equilibrium and three-dimensional merging of gas bubble are tested, resulting in the validation of this method.

Key Words: CSF 모델, VOF scheme, 자유표면 유동(free surface flow), 표면장력(surface tension)

1. 서 론

Continuum surface force (CSF) 모델[1]은 계면에 작용하는 표면장력을 부피에 관한 체적력으로 표현하여 유체의 운동방정식의 생성항(source term)에 포함하므로 계면에서 별도의 경계조건을 필요로 하지 않는다. 또한 merging과 breakup 과 같은 계면의 위상변화가 심한 유동에서도 효과적이기 때문에 널리 사용되고 있다. CSF 모델을 이용하여 정확한 표면력을 계산하기 위해서는 계면의 정확한 곡률(κ)과 법선벡터(n)를 알아야한다. 그러나 체적비율(volume fraction) f 을 이용하여 상(phase)를 구분하는 VOF (Volume of fluid) 방법은 계면($0 < f < 1$)에서 체적비율이 급격하게 변하기 때문에 계면에서 정확한 곡률과 법선벡터를 구할 수 없다. 이것은 계면의 곡률과

법선벡터가 체적비율의 미분을 통해 구해지기 때문이다. 따라서 계면에서 보다 정확한 곡률과 법선벡터를 구하기 위해서는 평활체적비율(smoothed volume fraction) \tilde{f} 을 이용해야한다. 평활체적비율을 구하기 위해서는 Gaussian kernel, cubic B-spline, Nordmark kernel, Peskin kernel과 같은 다양한 kernel들이 이용되고 있다.[2]

본 연구에서는 Peskin kernel[3, 4]을 이용한 보다 정확한 CSF 모델을 구현하여 표면력이 작용하는 유동을 해석할 수 있는 해석코드의 개발을 목적으로 하였으며 정지상태의 구형액체방울에서 spurious current(계면에서의 표면력과 압력구배가 일치하여 상쇄되지 않기 때문에 생긴 속도를 말하며 parasite current라고도 한다.)가 감소하는 것을 확인하고, 계면의 위상변화가 심한 3차원에서 기포의 합일(bubble merging)을 계산하여 코드의 신뢰도를 검증하였다.

*1 학생회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과

*2 정회원, 포항공과대학교 기계공학과

* E-mail : jhbaek@postech.ac.kr

2. 수치해석방법

CSF 모델에서 표면력은 유체의 계면에서 체적력, F_i 로 표현된다.

$$F_i = f_s \delta_s \quad (1)$$

여기서 δ_s 은 계면의 Dirac delta 함수이고, f_s 는 유체 계면의 면적당 작용하는 표면력이다.

$$f_i = \sigma \kappa n_i + \nabla_s \sigma \quad (2)$$

여기서 σ 는 계면장력상수, n_i 은 계면의 단위 법선벡터, κ 는 계면의 평균 곡률이고 ∇_s 은 계면에 나란한 방향으로 작용하는 구배이다.

$$\kappa = -\frac{\partial n_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

식 (2)에서 첫 번째항은 곡률과 계면장력상수에 비례하여 높은 곡률의 계면을 매끄럽게 하기위해서 계면에 수직으로 작용하는 힘(capillary force)이고 두 번째항은 계면장력상수가 낮은 쪽에서 높은 쪽으로 유동을 발생시키는 계면에 나란하게 작용하는 힘(Marangoni force)이다.

정확한 표면력을 구하기 위해서 계면에서의 단위법선벡터와 곡률은 평활체적비율(smoothed volume fraction) \tilde{f} 을 이용한다.

$$n_i = \frac{\nabla \tilde{f}}{|\nabla \tilde{f}|} \quad (4)$$

$$\delta_s = |\nabla \tilde{f}|$$

여기서 구해진 n_i 은 식(3)의 곡률을 구할 때 사용된다.

실제로 셀 중심에서 계산된 체적비율 f 를 셀 꼭지점에서 재구성하기 위해서 inverse distance weighting[9]을 이용하였고 셀 꼭지점으로 옮겨진 체적비율을 평균하여 셀 중심에서의 평활체적비율(smoothed volume fraction) \tilde{f} 을 구한다. 이것은 균일한 격자(uniform grid)에서 Peskin kernel[3]과 같은 형태이다.

비정상 비압축성 점성유동의 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) \right] + s_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

체적력으로 바뀐 표면력 F_i 는 운동방정식의 생성항 s_i 에 포함된다.

$$F_i = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \sigma \kappa \nabla \tilde{f} \quad (5)$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2)$$

여기서 $\langle \rho \rangle$ 은 서로 다른 유체(ρ_1, ρ_2)의 밀도를 평균한 값이다.[5]

3. 계산결과

3.1 A spherical drop in static equilibrium

CSF 모델을 평가하기 위해서 정지상태에서 구형의 액체방울을 계산하였다. 액체방울의 계면에 작용하는 표면력은 모두 액체방울 중심을 향하기 때문에 상쇄되고 중력은 작용하지 않으므로 액체방울에 작용하는 외력은 없다. 따라서 계산영역에서의 속도는 없어야 하지만 CSF 모델에서 구해진 표면력과 계면에서 구한 압력구배가 정확히 상쇄되어 없어지지 않기 때문에 spurious current가 생긴다. 이것은 수치과정에서 발생하는 오류(numerical error)이다.

계산영역의 크기는 1×1 의 정 사각용기이고 균일한 정육면체 격자를 $50 \times 50 \times 50$ 개 사용하였다. 액체방울의 반지름은 0.125, 계면장력상수 σ 는 0.375, 두 유체의 밀도와 점성계수는 각각 4와 1이고, $\Delta t = 10^{-5}$

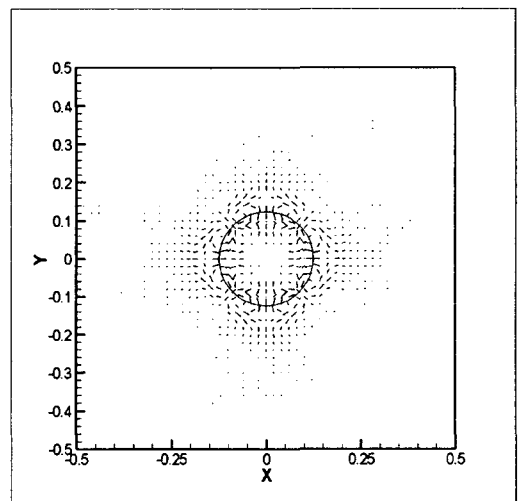


Fig.1 The velocity plot across centerline of drop in the x-y-plane at 200th time step. The contour level is 0.5

이다. Spurious current의 크기는 무차원 수 Oh 을 이용하여 예측될 수 있기 때문에 위의 계산에 사용된 계산영역의 크기와 물성치는 무차원 값이다. 이 값은 [8]에서 사용한 값과 같다. Fig.1은 액체구형방울의 중심을 자르는 단면에 투영된 속도를 그린 것이다. Spurious current의 최대속도(u_{max})는 [7]에서 $0.01\sigma/\mu$, 또는 $0.01/Oh^2$ order의 크기를 갖는다. 이때 $Oh = (\mu^2/\sigma\alpha)^{1/2}$ 은 무차원 수 Ohnesorge number이다. Spurious current의 최대크기는 대략 0.00178 또는 0.00375로 예측된다. [8]은 96^3 개의 격자에서 [2]의 K_8 kernel을 사용하였을 때 속도벡터의 norm은 $L_\infty = 0.00179982$, $L_1 = 0.00001473$, $L_2 = 0.00008403$ 인 것을 보여준다. 여기서 L_∞ 는 u_{max} 와 같다. 우리가 Peskin kernel을 사용하여 계산한 spurious current에 의한 norm은 $L_\infty = 0.0010404$, $L_1 = 0.0000209$, $L_2 = 0.0000916$ 이다. Peskin kernel을 사용하여 계산한 L_∞ 은 K_8 을 사용했을 때의 L_∞ 보다 감소하였다. 하지만 L_1 , L_2 의 값은 더 크다. Peskin kernel과 K_8 중에 어느 것이 좋다고 단정할 수 없지만 분명한 것은 Peskin kernel을 사용하였을 때 계산한 spurious current가 예측된 값보다 줄어들었고, CSF 모델의 적용에 있어서 kernel은 꼭 필요하다는 것이다. Fig 2에서 (A)와 (B)는 각각 체적비율 f 와 매끄러운 체적비율 \tilde{f} 를 그린 것이다. (A)와 (B)를 비교하였을 때 매끄러운 체적비율을 그린 (B)의 계면 두께가 좀 더 두껍고 계면이 매끄럽게 표현되는 것을 볼 수 있다.

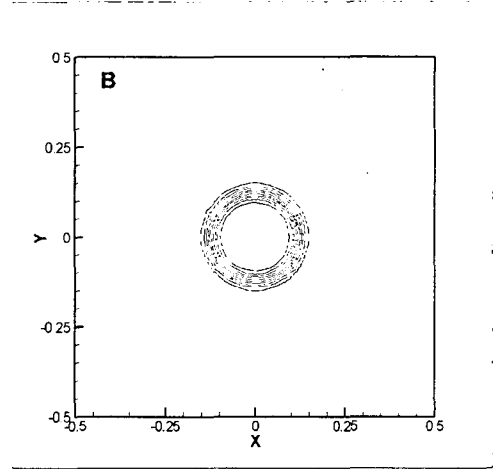
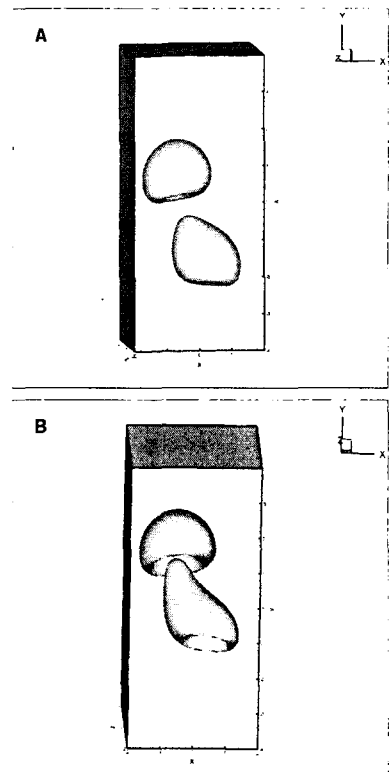
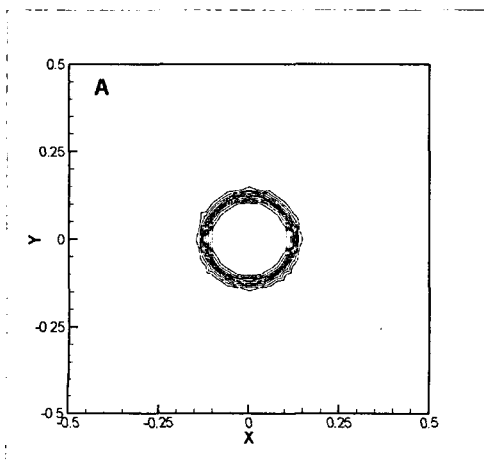


Fig.2 Each of (A) and (B) is the contours of volume fraction f and smoothed volume fraction \tilde{f} in the cross section of the drop center.



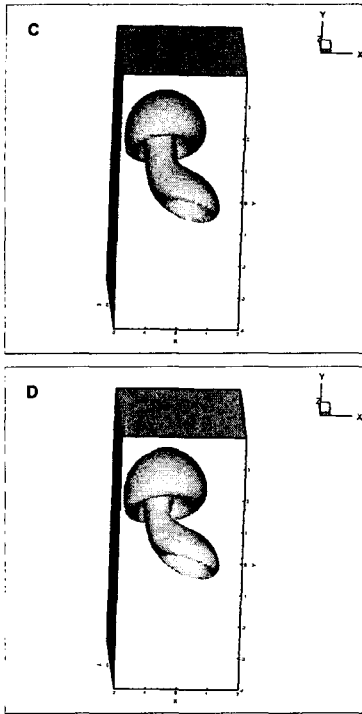


Fig.3 Merging of two viscous gas bubbles.
(A) $t=1.2$, (B) $t=2.0$, (C) $t=2.7$, (D) $t=2.9$ (sec)

3.2 Merging of two bubbles of equal size

3차원에서 같은 크기의 기포가 합일하는 것을 계산하였다. Fig 3는 실제 시간에서 합일되는 3차원 기포의 형상을 비교하기 위해서 M. Sussman과 E. G. Puckett[6]의 계산과 동일한 계산을 하였다. 두 유체의 밀도 비는 20 : 1, 점성 비는 26 : 1이고 무차원 수는 $We = 50$, $Fr = 1$, $Re = 50^{3/4}$ 이다. 우리가 $32 \times 32 \times 64$ 의 격자를 사용하였을 때 $10^{-3}\%$ 미만의 질량손실 내에서 [6]에서 계산한 결과와 거의 일치하였다. 하지만, Fig. 3의 (B)는 [6]에서 계산한 모양과 차이가 있다. 이것은 현재 계산에서 격자수가 [6]에서 보다 상대적으로 적기 때문에 다소 차이가 발생한 것으로 보인다. Fig. 3의 (B)을 볼 때 아래에서 올라가는 기포는 위에 있는 기포와 접하지 않은 반면에 [6]의 결과는 접한 것처럼 보이고 있다.

4. 결 론

계면이 포함된 유동해석 코드의 개발에 있어서 표면력을 계산하기 위해서 CSF 모델을 적용하였고, 정확한 표면력계산을 위해서 Peskin kernel을 이용하였

다. 정지상태의 액체 구형방울 주위에서 생기는 spurious current와 계면의 변화가 심한 기포의 합일을 계산하여 코드의 유용성을 검증하였다.

참고문헌

- [1] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach, "A continuum method for modeling surface tension," *Journal of Computational Physics*, Vol.100, (1992), p.335-354.
- [2] D. B. Kothe, M. W. Williams, and E. G. Puckette, "Accuracy and convergence of continuum surface tension models," in *Fluid Dynamics at Interfaces*, edited by W. Shyy and R. Narayanan, (1998), p.294.
- [3] C. S. Peskin, "Numerical analysis of blood flow in the heart," *Journal of Computational Physics*, Vol.25, (1977), p.220-252.
- [4] M. Bussmann, J. Mostaghimi, and S. Chandra, "On a three-dimensional volume tracking model of droplet impact," *Physics of fluids*, Vol.11, (1999), p.1406-1417.
- [5] D. B. Kothe, W. J. Rider, S. J. Mosso and J. S. Brock, "Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions," AIAA 96-0859, (1996)
- [6] M. Sussman and E. G. Puckett, "A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.162, (2000), p.301-337.
- [7] R. Scardovelli and S. Zaleski, "Direct numerical simulation of free surface and interfacial flow," *Annu. Rev. Fluid Mech* Vol.31, (1999), p.567.
- [8] Y. Renardy and M. Renardy, "PROST: A Parabolic Reconstruction of Surface Tension for the Volume-of-Fluid Method," *Journal of Computational Physics*, Vol.183, (2002), p.400-421.
- [9] N.T. Frink, "Upwind scheme for solving the euler equations on unstructured tetrahedral meshes," *AIAA J.*, Vol.1, (1992), p.70-77.